

Zkušební témata
Vybrané partie z matematiky pro fyziky
NMAF006, LS 2009/10

1. Věta: X Banachův, $T \in L(X)$, že $\|T\| < 1$ nebo $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\| < \infty$ nebo $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j x\| < \infty$ pro všechna $x \in X$. Potom... Dokončete znění a předvedte hlavní myšlenku důkazu této věty.
2. Pro $T \in L(X)$ (X Banachův) sestavte tabulku 3×3 , dávající do souvislosti výroky „ T_λ je prostý resp. má spojitou inverzi“ a „ T_λ je na X , resp. má či nemá v X hustý obor hodnot“. Definujte bodové, residuální a spojitě spektrum.
3. Formulujte větu a lemma, které v předchozí tabulce „vyškrtávají dvě okýnka“. Větu nedokazujte, důkaz lemmatu naznačte.
4. Definujte pojem kompaktního operátoru, ukažte, jak bude pro kompaktní operátor vypadat tabulka pro T_λ , $\lambda \neq 0$, z bodu 2 výše. Tvar této tabulky podpořte nějakými tvrzeními, která však nemusíte dokazovat.
5. Napište, jak vypadá spektrum kompaktního operátoru. Sepište příslušná tvrzení, nemusíte je dokazovat.
6. Definujte duální zobrazení k danému lineárnímu omezenému zobrazení mezi Banachovými prostory, ukažte, že v Hilbertových prostorech vždy existuje jediné duální (adjungované, hermiteovsky adjungované) zobrazení.
7. Definujte, co je hermiteovský (samoadjungovaný) operátor na H a sepište vlastnosti spektra pro kompaktní hermiteovský (samoadjungovaný) operátor na H .
8. Formulujte Hilbert-Schmidtovu spektrální větu (tj. větu, obsahující rovnost $H = \Lambda \oplus \text{Ker } T$) a poodhalte strategii důkazu.
9. Formulujte pojem adjungovaného operátoru k (obecně neomezenému) lineárnímu operátoru $T : \mathcal{D}(T) \subset H \rightarrow H$; formulujte tvrzení o tom, kdy je $\mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset$.
10. Formulujte a vysvětlete pojmy symetrického a samoadjugovaného operátoru (a rozdíly mezi nimi). Formulujte pojem uzavřeného operátoru a větu o ekvivalenci tvrzení „ T má spojitou inverzi“.
11. Definujte lineární diferenciální výraz $\ell(y)$ řádu n a k němu adjungovaný výraz $\ell^*(y)$. Vysvětlete rozdíl mezi lineárním diferenciálním výrazem a lineárním diferenciálním operátorem.
12. Ukažte, že $\ell^*(y)$ je pro $\ell(y)$ jediný lineární diferenciální výraz, pro který $(\ell(y), z) = (y, \ell^*(z))$ pro všechna $y, z \in C_{\text{cpt}}^\infty(a, b)$.
13. Ukažte, že každý OG systém polynomů v prostoru $L^2_\rho(a, b)$ nutně splňuje rekurentní vzorec „se čtyřmi členy“.
14. Definujte hypergeometrickou řadu a Pochhammerův symbol. Ukažte, že řešení Gaussovy redukované rovnice lze nalézt ve tvaru hypergeometrické řady.