Matematická analýza 1a

4. Limita a spojitost funkce

4.1 Základní pojmy

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

4.1 Základní pojmy

Definice

Funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J.

4.1 Základní pojmy

Definice

Monotónní funkcí (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

4.1 Základní pojmy

Definice

Nechť f je funkce. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,

4.1 Základní pojmy

Definice

Nechť f je funkce. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,

4.1 Základní pojmy

Definice

Nechť f je funkce. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f,\ x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

4.1 Základní pojmy

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,

4.1 Základní pojmy

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,

4.1 Základní pojmy

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,

4.1 Základní pojmy

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

4.2 Limita funkce

Definice

Řekneme, že prvek $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P(c, \delta) : \ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

4.2 Limita funkce

Definice

Řekneme, že prvek $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) : \; f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 4.1 (jednoznačnost limity)

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

4.2 Limita funkce

Definice

Řekneme, že prvek $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) : \; f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 4.1 (jednoznačnost limity)

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^{+}(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^{-}(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^{+}(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,

4.2 Limita funkce

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^{-}(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^{+}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $P^{-}(+\infty, \varepsilon) = B^{-}(+\infty, \varepsilon)$,

4.2 Limita funkce

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^+(c, \delta) : \ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

4.2 Limita funkce

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x \in P^+(c, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Definice

Nechť $A \in \mathbf{R}^{\star}$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P^{+}(c, \delta) : \; f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

4.2 Limita funkce

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $c \in \mathbf{R}$, jestliže $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

4.2 Limita funkce

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $c \in \mathbf{R}$, jestliže $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definice

Řekneme, že funkce f je v bodě $c \in$ **R spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$).

4.3 Věty o limitách

Věta 4.2

Nechť $c \in \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{R}^\star$. *Pak* $\lim_{x\to c} f(x) = A$, *právě když* $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \lim\limits_{x\to c-} f(x) = A$.

4.3 Věty o limitách

Věta 4.3

Nechť funkce f *má vlastní limitu v bodě* $c \in \mathbf{R}^\star$*. Pak existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ *takové, že* f *je na* $P(c, \delta)$ *omezená.*

Věta 4.4 (limita a aritmetické operace)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

4.3 Věty o limitách

Věta 4.4 (limita a aritmetické operace)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

4.3 Věty o limitách

Věta 4.4 (limita a aritmetické operace)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

4.3 Věty o limitách

Věta 4.4 (limita a aritmetické operace)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

4.3 Věty o limitách

Věta 4.4 (limita a aritmetické operace)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

4.3 Věty o limitách

Věta 4.4 (limita a aritmetické operace)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

4.3 Věty o limitách

Věta 4.4 (limita a aritmetické operace)

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 4.5

Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $A > 0$. *Jestliže existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je kladná na* $P(c,\eta)$, *pak* $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = +\infty$.

Věta 4.6 (o srovnání)

Mějme $c \in \mathbf{R}^{\star}$.

(i) Nechť

$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $P(c,\delta)$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c,\delta):\ f(x) > g(x).$$

(ii) Nechť existuje prstencové okolí $P(c,\delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta): \; f(x) \leq g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to c} f(x)$ *a* $\lim_{x\to c} g(x)$*. Potom platí*

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

4.3 Věty o limitách

(iii) (o dvou strážnících) Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(c, \delta)$ *platí*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$*. Potom existuje rovněž* $\lim_{x \to c} h(x)$ *a všechny tři limity jsou si rovny.*

4.3 Věty o limitách

Věta 4.7 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

Věta 4.7 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq D$,

Věta 4.7 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x \to c} g(x) = D$, $\lim_{y \to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \, \forall x \in P(c, \eta) : \; g(x) \neq D$,

(P2) f *je spojitá v* D.

4.3 Věty o limitách

Věta 4.7 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^{\star}$, $\lim_{x \to c} g(x) = D$, $\lim_{y \to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \, \forall x \in P(c, \eta) : \; g(x) \neq D$,

(P2) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x \to c} f(g(x)) = A$.

4.3 Věty o limitách

Věta 4.7 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c, \eta):\ g(x) \neq D$,

(P2) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

4.3 Věty o limitách

Věta 4.7 (limita složené funkce)

Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0 \; \forall x \in P(c,\eta): \; g(x) \neq D$,

(P2) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

4.3 Věty o limitách

Věta 4.8 (Heine)

Nechť $C \in \mathbf{R}^\star$ a funkce f je definována (alespoň) na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbf{R}^\star$. Pak výroky (i) a (ii) jsou ekvivalentní.

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = C$

(ii) *Pro každou posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *splňující*

- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,
- $\forall n \in \mathbf{N}: \ x_n \neq a$,

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = C$.

4.3 Věty o limitách

Věta 4.8 (Heine)

Nechť $C \in \mathbf{R}^\star$ a funkce f je definována (alespoň) na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbf{R}^\star$. Pak výroky (i) a (ii) jsou ekvivalentní.

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = C$

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující*

- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,
- $\forall n \in \mathbf{N}: \ x_n \neq a$,

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = C$.

Věta 4.9 (limita monotónní funkce)

Nechť funkce f je monotónní na (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^\star$. Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

4.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 4.10 (Bolzano)

Nechť funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

4.4 Funkce spojité na intervalu

Lemma 4.11

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R} : \; x < z < y \Rightarrow z \in M .$$

4.4 Funkce spojité na intervalu

Lemma 4.11

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ a platí

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R}: \; x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M je interval.

4.4 Funkce spojité na intervalu

Lemma 4.11

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ a platí

$$\forall x, y \in M \, \forall z \in \mathbf{R} : \; x < z < y \Rightarrow z \in M .$$

Pak M je interval.

Věta 4.12 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)

Nechť J je nedegenerovaný interval. Nechť funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval.

4.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 4.13

Nechť f spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená shora i zdola.

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M : \; f(y) \leq f(x) \quad \text{(resp. } \forall y \in M : \; f(y) \geq f(x)\text{)}.$$

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M : \ f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M : \ f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M.

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M: \ f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M: \ f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M : \; f(y) \leq f(x)$,

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M : \ f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M : \ f(y) \geq f(x)$.

4.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 4.14

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom funkce f nabývá na $[a, b]$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

4.4 Funkce spojité na intervalu

Věta 4.14

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom funkce f nabývá na $[a, b]$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Věta 4.15 (o inverzní funkci)

Nechť f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.