5 Elementární funkce

Věta 5.1 (zavedení logaritmu)**.** *Existuje právě jedna funkce (značíme ji* $\log$ *a nazýváme ji* **přirozeným logaritmem***), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D(\log) = (0, +\infty)$ *a na tomto intervalu je* $\log$ *rostoucí,*

(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty) : \ \log xy = \log x + \log y$*,*

(L3) $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$*.*

Definice. **Exponenciální funkcí** budeme rozumět funkci inverzní k funkci $\log$. Budeme ji značit symbolem $\exp$.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$. **Obecnou mocninu** a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Věta 5.2 (zavedení funkcí sinus a kosinus)**.** *Existuje právě jedno kladné reálné číslo (budeme ho značit* π*) a právě jedna dvojice funkcí* **sinus** *(*$\sin$*) a* **kosinus** *(*$\cos$*), které mají následující vlastnosti:*

(G1) $D(\sin) = D(\cos) = \mathbf{R}$*,*

(G2) pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \sin(-x) &= -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \end{aligned}$$

(G3) $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{1}{2}\pi]$*,* $\sin 0 = 0$*,* $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$*,*

(G4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$*.*

Definice. Funkci **tangens** značíme tg a definujeme předpisem

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D(\mathrm{tg}) = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D(\mathrm{cotg}) = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ předpisem

$$\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Definice (zavedení cyklometrických funkcí)**.** **Cyklometrickými funkcemi** budeme rozumět funkce **arkussinus** ($\arcsin$), **arkuskosinus** ($\arccos$), **arkustangens** (arctg), **arkuskotangens** ($\mathrm{arccotg}$), které jsou definovány takto

$$\begin{aligned} \arcsin &= (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}, \\ \arccos &= (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}, \\ \mathrm{arctg} &= (\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}, \\ \mathrm{arccotg} &= (\mathrm{cotg}|_{(0,\pi)})^{-1}. \end{aligned}$$

Věta 5.3. *Funkce* $\log$*,* $\exp$*,* $\sin$*,* $\cos$*,* tg*,* cotg*,* $\arcsin$*,* $\arccos$*,* arctg *a* $\mathrm{arccotg}$ *jsou spojité na svých definičních oborech.*