Matematická analýza 1a

6. Derivace funkce

6.1 Definice a základní vztahy

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

6.1 Definice a základní vztahy

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zprava** budeme rozumět

$$f'_{+}(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

analogicky definujeme **derivaci funkce** f **v bodě** a **zleva**.

6.1 Definice a základní vztahy

Věta 6.1

Nechť funkce f *má v bodě* $a \in \mathbf{R}$ *vlastní derivaci. Potom je funkce* f *v bodě* a *spojitá.*

6.1 Definice a základní vztahy

Věta 6.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f *a* g *mají v bodě* $a \in \mathbf{R}$ *vlastní derivace. Potom platí*

6.1 Definice a základní vztahy

Věta 6.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

6.1 Definice a základní vztahy

Věta 6.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

Věta 6.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 6.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

6.1 Definice a základní vztahy

Věta 6.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

6.1 Definice a základní vztahy

Věta 6.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) *je-li $g(a) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 6.3 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbf{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 6.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Buď $x_0 \in (a, b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.

Věta 6.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a,b) spojitá a ryze monotónní. Buď $x_0 \in (a,b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.

(i) *Pokud existuje (vlastní nebo nevlastní) $f'(x_0) \neq 0$, má funkce f^{-1} derivaci v bodě y_0 a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

(kde klademe $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

Věta 6.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Buď $x_0 \in (a, b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.

(i) *Pokud existuje (vlastní nebo nevlastní) $f'(x_0) \neq 0$, má funkce f^{-1} derivaci v bodě y_0 a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

(kde klademe $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

(ii) *Je-li $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající) na (a, b), je $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Věta 6.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Buď $x_0 \in (a, b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.

(i) *Pokud existuje (vlastní nebo nevlastní) $f'(x_0) \neq 0$, má funkce f^{-1} derivaci v bodě y_0 a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

(kde klademe $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

(ii) *Je-li $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající) na (a, b), je $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

6.1 Definice a základní vztahy

Věta 6.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Buď $x_0 \in (a, b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.

(i) *Pokud existuje (vlastní nebo nevlastní) $f'(x_0) \neq 0$, má funkce f^{-1} derivaci v bodě y_0 a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

(kde klademe $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

(ii) *Je-li $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající) na (a, b), je $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Věta 6.5 (nutná podmínka lokálního extrému)

Budiž $a \in \mathbf{R}$ *bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce* f. *Potom* $f'(a)$ *neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 6.6 (Rolleova)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.6 (Rolleova)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $[a, b]$,*

Věta 6.6 (Rolleova)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $[a, b]$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.6 (Rolleova)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $[a, b]$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Věta 6.6 (Rolleova)

Nechť funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $[a, b]$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f'(\xi) = 0$.

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.7 (Lagrangeova)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b).

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.7 (Lagrangeova)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.8 (Cauchyova)

Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a takové, že f má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) a g má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní a nenulovou derivaci.

Věta 6.8 (Cauchyova)

Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a takové, že f má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) a g má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní a nenulovou derivaci. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

Věta 6.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

Věta 6.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 6.9 (vztah derivace a monotonie)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 6.10 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.10 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť* $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, f *a* g *mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu* a *vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť* $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$, f *a* g *mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu* a *vlastní derivaci a existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.11

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. *Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.11

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x).$$

Definice

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a.

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice

Nechť $f'(a) \in \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a-\delta, a): \ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a+\delta): \ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a-\delta, a): \ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a+\delta): \ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Věta 6.12 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ *je inflexní bod funkce* f. *Potom* $f''(a)$ *neexistuje nebo je rovna nule.*

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Věta 6.12 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbf{R}$ je inflexní bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 6.13 (postačující podmínka pro inflexi)

Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:

- $\forall x \in (a, z): \ f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b): \ f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f.

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \; \forall \lambda \in [0,1] : \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I \,\forall \lambda \in [0,1] : \\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **ryze konvexní na intervalu I**, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \,\forall \lambda \in (0,1) : \\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Lemma 6.14

Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 : \ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 6.15

Nechť f je konvexní na intervalu J a nechť $a \in \operatorname{int} J$. Pak existují $f'_+(a) \in \mathbf{R}$, $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Věta 6.15

Nechť f je konvexní na intervalu J a nechť $a \in \operatorname{int} J$. Pak existují $f'_+(a) \in \mathbf{R}$, $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.

Věta 6.16

Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak f je spojitá na J.

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Věta 6.17

Nechť $f : (a, b) \to \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a nechť* f' *je spojitá na* (a, b)*.*

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$*, pak* f *je ryze konvexní na* (a, b)*.*

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Věta 6.17

Nechť $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b$, *a nechť* f' *je spojitá na* (a, b).

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a, b).

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Věta 6.17

Nechť $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b$, *a nechť* f' *je spojitá na* (a, b).

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a, b).

(iii) *Jestliže* $f''(x) \geq 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je konvexní na* (a, b).

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Věta 6.17

Nechť $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b$, a nechť f' je spojitá na (a, b).

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).*

(iv) *Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).*

Věta 6.18

Nechť $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ *(resp.* $f''(a) < 0$*). Potom* f *má v* a *lokální minimum (resp. lokální maximum).*

6.4 Průběh funkce

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b) = 0, \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b) = 0\right).$$

6.4 Průběh funkce

Definice

Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0\text{)}.$$

Věta 6.19

Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, právě když

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

6.4 Průběh funkce

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v ”krajních bodech definičního oboru”.
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Vypočteme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.