Zkušební témata

Vybrané partie z matematiky pro fyziky

NMAF006, LS 2010/11

1. Věta: X Banachův, $T \in L(X)$, že platí: buď $\|T\| < 1$ nebo $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\| < \infty$ nebo $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j x\| < \infty$ pro všechna $x \in X$. Potom... Dokončete znění a předveďte hlavní myšlenku důkazu této věty.

2. Pro $T \in L(X)$ (X Banachův) sestavte tabulku 3×3, dávající do souvislosti výroky „T_λ je prostý resp. má spojitou inverzi“ a „T_λ je na X, resp. má či nemá v X hustý obor hodnot“. Definujte bodové, residuální a spojité spektrum.

3. Formulujte větu a lemma, které v předchozí tabulce „vyškrtávají dvě okýnka“. Větu nedokazujte, důkaz lemmatu naznačte.

4. Definujte pojem kompaktního operátoru, ukažte, jak bude pro kompaktní operátor vypadat tabulka pro T_λ, $\lambda \neq 0$, z bodu 2 výše. Tvar této tabulky podpořte nějakými tvrzeními, která však nemusíte dokazovat.

5. Napište, jak vypadá spektrum kompaktního operátoru. Sepište příslušná tvrzení, nemusíte je dokazovat.

6. Definujte duální zobrazení k danému lineárnímu omezemu zobrazení mezi Banachovými prostory, ukažte, že v Hilberových prostorech vždy existuje jediné duální (adjungované, hermiteovsky adjungované) zobrazení.

7. Definujte, co je hermiteovský (samoadjungovaný) operátor na H a sepište vlastnosti spektra pro kompaktní hermiteovský (samoadjungovaný) operátor na H.

8. Formulujte Hilbert-Schmidtovu spektrální větu (tj. větu, obsahující rovnost $H = \Lambda \oplus \operatorname{Ker} T$) a poodhalte strategii důkazu.

9. Formulujte pojem adjungovaného operátoru k (obecně neomezenému) lineárnímu operátoru $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$; formulujte tvrzení o tom, kdy je $\mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset$.

10. Formulujte a vysvětlete pojmy symetrického a samoadjugovaného operátoru (a rozdíly mezi nimi). Formulujte pojem uzavřeného operátoru a větu o ekvivalenci tvrzení „T má spojitou inverzi“.

11. Definujte lineární diferenciální výraz $\ell(y)$ řádu n a k němu adjungovaný výraz $\ell^*(y)$. Vysvětlete rozdíl mezi lineárním diferenciálním výrazem a lineárním diferenciálním operátorem.

12. Ukažte, že $\ell^*(y)$ je pro $\ell(y)$ jediný lineární diferenciální výraz, pro který $(\ell(y), z) = (y, \ell^*(z))$ pro všechna $y, z \in \mathcal{C}^{\infty}_{\mathrm{cpt}}(a, b)$.

13. Ukažte, že každý OG systém polynomů v prostoru L^2_ρ(a,b) nutně splňuje rekurentní vzorec „se čtyřmi členy“.

14. Definujte hypergeometrickou řadu a Pochhammerův symbol. Ukažte, že řešení Gaussovy redukované rovnice lze nalézt ve tvaru hypergeometrické řady.

15. Ze znalosti rekurentního vzorce pro Laguerrovy polynomy spočtěte jejich normu a nalezněte jejich vytvořující funkci v příslušném L^2-prostoru s vahou.

16. Definujte okrajovou úlohu pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici na kompaktním intervalu. Převeďte tuto úlohu na úlohu operátorového počtu. Definujte pojem Greenovy funkce a zformulujte větu o její existenci, příp. naznačte důkaz.