6 Derivace funkce

6.1 Definice a základní vztahy

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak

- **derivací funkce** f **v bodě** a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce** f **v bodě** a **zprava** budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

  analogicky definujeme **derivaci funkce** f **v bodě** a **zleva**.

Věta 6.1. *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Věta 6.2 (aritmetika derivací)**.** *Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbf{R}$ vlastní derivace. Potom platí*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) je-li $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 6.3 (derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbf{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 6.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Buď $x_0 \in (a, b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.*

(i) Pokud existuje (vlastní nebo nevlastní) $f'(x_0) \neq 0$, má funkce f^{-1} derivaci v bodě y_0 a platí rovnost

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

(kde klademe $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

(ii) Je-li $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající) na (a, b), je $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Věta 6.5 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Budiž $a \in \mathbf{R}$ bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce f. Potom $f'(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

6.2 Věty o střední hodnotě

Věta 6.6 (Rolleova)**.** *Nechť funkce f má následující vlastnosti:*

(i) je spojitá na intervalu $[a, b]$,

(ii) má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),

(iii) platí, že $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f'(\xi) = 0$.

Věta 6.7 (Lagrangeova)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 6.8 (Cauchyova)**.** *Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a takové, že f má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b) a g má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní a nenulovou derivaci. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta 6.9 (vztah derivace a monotonie)**.** *Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako* $\operatorname{int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je neklesající na J.*

(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 6.10 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** (i) *Nechť $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \to a+} |g(x)| = +\infty$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 6.11. *Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbf{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a + h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

6.3 Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a.

Definice. Nechť $f'(a) \in \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) :\ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) :\ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) :\ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) :\ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 6.12 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$ je inflexní bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 6.13 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:*

- $\forall x \in (a, z) :\ f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b) :\ f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f.

Definice. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I\, \forall \lambda \in [0, 1] : \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbf{R}$ je **ryze konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2\, \forall \lambda \in (0, 1) : \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Lemma 6.14. *Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 :\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 6.15. *Nechť f je konvexní na intervalu J a nechť $a \in \operatorname{int} J$. Pak existují $f'_+(a) \in \mathbf{R}$, $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.*

Věta 6.16. *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak f je spojitá na J.*

Věta 6.17. *Nechť $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, $a < b$, a nechť f' je spojitá na (a,b).*

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ryze konvexní na (a,b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je ryze konkávní na (a,b).*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je konvexní na (a,b).*

(iv) *Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak f je konkávní na (a,b).*

6.4 Průběh funkce

Věta 6.18. *Nechť $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$). Potom f má v a lokální minimum (resp. lokální maximum).*

Definice. Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0).$$

Věta 6.19. *Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, právě když*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v ”krajních bodech definičního oboru”.
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Vypočteme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.