3 Číselné řady

3.1 Základní pojmy

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme **m-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat **n-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Věta 3.1 (nutná podmínka konvergence řady). *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.*

Věta 3.2. *(i) Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje.*

(ii) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady. Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konverguje.

(iii) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0\ \forall m \in \mathbf{N}, m > n : \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \varepsilon.$$

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.3 (srovnávací kritérium). *Nechť $n_0 \in \mathbf{N}$. Dále nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.*

(i) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(ii) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Věta 3.4 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in \mathbf{R}^{\star}$.*

(i) Nechť $c \in (0, \infty)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) Nechť $c = 0$. Pak konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) Nechť $c = \infty$. Pak konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) Existuje-li $q \in (0,1)$ takové, že

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(iii) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(iv) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

(v) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Věta 3.6 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(i) Existuje-li $q \in (0,1)$ takové, že

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(iii) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(iv) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Věta 3.7 (Cauchyovo kondenzační kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.*

Věta 3.8. *Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*

Věta 3.9 (Raabeovo kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(i) Je-li $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(ii) Je-li $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Věta 3.10 (Leibnizovo kritérium). *Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Nechť platí*

- *$a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,*
- *$\lim a_n = 0$.*

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Věta 3.11. *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*