

Zápočtové úlohy pro studenty kombinovaného studia

1.–4. Vypočtěte limity posloupností

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right) \text{ pro } a > b > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n}},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{10} - (n+3)^{10}}{(n+1)^{10} - n^{10}}.$$

5.–8. Zjistěte, zda konvergují (divergují) řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{(2n^2 + 5)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n.$$

9.–12. Spočtěte následující limity funkcí:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x 2^x}{1 + x 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}},$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{cotg} \pi x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

13. Nalezněte $A, B \in \mathbf{R}$, tak aby na \mathbf{R} platil vztah

$$\left(A + x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1}{2}(1+x^2) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x \right) (\log(1+x^2) - 1) \right)' = (Ax + B)(\operatorname{arctg} x) \log(1+x^2).$$

14. Najděte $A \in \mathbf{R}$, aby na $(0, +\infty)$ platil vztah

$$\left(\log(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}) + \operatorname{arctg} x + \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right)' = A \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}.$$

15. Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následující funkce ve všech bodech, kde existuje.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$