4 Limita a spojitost funkce

4.1 Základní pojmy

Definice. **Funkce** f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice. Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **klesající** (**neklesající**, **nerostoucí**) na intervalu J.

Definice. **Monotónní funkcí** (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice. Nechť f je funkce. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbf{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f,\ x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \le K$,
- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \ge K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \le K$,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

4.2 Limita funkce

Definice. Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** c jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- **prstencové okolí bodu** c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbf{R}^\star$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbf{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) :\ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 4.1 (jednoznačnost limity)**.** *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Definice. Nechť $c \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** c jako $B^+(c, \varepsilon) = [c, c + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c]$,
- **pravé prstencové okolí bodu** c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$.

Definice. Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice. Nechť $A \in \mathbf{R}^\star$, $c \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P^+(c, \delta) : \ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Definice. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $c \in \mathbf{R}$, jestliže $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definice. Řekneme, že funkce f je v bodě $c \in \mathbf{R}$ **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = f(c)$).

4.3 Věty o limitách

Věta 4.2. *Nechť $c \in \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{R}^\star$. Pak $\lim_{x \to c} f(x) = A$, právě když $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = \lim\limits_{x \to c-} f(x) = A$.*

Věta 4.3. *Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbf{R}^\star$. Pak existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.*

Věta 4.4 (limita a aritmetické operace)**.** *Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ a $\lim_{x \to c} g(x) = B \in \mathbf{R}^\star$. Potom platí:*

(i) $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován,*

(ii) $\lim_{x \to c} f(x) g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován,*

(iii) $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz A/B definován.*

Věta 4.5. *Nechť $c \in \mathbf{R}^\star$. Nechť $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, $\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbf{R}^\star$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c, \eta)$, pak $\lim_{x \to c}(f(x)/g(x)) = +\infty$.*

Věta 4.6 (o srovnání). *Mějme $c \in \mathbf{R}^\star$.*

(i) Nechť

$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $P(c,\delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta):\ f(x) > g(x).$$

(ii) Nechť existuje prstencové okolí $P(c,\delta)$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta):\ f(x) \leq g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

(iii) (o dvou strážnících) Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(c,\delta)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$. Potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a všechny tři limity jsou si rovny.

Věta 4.7 (limita složené funkce). *Nechť $c, D, A \in \mathbf{R}^\star$, $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbf{R}, \eta > 0\, \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq D$,

(P2) f *je spojitá v* D.

Potom $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

Věta 4.8 (Heine). *Nechť $C \in \mathbf{R}^\star$ a funkce f je definována (alespoň) na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbf{R}^\star$. Pak výroky (i) a (ii) jsou ekvivalentní.*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = C$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující

- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,
- $\forall n \in \mathbf{N}:\ x_n \neq a$,

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = C$.

Věta 4.9 (limita monotónní funkce). *Nechť funkce f je monotónní na (a,b), $a, b \in \mathbf{R}^\star$. Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.*

4.4 Funkce spojité na intervalu

Definice. Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

Věta 4.10 (Bolzano)**.** *Nechť funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.*

Lemma 4.11. *Nechť $M \subset \mathbf{R}$ a platí*

$$\forall x, y \in M\, \forall z \in \mathbf{R} :\ x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Pak M je interval.

Věta 4.12 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť J je nedegenerovaný interval. Nechť funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval.*

Věta 4.13. *Nechť f spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená shora i zdola.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M :\ f(y) \leq f(x) \quad \text{(resp. } \forall y \in M :\ f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$).Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M :\ f(y) \leq f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in P(x, \delta) \cap M :\ f(y) \geq f(x)$.

Věta 4.14. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom funkce f nabývá na $[a, b]$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).*

Věta 4.15 (o inverzní funkci)**.** *Nechť f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*