2. Základy spektrální analýzy

2.1. Motivace: řešení jedné ODR

Příklad. Uvažujme počáteční úlohu pro ODR

$$\begin{aligned} y'' + y &= f(x), \quad \text{na } (0,a), \quad a>0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $f \in C(\langle 0,a\rangle)$. Řešení této úlohy pro $f \equiv 0$ je $y = \cos x$, jak snadno zjistíme například metodou charakteristického polynomu. Pro nalezení jednoho (partikulárního) řešení rovnice s pravou stranou f můžeme použít např. metodu variace konstant.

Z tvaru $\quad y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$

dostaneme rovnice pro $c_1(x), c_2(x)$:

$$\begin{aligned} c_1' \cos x + c_2' \sin x &= 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x &= f(x) \end{aligned} \tag{2}$$

odkud plyne
$$c_1' = -f\cdot \sin x$$
$$c_2' = f\cdot\cos x$$

a tedy $\quad c_1(x) = -\int_0^x f(t)\sin t\,dt, \quad c_2(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,dt$ jsou jedna z řešení (2). *)

Dostáváme

$$y_p = \sin x \int_0^x f(t)\cos t\,dt - \cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt =$$

$$= \int_0^x f(t)\left(\sin x\cos t - \cos x \sin t\right) dt = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt,$$

---

*) Pozn: Mohli jsme samozřejmě zvolit pro c_1 resp. c_2 i jiné z primitivních funkcí k $-f(x)\sin x$ resp. $f(x)\cos x$, tato volba však způsobí, že y_p splňuje počáteční podmínky.

tedy celkově

$$y(x) = c_3 x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt. \qquad (3)$$

Dosazením se lze přesvědčit, že funkce y daná předpisem (3) je (a z teorie víme, že jediným) řešením úlohy (1).

<u>Poznámka</u>: Při dosazování (3) do (1) se může hodit následující lemma o derivování integrálu jak podle parametru, tak podle mezí:

<u>Lemma</u>. Buďte $a, b \in C^1((\alpha,\beta))$, $a((\alpha,\beta)) \subset (A,B)$, $b((\alpha,\beta)) \subset (A,B)$, $g \in C^1((\alpha,\beta)\times(A,B))$, a nechť funkce a, b, g a $\frac{\partial g}{\partial x}$ jsou omezené na svých definičních oborech. Potom:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt + g(b(x))\cdot b'(x) - g(a(x))\cdot a'(x), \qquad (4)$$

$x \in (\alpha,\beta)$.

Uvažujme nyní modifikaci úlohy (1), a sice

$$\begin{aligned} y'' + y &= f(x)\,y(x) \quad \text{na } (0,a), \quad a > 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned} \qquad (5)$$

na pravé straně rovnice máme tedy ve zdrojovém členu jakousi „zpětnou vazbu".

Jsouce na základě analogie si troufneme vyslovit následující hypotézu:

Pokud existuje funkce $y \in C(\langle 0,a\rangle)$, která splňuje vztah

$$y(x) = c_3 x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,y(t)\,dt, \qquad (6)$$

pak je tato funkce třídy $C^2(\langle 0,a\rangle)$ a řeší úlohu (5).
Ověříme tuto hypotézu s využitím lemmatu z předchozí strany.
Především platí, že pokud je $y\in C(\langle 0,a\rangle)$, je integrand v (6) spojitý, tedy je $y\in C^1(\langle 0,a\rangle)$, a máme

$$y'(x) = -\sin x + \int_0^x f(t)\cos(x-t)\,y(t)\,dt + 0, \qquad (7)$$

odtud stejnou úvahou máme $y'\in C^1(\langle 0,a\rangle)$, tedy $y\in C^2(\langle 0,a\rangle)$, a

$$y''(x) = -\cos x - \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,y(t)\,dt + f(x)y(x). \qquad (8)$$

Z (6)-(8) dostaneme $y''+y = f(x)y(x)$, stejně jako $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Ověřili jsme tedy, že

> Pokud existuje $y\in C(\langle 0,a\rangle)$ taková, že platí (6), je tato funkce klasickým řešením úlohy (5). (9)

Zatím jsme úlohu (6) nevyřešili, pouze jsme ji přeformulovali. Uvidíme však, že vhodným pohledem na toto přeformulování budeme schopni otázku existence (i jednoznačnosti) řešení odpovědět.

Píšeme

$$y(x) = \underbrace{\cos x}_{=\,u(x)} + \int_0^x \underbrace{\sin(x-t)f(t)}_{K(x,t)\ \dots\ \text{integrační jádro}} y(t)\,dt$$

tj.

$$y(x) = u(x) + \int_0^x K(x,t)\,y(t)\,dt \qquad (10)$$

což je přeformulování úlohy (6) na obecnější integrální rovnici (10).

Využijeme však ještě obecnější formulaci. Označme

$$Ty(x) := \int_0^x K(x,t)\, y(t)\, dt = \int_0^x \sin(x-t) f(t)\, y(t)\, dt, \qquad (11)$$

kde $T: C(\langle 0,a\rangle) \to C(\langle 0,a\rangle)$ je (evidentně) lineární operátor. Úlohu (6) resp. (10) tak lze chápat jako rovnici

$$y = u + Ty \qquad (12)$$

na Banachově prostoru $C(\langle 0,a\rangle)$. (12) můžeme psát také

$$(Id - T)y = u \quad , \text{ kde } Id \text{ je identický operátor na}$$

$C(\langle 0,a\rangle)$, nebo (myšleno zatím zcela formálně, protože nevíme, zda něco jako „inverzní operátor k $Id - T$" existuje)

$$y = (Id - T)^{-1} u . \qquad (13)$$

Formulace (13) nás dovedla až k těmto otázkám:

- Jaké jsou vlastnosti operátoru T z (11)?
- Za jakých podmínek existuje operátor inverzní k $Id - T$, a jaké má vlastnosti?
- Je y „definované" pomocí (13) řešením naší úlohy?

Nejprve odpovíme na první otázku: T je lineární a omezený, tedy spojitý operátor na $C(\langle 0,a\rangle)$, tedy $T \in \mathcal{L}(C(\langle 0,a\rangle))$.

Důkaz: Linearita je zřejmá, pro omezenost určeme nejprve

$$\|Ty\|_\infty = \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} \left| \int_0^x \sin(x-t) f(t)\, y(t)\, dt \right| \le$$

$$\le \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} \int_0^x |f(t)|\cdot|y(t)|\, dt \le a \cdot \|f\|_\infty \|y\|_\infty ,$$

kde $\|y\|_\infty \equiv \|y\|_{C(\langle 0,a\rangle)} = \sup_{\langle 0,a\rangle} |y(x)|$.

Protože $$\|T\|_{\mathcal{L}(C(\langle 0,a\rangle))} = \sup_{\|y\|_\infty \le 1} \|Ty\|_\infty \le \sup_{\|y\|_\infty \le 1} a\|f\|_\infty \|y\|_\infty \le a\|f\|_\infty < \infty, \qquad (13b)$$
jde tedy (pokud $\langle 0,a\rangle$ je omezený interval) o omezený operátor. $\boxtimes$

Pro odpověď na další otázky máme připravenou následující větu. Všimněte si, že její velká abstrakce je pouze zdánlivá: v podstatě jde o popis naší úlohy v operátorové řeči.

$\boxed{\text{Věta 1}}$ Buď X Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$ takový, že je splněna alespoň jedna z následujících tří podmínek

(a) $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$,

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$,

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j y\|_X < \infty \quad \forall y \in X$,

kde T^j je tzv. iterovaný operátor, $T^0 \equiv Id$, $T^{j+1}y = T(T^j y)$.
Potom

1) $\forall u \in X$ existuje jediné $y \in X$ takové, že $(Id - T)y = u$.

2) Definujeme-li zobrazení "$u \mapsto y$" z předchozího bodu, a označíme-li jej $(Id-T)^{-1}$, platí:
$$(Id-T)^{-1}(Id-T) = (Id-T)(Id-T)^{-1} = Id,$$
a navíc
$$(Id-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \quad \Big(:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} T^j\Big) \qquad (14)$$
ve smyslu konvergence v $\mathcal{L}(X)$.

Pozn.:

1. Řadě (14) se říká von Neumannova řada operátoru T.

2. V následujícím ukážeme, že (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c), že jde tedy o řetězec podmínek.

Platí

$$\|T^2 y\|_X = \|T(Ty)\|_X \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)} \|Ty\|_X \leq \|T\|^2_{\mathcal{L}(X)} \|y\|_X .$$

Odtud $\|T^2\| = \sup\limits_{\|y\|_X \leq 1} \|T^2 y\|_X \leq \|T\|^2$ a indukcí snadno

$$\|T^j\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T\|^j_{\mathcal{L}(X)} . \tag{15}$$

Pokud tedy platí (a), je $\sum\limits_{j=0}^{n} \|T^j\| \leq \sum\limits_{j=0}^{n} \|T\|^j \leq \sum\limits_{j=0}^{\infty} \|T\|^j < \infty$, tedy platí (b). Pokud platí (b), je

$$\sum_{j=0}^{n} \|T^j y\| \leq \|y\| \sum_{j=0}^{n} \|T^j\| , \quad \text{tedy platí (c).}$$

Skutečně tedy (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) a tudíž stačí ukázat, že podmínka (c) implikuje tvrzení věty.

3. Ještě než větu dokážeme, přesvědčme se, že operátor T, definovaný v (11), splňuje její předpoklady: $\mathcal{C}(\langle 0,a\rangle)$ je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\langle 0,a\rangle))$. V (13b) jsme navíc ukázali, že

$$\|T\|_{\mathcal{L}} \leq a \|f\|_\infty .$$

Odtud ihned dostáváme, že pro každé $f \in \mathcal{C}(\langle 0,b\rangle)$ existuje takové $a \in (0,b)$, že $\|T\| < 1$. Z tvrzení věty pak dostaneme

existenci a jednoznačnost řešení úlohy (6), tedy i (5), na příslušně zkráceném intervalu $\langle 0,a\rangle$ tak, aby $a\|f\|_\infty < 1$.
Toto je typický představitel tzv. vět o lokální existenci řešení diferenciální rovnice.
Nevýhoda tohoto tvrzení spočívá v tom, že tento interval existence řešení závisí na velikosti pravé strany f.

Toto pozorování nám zároveň bude sloužit i jako poučení: ukážeme nyní, že T splňuje podmínku (c) bez jakýchkoli požadavků na velikost a; jen uděláme naše odhady jemněji:
je

$$|Ty(x)| \leq \int_0^x |f(t)||y(t)|\,dt \leq x\|f\|_\infty \|y\|_\infty \quad \Big(\text{neděláme } \sup_{x\in\langle 0,a\rangle}\Big)$$

dále

$$|T^2 y(x)| \leq \int_0^x |f(t)||Ty(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty^2 \|y\|_\infty \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}\|f\|_\infty^2 \|y\|_\infty,$$

odkud dostaneme indukcí

$$|T^j y(x)| \leq \frac{x^j}{j!}\|f\|_\infty^j \|y\|_\infty.$$

Až nyní provedeme $\sup\limits_{x\in\langle 0,a\rangle}$ a dostaneme $\|T^j y\| \leq \frac{a^j}{j!}\|f\|_\infty^j \|y\|_\infty$

odkud

$$\sum_{j=0}^\infty \|T^j y\| \leq \exp(a\|f\|_\infty)\cdot \|y\|_\infty < \infty \quad \forall y \in C(\langle 0,a\rangle).$$

Podmínka (c) je tedy splněna a my jsme došli k závěru, že pokud dokážeme Větu 1, ukázali jsme zároveň existenci a jednoznačnost (klasického) řešení úlohy (5) pro libovolný (ale omezený) interval $\langle 0,a\rangle$, a pro libovolnou $f\in C(\langle 0,a\rangle)$.

Důkaz Věty 1.

Podle bodu (2) předchozí poznámky stačí ukázat, že tvrzení věty plyne z předpokladu (c).

Definujme následující posloupnost prvků $y_n \in X$ (tzv. „iterační proces").

$$y_0 \in X \text{ libovolný}$$
$$y_{n+1} := u + T y_n \, .$$

Máme
$$y_1 = u + T y_0$$
$$y_2 = u + T y_1 = u + Tu + T^2 y_0 \, ,$$
indukcí snadno plyne

$$y_n = \sum_{j=0}^{n-1} T^j u + T^n y_0 \, . \tag{16}$$

Ukážeme, že posloupnost y_n má v X limitu. Protože X je Banachův, a tedy úplný, stačí pro konvergenci y_n ukázat, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$, uvažujme $n > m$ a počítejme:

$$y_n - y_m = \sum_{j=m}^{n-1} T^j u + T^n y_0 - T^m y_0 \, ,$$

tedy

$$\|y_n - y_m\| \leq \sum_{j=m}^{n-1} \|T^j u\| + \|T^n y_0\| + \|T^m y_0\| .$$

Protože platí podmínka (c), je první člen menší než ε pro dostatečně velká $n > m$. Stejně tak členy $\|T^n y_0\|$, $\|T^m y_0\|$ jsou (jako n-tý resp. m-tý člen konvergentní řady tvaru (c)) menší než ε pro dostatečně velká n, m.

Posloupnost $\{y_n\}$ je tedy cauchyovská v Banachově prostoru X, proto je konvergentní v X, tedy existuje $y \in X$ takové, že

$y_n \xrightarrow{X} y$. Protože T je spojitý, je $Ty_n \xrightarrow{X} Ty$, tedy platí i

$$\begin{array}{ccccc} y_{n+1} & = & u & + & Ty_n \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ y & = & u & + & Ty \end{array}$$

a y je řešením rovnice $y = u + Ty$ (pro libovolné $u \in X$).
Ukažme, že toto řešení je jediné. Nechť tedy jsou dvě, y a z, tedy nechť platí

$$y = u + Ty$$
$$z = u + Tz$$

Odečtením těchto rovnic a označením $w = y - z$ získáme vztah

$$w = Tw.$$

Odtud ovšem indukcí plyne $w = Tw = T^2 w = \dots = T^j w \ \forall j \in \mathbb{N}$.
Tedy $\|w\| = \|T^j w\| \ \forall j \in \mathbb{N}$. Řada $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j w\|$ je ovšem konvergentní řada typu (c) tedy

$$\|w\| = \lim_{j \to \infty} \|T^j w\| = 0,$$ odkud $w = 0$,

a tedy $y = z$.
Úloha $y = u + Ty$ má tedy v X právě jedno řešení.

Zobrazení $u \mapsto y$ je tedy dobře definované zobrazení z X do X.
Označme je $(Id - T)^{-1}$.

Z (15) dostaneme

$$\begin{array}{ccccc} y_n & = & \sum_{j=0}^{n-1} T^j u & + & T^n y_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y & = & \sum_{j=0}^{\infty} T^j u & + & 0 \end{array}$$

a z jednoznačnosti y tedy $(Id - T)^{-1} u = \sum_{j=0}^{\infty} T^j u$.

Konečně, označme

$$S_N := \sum_{j=0}^{N} T^j .$$

Pak

$$S_N \circ (Id - T) = \sum_{j=0}^{N} T^j - \sum_{j=1}^{N+1} T^j = T^0 - T^{N+1} = Id - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{T^{N+1}}$$

a podobně pro $(Id - T)\circ S_N$.

$\boxtimes$

Př. Uvažujme

$$y'' + y = x^2 y$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 0$$

Úloha má na libovolném $\langle 0, a\rangle$ jediné řešení (podle předch. teorie). Můžete ověřit, že funkce $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ je tímto řešením.

Díky předchozímu však také víme, že toto řešení je možné získat pomocí iterací (tj. lze se k němu libovolně přiblížit). Uvažujte $y_0 \equiv 1$ a najděte prvních pár iterací. Zdá se vám, že konvergují k $e^{-\frac{x^2}{2}}$? Určitě z toho plyne nějaké zajímavé poučení. :-)