

Matematická analýza 1a

5. Elementární funkce

5. Elementární funkce

Věta 5.1 (zavedení logaritmu)

*Existuje právě jedna funkce (značíme ji \log a nazýváme ji **přirozeným logaritmem**), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D(\log) = (0, +\infty)$ a na tomto intervalu je \log rostoucí,

(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty) : \log xy = \log x + \log y,$

(L3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$

5. Elementární funkce

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem \exp .

5. Elementární funkce

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$. **Obecnou mocninou** a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

5. Elementární funkce

Věta 5.2 (zavedení funkcí sinus a kosinus)

Existuje právě jedno kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a právě jedna dvojice funkcí **sinus** (\sin) a **kosinus** (\cos), které mají následující vlastnosti:

$$(G1) \quad D(\sin) = D(\cos) = \mathbf{R},$$

(G2) pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ platí

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x,$$

(G3) \sin je rostoucí na $[0, \frac{1}{2}\pi]$, $\sin 0 = 0$, $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$,

$$(G4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5. Elementární funkce

Definice

Funkci **tangens** značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x , pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D(\operatorname{tg}) = \{x \in \mathbf{R}; x \neq (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbf{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D(\operatorname{cotg}) = \{x \in \mathbf{R}; x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

5. Elementární funkce

Definice (zavedení cyklometrických funkcí)

Cyklometrickými funkcemi budeme rozumět funkce **arkussinus** (\arcsin), **arkuskosinus** (\arccos), **arkustangens** (\arctg), **arkuskotangens** (arccotg), které jsou definovány takto

$$\arcsin = (\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1},$$

$$\arccos = (\cos |_{[0, \pi]})^{-1},$$

$$\arctg = (\text{tg} |_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1},$$

$$\text{arccotg} = (\text{cotg} |_{(0, \pi)})^{-1}.$$

5. Elementární funkce

Věta 5.3

Funkce \log , \exp , \sin , \cos , tg , cotg , \arcsin , \arccos , arctg a $\operatorname{arccotg}$ jsou spojité na svých definičních oborech.