Cvičení z PDR 1 (NDIR044)

Mirko Rokyta
KMA MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

Obsah

1 Poznámky o plošné integraci v $\mathbb{R}^3$

1.1 Plošný integrál 1. druhu v $\mathbb{R}^3$

Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha, tj. plocha parametrizovaná zobrazením

$$\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 , \qquad \Omega \text{ otevřená}, \qquad \vec{\varphi}(\Omega) = S , \qquad \vec{\varphi} : \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi_1(u,v) , \\ y = \varphi_2(u,v) , \\ z = \varphi_3(u,v) , \end{array} \right. \tag{1.1}$$

přičemž $\vec{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\vec{\varphi}$ je prosté na Ω, $\vec{\varphi}^{\,-1} \in \mathcal{C}(S)$, a[1]

$$\text{hodnost matice } \left(\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u,v)} \right) = 2 \qquad \forall (u,v) \in \Omega . \tag{1.2}$$

Podmínka (1.2) říká, že vektory[2] $\vec{\varphi}_u$ a $\vec{\varphi}_v$, které mají geometrický význam tečných vektorů k ploše S v bodě $\vec{\varphi}(u,v)$, jsou lineárně nezávislé pro všechna $(u,v) \in \Omega$, a tvoří tedy bázi dvojrozměrného tečného prostoru k S v bodě[3] $\vec{\varphi}(u,v)$. Vektorový součin $\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v$ má směr normálového vektoru k ploše S a jeho velikost $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|$ je číselně rovna plošnému obsahu rovnoběžníka se stranami $\vec{\varphi}_u$ a $\vec{\varphi}_v$. Definujme na základě této heuristické úvahy tzv. *plošný integrál 1. druhu* z funkce $f : S \to \mathbb{R}$ přes plochu S takto:

$$\int_S f \, dS := \int_\Omega f(\vec{\varphi}(u,v)) \, \|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|(u,v) \, du \, dv , \tag{1.3}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

Tato definice vychází z intuitivní představy objemu tělesa „mezi grafem funkce f a plochou S“. Skutečně lze ukázat, že hodnota integrálu $\int_S \rho \, dS$ je číselně rovna „hmotnosti plochy S s hustotou ρ“, a podobně hodnota integrálu $\int_S 1 \, dS$ je číselně rovna dvourozměrné (Haussdorfově) míře plochy S. K ověření tohoto druhého faktu bychom samozřejmě nejprve museli definovat „křivou“ (tedy Hausdorffovu) dvourozměrnou míru na S a vybudovat Lebesgueův integrál na S vůči této míře.

Korektnost definice (1.3): lze ukázat, že číselná hodnota výrazu na pravé straně (1.3) nezávisí na konkrétní volbě parametrizace (1.1)–(1.2) a plošný integrál 1. druhu je tedy definován korektně. Zformulujte toto tvrzení přesně a dokažte je.

Cvičení 1.1 Jiný způsob výpočtu tzv. metrického členu $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|$ se opírá o následující identitu (determinant vpravo se nazývá *Grammův*):

$$\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|^2 = \det \left| \begin{array}{cc} \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_u & \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_v \\ \vec{\varphi}_v \cdot \vec{\varphi}_u & \vec{\varphi}_v \cdot \vec{\varphi}_v \end{array} \right| . \tag{1.4}$$

Dokažte tuto identitu.

Cvičení 1.2 Spočtěte povrch plochy, která je popsána parametrizací:

$$\vec{\varphi} : \left\{ \begin{array}{l} x = (R + r\cos u)\cos v , \\ y = (R + r\cos u)\sin v , \\ z = r \sin u , \end{array} \right. \qquad u, v \in (0, 2\pi) , \qquad 0 < r < R . \tag{1.5}$$

O jakou jde plochu? Řešení: Jde o torus (pneumatiku, anuloid, …) a povrch by vám měl vyjít $4\pi^2 rR = 2\pi r \cdot 2\pi R$. To je docela hezký výsledek, ne? ☺

Cvičení 1.3 Parametrizujte kouli v $\mathbb{R}^3$ a spočtěte její povrch. Řešení: Kouli lze parametrizovat například pomocí zobrazení $\vec{\varphi}$: $(x = r\cos u \cos v,\ y = r \sin u \cos v,\ z = r \sin v)$, $v \in (-\pi/2, \pi/2)$, $u \in (0, 2\pi)$, $r > 0$ pevné. Dostaneme postupně $\vec{\varphi}_u = (-r\sin u \cos v, r\cos u \cos v, 0)$, $\vec{\varphi}_v = (-r\cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r\cos v)$, $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\| = r^2 \cos v$, načež

$$\int_S 1 \, dS = 2\pi \cdot r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv = 4\pi r^2 .$$

[1] Rozmyslete si, že podmínka $\vec{\varphi}^{\,-1} \in \mathcal{C}(S)$ znamená, že se plocha S „nedotýká sama sebe“.

[2] Označujeme $\vec{\varphi}_u \equiv \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right)$ a podobně pro parciální derivaci podle v.

[3] Plocha S je tedy „všude dvourozměrná“, její dimenze „nikde nedegeneruje“.

Cvičení 1.4 Ukažte: je-li plocha S zadána explicitně, jako graf hladké funkce $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S$, tedy pokud je $S := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\; z = \psi(x, y) \,;\; (x, y) \in \Omega\}$, pak

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega f(x, y, \psi(x, y))\, \sqrt{1 + |\nabla\psi|^2}\, dx\, dy\,. \tag{1.6}$$

Návod: Z explicitního zadání plochy pomocí $z = \psi(x, y)$ lze vyrobit parametrizaci $\vec{\varphi}$: $(x = x,\ y = y,\ z = \psi(x, y))$, $(x, y) \in \Omega$. Zbytek plyne přímým výpočtem.

1.2 Plošný integrál 2. druhu v $\mathbb{R}^3$

Definujme tzv. *plošný integrál 2. druhu* z vektorové funkce $\vec{T} : S \to \mathbb{R}^3$ přes *orientovanou* plochu S takto:

$$\int_S \vec{T}\, d\vec{S} := \int_\Omega \vec{T}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)\,(u, v)\, du\, dv\,, \tag{1.7}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

Intuitivně jde o situaci, kdy se „integruje průmět vektorové funkce $\vec{T}$ do normálového směru $\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v$“ tedy jde o práci vykonanou silovým polem $\vec{T}$ přes plochu S.
Korektnost definice (1.7) plyne z následujícího:

Cvičení 1.5 (a) Položme[4] $\vec{\nu} := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$. Pak $\vec{\nu}$ má geometrický význam jednotkového normálového vektoru k ploše S v bodě $\vec{\varphi}(u, v)$. Plocha S je tímto vektorem orientována. Ukažte s využitím definice $\vec{\nu}$, a definic (1.3) a (1.7), že platí následující vztahy mezi integrály prvního a druhého druhu:

$$\int_S \vec{T}\, d\vec{S} = \int_S \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, dS\,, \qquad \int_S f\, dS = \int_S f\vec{\nu}\, d\vec{S}\,, \tag{1.8}$$

kde f resp. $\vec{T}$ mají stejný význam jako v (1.3) resp. (1.7). Na základě těchto rovností se také někdy formálně píše $d\vec{S} = \vec{\nu}\, dS$. Také můžete někdy spatřit formální zápis $d\vec{S} = (dy\, dz, dz\, dx, dx\, dy)$, pak pro $\vec{T} = (P, Q, R)$ lze psát

$$\int_S \vec{T}\, d\vec{S} = \int_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy\,. \tag{1.9}$$

Teď už možná budete rozumět např. zápisu $\int_S x^2\, dy\, dz + z^2\, dx\, dy$ správně: jde o plošný integrál 2. druhu $\int_S \vec{T}\, d\vec{S}$, kde $\vec{T} = (x^2, 0, z^2)$.

(b) Z prvního ze vztahů (1.8) odvoďte, že plošný integrál druhého druhu je definován korektně v následujícím slova smyslu: jsou-li $\vec{\varphi}$ a $\vec{\psi}$ dvě parametrizace plochy S, pak se hodnoty integrálu $\int_S \vec{T}\, d\vec{S}$, při jejichž výpočtu používáme buď parametrizaci $\vec{\varphi}$ nebo parametrizaci $\vec{\psi}$, liší maximálně o znaménko, to podle toho, jestli se výrazy $\frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$ a $\frac{\vec{\psi}_u \times \vec{\psi}_v}{\|\vec{\psi}_u \times \vec{\psi}_v\|}$ liší v odpovídajících bodech o znaménko nebo ne (v obou případech jde o jednotkové vektory normály k S, jsou to tedy vektory buď stejné nebo opačně orientované). Uvědomte si, že parametrizace tak definuje orientaci plochy.

[4] Uvědomte si, že z (1.2) vyplývá $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\| \neq 0$.

2 Poznámky o plošné integraci v $\mathbb{R}^d$

2.1 Plošný integrál 1. a 2. druhu v $\mathbb{R}^d$

Nejprve dvě poznámky: (i) budeme postupovat analogicky jako ve třech dimenzích, pokud si to uvědomíte, pomůže to možná vaší představě; (ii) zmíníme zde plošný integrál pouze přes plochu S dimenze $(d-1)$ v $\mathbb{R}^d$. Taková plocha bude mít v každém svém bodě opět pouze „jeden" normálový vektor (přesněji prostor normálových vektorů bude mít v každém bodě S dimenzi 1). Složitější případy integrací přes plochy dimenze k v $\mathbb{R}^d$, $1 < k < d-1$, zde nebudeme diskutovat.
Buď $S \subset \mathbb{R}^d$ hladká $(d-1)$-plocha, tj. plocha parametrizovaná zobrazením

$$\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^d\,, \qquad \Omega \text{ otevřená}, \qquad \vec{\varphi}(\Omega) = S\,, \qquad \vec{\varphi} : \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_{d-1})\,, \\ x_2 = \varphi_2(u_1, \ldots, u_{d-1})\,, \\ \quad \cdots \\ x_d = \varphi_d(u_1, \ldots, u_{d-1})\,, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

přičemž $\vec{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\vec{\varphi}$ je prosté na Ω, $\vec{\varphi}^{\,-1} \in \mathcal{C}(S)$, a

$$\text{hodnost matice } \left(\frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_d)}{D(u_1, \ldots, u_{d-1})} \right) = d-1 \qquad \forall u \in \Omega\,. \tag{2.2}$$

Podmínka (2.2) opět říká, že vektory $\vec{\varphi}_{u_1}, \ldots, \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$, které mají geometrický význam tečných vektorů k ploše S v bodě $\vec{\varphi}(u)$, jsou lineárně nezávislé pro všechna $u \in \Omega$, a tvoří tedy bázi $(d-1)$-rozměrného tečného prostoru k S v bodě $\vec{\varphi}(u)$. Vektorový součin[5] $\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$ má směr normálového vektoru k ploše S a jeho velikost $\|\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}\|$ je číselně rovna objemu rovnoběžnostěnu s hranami $\vec{\varphi}_{u_1}, \ldots, \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$. Definujeme tedy *plošný integrál 1. druhu* z funkce $f : S \to \mathbb{R}$ přes plochu S takto:

$$\int_S f\, dS := \int_\Omega f(\vec{\varphi}(u))\, \|\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}\|(u)\, du\,, \tag{2.3}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu), a dále definujeme *plošný integrál 2. druhu* z vektorové funkce $\vec{T} : S \to \mathbb{R}^d$ přes *orientovanou* plochu S takto:

$$\int_S \vec{T}\, d\vec{S} := \int_\Omega \vec{T}(\vec{\varphi}(u)) \cdot \left(\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}} \right)(u)\, du\,, \tag{2.4}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

Cvičení 2.1 (a) Označíme-li J matici z (2.2),

$$J(u) := \left(\frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_d)}{D(u_1, \ldots, u_{d-1})} \right)\,, \qquad u \in \Omega\,, \tag{2.5}$$

pak platí zobecnění Grammova vztahu (1.4)

$$\|\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}\|^2 = \det\left(J \cdot J^T \right). \tag{2.6}$$

Dokažte tuto identitu.

(b) Napište a dokažte vztahy, obdobné vztahům (1.8). Vyslovte tvrzení o korektnosti definic (2.3) a (2.4). Diskutujte pojem orientace plochy S dimenze $(d-1)$ v $\mathbb{R}^d$.

[5] Vektorový součin $\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$ lze definovat například tak, že provedeme formální rozvoj determinantu

$$\det \begin{vmatrix} \vec{\varphi}_{u_1} \\ \cdots \\ \vec{\varphi}_{u_{d-1}} \\ e_1,\ \ldots,\ e_d \end{vmatrix}$$

podle posledního řádku, načež člen stojící u e_k považujeme za k-tou souřadnici vektorového součinu $\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$.

3 Odvození některých základních PDR

3.1 Odvození rovnice vedení tepla

Odvození rovnice vedení tepla - viz rukopisné poznámky k přednášce, str. 13.

3.2 Odvození rovnice minimální plochy

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast s hladkou hranicí $\partial\Omega$. Hledáme funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ takovou, že je na hranici $\partial\Omega$ rovna předepsané (hladké) funkci φ a přitom plocha grafu (tj. dvourozměrná míra množiny $\{y = u(x)\,;\, x \in \Omega\,,\, u = \varphi \text{ na } \partial\Omega\}$) je minimální. Odvoďte rovnici, kterou musí nutně hladké (tak hladké, jak je potřeba) u v oblasti Ω splňovat (tzv. rovnici minimální plochy):

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0\,. \tag{3.7}$$

<u>Návod:</u> Vyjděte z toho, že velikost uvedené plochy dané grafem u je dána jako

$$\Phi(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx$$

a jde tedy o minimalizaci funkcionálu Φ na prostoru $\{u(x)$ „dostatečně hladká“ $;\, u = \varphi$ na $\partial\Omega\}$. Nutnou podmínkou pro to je, aby

$$\frac{d}{ds}\Phi(u+sv)\bigg|_{s=0} = 0\,, \tag{3.8}$$

kde $v(x)$ je libovolná hladká funkce na uzávěru Ω taková, že $v = 0$ na $\partial\Omega$.[6] Spočtěte tedy (3.8) (vyjde vám, doufám, $\int_\Omega \frac{\nabla u\cdot\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,dx = 0$), dále použijte jednu z Gauss-Green-Ostrogradského formulí a odvoďte odtud

$$\int_\Omega \operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\Big)\,v\,dx = 0.$$

Konečně se zamyslete nad tím, že pokud toto má platit pro všechna v výše zmíněných vlastností, musí pro dostatečně hladká u platit (3.7) ve všech bodech. Proveďte všechny kroky podrobně!

[6] Znalci variačního počtu jistě postřehli, že na levé straně výrazu (3.8) počítáme tzv. Gâteauxovu derivaci $\delta\Phi(u;v)$, tj „derivaci Φ v bodě u a směru v“. Fyzici zobrazení $\delta\Phi(u;\cdot)$ někdy říkají „variace Φ“. Jde o zobecnění klasického pojmu derivace ve směru.

4 Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^m$

1. Dokažte multinomickou větu:

   Je-li $k, m \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, pak

$$(x_1 + \cdots + x_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}, \tag{4.9}$$

   kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ je multiindex a $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ jeho výška. Návod: Postupujte indukcí dle m a použijte binomickou větu (kterou považujeme za dokázanou) na výraz $\big((x_1 + \cdots + x_m) + x_{m+1}\big)^k$.

2. Spočtěte hodnotu Gaussova integrálu

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2}\, dx = \pi^{\frac{m}{2}}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

   Návod:

   (a) Nejprve spočteme onu hodnotu pro $m = 1$. Označíme $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ a dále použijeme následující trik (předávaný od jisté generace z generace na generaci): spočteme I^2 převodem na dvojnou integraci přes $\mathbb{R}^2$, a dále užijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Kdo si ještě nevzpomněl, pak zde má podrobnější návod:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\varphi\, dr \overset{[r^2=t]}{=} \frac{2\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \pi,$$

   tedy $I = \sqrt{\pi}$ což dává výsledek pro $m = 1$. Z důvodů symetrie dále máme

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.11}$$

   (b) Pro $m = 2, 3, \dots$ uvažte, že

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}\cdots e^{-x_m^2}\, dx_1 \dots dx_m = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^m = (\sqrt{\pi})^m \quad \text{c.b.d.}$$

3. Definujeme tzv. gamma-funkci předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx. \tag{4.12}$$

   Ukažte:

   (a) $\Gamma(s) \in \mathbb{R}$ pro všechna $s > 0$. Návod: Studujte chování integrálu (4.12) v okolí nuly a v okolí ∞.

   (b) $\Gamma(s) \in \mathcal{C}^{\infty}\big((0,\infty)\big)$. Návod: Integrál (4.12) je integrál s parametrem a na to má pan Lebesgue techniku integrabilních majorant – pomocí nich ukažte, že Γ i všechny její derivace jsou spojité.

   (c) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pro všechna $s > 0$. Návod: Použijte per partes v integrálu pro $\Gamma(s+1)$.

   (d) Pro $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!$. Návod: $\Gamma(1)$ spočtěte přímo z (4.12), a dále použijte vztah $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ z předchozího bodu.

   (e) Platí také

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2s-1}\, dy, \qquad s > 0. \tag{4.13}$$

   Návod: Substituce $x = y^2$.

(f) Platí $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Návod: Dosaďte $s = \frac{1}{2}$ do (4.13) a užijte (4.11). Odvoďte dále vyjádření Γ-funkce ve všech bodech typu $n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, s použitím vlastnosti (c). Mělo by vám vyjít

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}\,. \tag{4.14}$$

V posledním kroku jsme zlomek rozšířili součinem $2n(2n-2)\cdots 2$, z kterého jsme pak ve jmenovateli vytknuli „všechny dvojky".

4. Pomocí sférických souřadnic v $\mathbb{R}^m$ spočtěte (pro PDR důležitý) povrch jednotkové sféry v dimenzi m, který se značívá $\varkappa_m$ a má hodnotu

$$\varkappa_m = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)}\,. \tag{4.15}$$

Návod:

- Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^m$ je možno zavést mnoha způsoby, jeden z nich je tento:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\,\cos\vartheta_1\,,\\
x_2 &= r\,\sin\vartheta_1\,\cos\vartheta_2\,,\\
x_3 &= r\,\sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3\,,\\
&\cdots\\
x_{m-1} &= r\,\sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\,\cos\vartheta_{m-1}\,,\\
x_m &= r\,\sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\,\sin\vartheta_{m-1}\,,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

  kde $r \in (0,\infty)$, $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{m-2} \in (0,\pi)$, $\vartheta_{m-1} \in (0,2\pi)$. Jakobián této substituce je

$$J_m = r^{m-1}\,\underbrace{\sin^{m-2}\vartheta_1\,\sin^{m-3}\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}}_{=:\widetilde{J}_m} > 0\,. \tag{4.17}$$

  Zkuste si dokázat (4.17) např. indukcí podle m. Udělejte si geometrickou představu o tom, jak se induktivně vytvářejí souřadnice (4.16). Úplně bude stačit, když si napíšete a porovnáte tyto souřadnice ve 2 a 3 dimenzích.

- Uvědomme si ještě, že pokud budeme uvažovat r v (4.16) rovno konstantní jedničce a necháme jinak všechny úhly probíhat své meze, „popíšeme" tím přesně jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^m$. Tedy je

$$\varkappa_m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\widetilde{J}_m\,d\vartheta_1...d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1}\,, \tag{4.18}$$

  plocha jednotkové sféry v dimenzi m. Tím jsme ji ještě nespočetli, jen popsali.

- Hlavní trik výpočtu $\varkappa_m$ spočívá v tom, že integrál z (4.10) se spočte znovu a jinak, tentokrát pomocí výše uvedených sférických souřadnic, a oba výsledky se porovnají. Máme

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2}\,dx = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{\pi} e^{-r^2}r^{m-1}\widetilde{J}_m\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1}\,dr \overset{(4.18)}{=} \varkappa_m\int\limits_0^\infty e^{-r^2}r^{m-1}\,dr\,. \tag{4.19}$$

  Ale na konci řádku (4.19) s ulehčením spatříme $\int_0^\infty e^{-r^2}r^{m-1}\,dr = \frac{1}{2}\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)$ podle (4.12). Když navíc integrál vlevo v (4.19) nahradíme jeho hodnotou, kterou jsme spočetli v (4.10), dostaneme rovnost

$$\pi^{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2}\,\varkappa_m\,\Gamma\Big(\frac{m}{2}\Big)$$

  z které hned plyne (4.15).

5. S využitím (4.15) spočtěte objem $V_m(R)$ a povrch $S_m(R)$ koule v $\mathbb{R}^m$ s poloměrem R. Vyjádřete $\varkappa_m$, $V_m(R)$ a $S_m(R)$ zvlášť pro sudá a zvlášť pro lichá m. Návod:

- Jste již zkušení s integrováním ve sférických m-dimenzionálních souřadnicích, proto vás tedy nepřekvapí, že

$$V_m(R) = \int\limits_{|x|\le R}\!\!...\!\int 1\,dx \overset{(4.16)}{=} \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{\pi} r^{m-1}\widetilde{J}_m\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1}\,dr \overset{(4.18)}{=} \varkappa_m\frac{R^m}{m}\,. \tag{4.20}$$

Podobně

$$S_m(R) = \int\limits_{|x|=R}\!\!\dots\!\int 1\,dx \overset{[(4.16)\text{ pro } r=R]}{=} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\dots\int\limits_0^{\pi} R^{m-1}\widetilde{J}_m\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1} \overset{(4.18)}{=} \varkappa_m R^{m-1}\,. \tag{4.21}$$

- Jistě jste si všimli (a snad si umíte i odůvodnit), že

$$\frac{d}{dR}V_m(R) = S_m(R)\,, \qquad V_m(R) = \int_0^R S_m(r)\,dr\,.$$

- Pro $m = 2k$, resp. $m = 2k+1$ dostanete z (4.15), (4.20), (4.21), za použití vlastností Γ-funkce $\Gamma(k) = (k-1)!$ a (4.14) postupně

$$\varkappa_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}\,, \qquad \varkappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1}k!\,\pi^k}{(2k)!}\,,$$

$$V_{2k}(R) = \frac{(\pi R^2)^k}{k!}\,, \qquad V_{2k+1}(R) = \frac{2^{k+1}k!\,\pi^k}{(2k+1)!}R^{2k+1}\,,$$

$$S_{2k}(R) = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}R^{2k-1}\,, \qquad S_{2k+1}(R) = \frac{2^{k+1}k!\,\pi^k}{(2k)!}R^{2k}\,.$$

5 Metoda charakteristik

1. Nalezněte charakteristiky a (metodou charakteristik) řešení následujících rovnic:

   (a) $u_x + yu_y = 0$, $u(0, y) = \frac{1}{y}$. Řešení: $u(x, y) = e^x/y$.

   (b) $u_t + uu_x = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, kde

   i. $\varphi(x) = 0$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = x$ pro $x > 0$,
   ii. $\varphi(x) = x$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = 0$ pro $x > 0$.
   iii. $\varphi(x) = 0$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = 1$ pro $x \ge 1$, φ spojitá a po částech afinní funkce.
   iv. $\varphi(x) = 1$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = 0$ pro $x \ge 1$, φ spojitá a po částech afinní funkce.
   v. $\varphi(x) = \sin x$. Řešení: Protože pro tuto rovnici mají charakteristiky, vycházející z bodu $[0, x_0]$, směrnici $1/\varphi(x_0)$ (to buď víte z přednášky nebo doporučuju, abyste si to spočetli), lze odtud odvodit, že v prvních třech případech existuje globální (tj. pro všechna $t > 0$) klasické řešení, zatímco v dalších dvou je klasické řešení definováno pouze lokálně.

2. Pro vaše soukromé počítání pár jednoduchých příkladů: nalezněte charakteristiky a (metodou charakteristik) řešení následujících rovnic:

   (a) $u_x = 6x^2 u_y$. Řešení: $u(x, y) = F(2x^3 + y)$, kde F je libovolná hladká funkce.

   (b) $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = \sin x$, $(a \ne 0)$. Řešení: $u(x, t) = \sin(x - at)$. Pro zvídavé: Odvoďte, že řešení Cauchyovy úlohy $u_t + au_x = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $(a \ne 0)$ je toto: $u(x, t) = \varphi(x - at)$ ještě jinak, než metodou charakteristik. Návod: Zaveďte nové proměnné $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

   (c) $u_t + xu_x + tu = 0$, $u(x, 0) = \sin x$. Řešení: $u(x, t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(xe^{-t})$.

   (d) $(z + y - x)u_x + (z + x - y)u_y + zu_z = 0$. Řešení: $u(x, y, z) = \Phi(x + y - 2z, z^2(x - y))$, kde Φ je libovolná hladká funkce dvou proměnných.

3. Složitější příklady: nalezněte metodou charakteristik řešení následujících rovnic:

   (a) $xzz_x + yzz_y = x^2 + y^2 + z^2$, $z(1, y) = y^2$. Návod: Podrobný návod na řešení naleznete na konci zápisu tohoto paragrafu.[7] Řešení: $z(x, y) = \sqrt{2(x^2 + y^2)\ln x + \frac{y^4}{x^2}}$. Diskutujte podrobně jak je to s definičním oborem tohoto řešení.

   (b) $(y + z)^2 w_x - x(y + 2z)w_y + xzw_z = 0$, $w(x, 0, z) = x^2 + 2z^2$, (pro neznámou fci $w = w(x, y, z)$). Návod: Příklad byl řešen na cvičení, metodou charakteristik. Řešení: $w(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2\,z^2 + 3\,yz$.

   (c) $(y + z)^2 z_x - x(y + 2z)z_y = xz$, $z(x, 0) = x^2$, (pro neznámou funkci $z = z(x, y)$). Návod: Příklad byl řešen na cvičení, metodou charakteristik. K vyřešení tohoto příkladu se hodí obecné řešení předchozího příkladu, jak záhy zjistíte, budete-li postupovat při řešení metodou, navrženou na přednášce. Řešení: Řešení $z = z(x, y)$ je zadáno implicitně vztahem $(y^2 + yz + x^2)^2 - (z^2 + yz) = 0$. Diskutujte jak je to s definičním oborem tohoto řešení.

4.* Metodou charakteristik řešte následující úlohu[8] pro neznámou funkci $w = w(t, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}\Big(1 + sd\frac{\partial w}{\partial y}\Big), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ w(0, y) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

M, σ, s, d jsou kladné (známé) konstanty. Uvažujte $|y|$ a $t > 0$, obě dostatečně malé. Návod: Podrobný návod na řešení naleznete na konci zápisu tohoto paragrafu.

Řešení: $w(t, y) = \frac{1}{s(d+1)}\big(\sigma - y - \sqrt{(\sigma - y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}\,\big)$.

[7] To znamená, že byste to mohli nejprve zkusit sami. ☺
[8] Výsledek této úlohy se uplatní v důkaze věty Cauchyho-Kowalevské.

5. Nalezněte řešení systému rovnic
$$U_t(x,t) + A\cdot U_x(x,t) = 0\,,\quad x\in\mathbb{R}\,,\quad t>0\,, \tag{5.22}$$
$$U(x,0) = F(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}\,, \tag{5.23}$$
kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, a $f(x)$, $g(x)$ jsou dané funkce. Návod: Najděte regulární matici P tak, že $P^{-1}AP = D$, kde D je diagonální matice. Zaveďte novou vektorovou funkci $V = P^{-1}U$ a ukažte, že pro tuto funkci se systém rovnic rozpadne na dvě separované rovnice pro v_1 a v_2, které vyřešte každou zvlášť metodou charakteristik. Vyjde
$$u_1 = \frac{1}{2}f(x-4t) + \frac{1}{2}f(x+4t) + g(x-4t) - g(x+4t)\,,$$
$$u_2 = \frac{1}{4}f(x-4t) - \frac{1}{4}f(x+4t) + \frac{1}{2}g(x-4t) + \frac{1}{2}g(x+4t)\,.$$

6. Pro obecný systém s rovnic tvaru (5.22) ukažte, že pokud A je konstantní $s\times s$ diagonalizovatelná matice, lze postup z předchozího případu vždy použít a nalézt řešení takového systému. Připomeňte si, že matice, mající různá reálná vlastní čísla, je diagonalizovatelná.

Návody k řešení některých složitějších příkladů z tohoto paragrafu.

Netvrdím, že uvedený postup je jediný možný. Je však konzistentní s postupem, který byl podrobně vysvětlen na přednášce.

- $xzz_x + yzz_y = x^2+y^2+z^2$, $\quad z(1,y) = y^2$. Návod: Zaveďte novou funkci $u = z^2$ a zjistěte, že původní (kvazilineární) úloha je pro klasická řešení ekvivalentní úloze $xu_x + yu_y = 2x^2+2y^2+2u$, $u(1,y) = y^4$ pro neznámou funkci $u = u(x,y)$. Řešte pomocnou (lineární) úlohu (teorie k tomu — viz přednáška) pro $w = w(x,y,u)$ tvaru $xw_x + yw_y + (2x^2+2y^2+2u)w_u = 0$, $w(1,y,u) = u - y^4$. Řešíme např. pro $x>0$, $y>0$ (diskutujte proč musí být $x\neq 0$, $y\neq 0$). Charakteristiky této úlohy splňují rovnice $\frac{d}{dt}x = x$, $\frac{d}{dt}y = y$, $\frac{d}{dt}u = 2x^2+2y^2+2u$, což dává řešení $x = x_0e^t$, $y = y_0e^t$, $u = 2te^{2t}(x_0^2+y_0^2) + u_0e^{2t}$ (kde $x_0 = x(0)$ atd.). Vyloučením proměnné t lze získat charakteristickou přímku, procházející bodem $[x_0,y_0,u_0]$, jako průsečík dvou ploch $\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0}$ a $u = 2(x_0^2+y_0^2)\frac{x^2}{x_0^2}\ln\frac{x}{x_0} + u_0\frac{x^2}{x_0^2}$. Tato přímka protíná rovinu, na které je dána počáteční podmínka, v bodě $[\overline{x},\overline{y},\overline{u}]$, který je charakterizován podmínkou $x = \overline{x} = 1$, což dá $\overline{y} = \frac{y_0}{x_0}$, $\overline{u} = -2(x_0^2+y_0^2)\frac{1}{x_0^2}\ln x_0 + u_0\frac{1}{x_0^2}$. Hodnota řešení $w(x_0,y_0,u_0)$ je podle teorie rovna hodnotě $w(1,\overline{y},\overline{u})$, tedy $w(x_0,y_0,u_0) = w(1,\overline{y},\overline{u}) = \overline{u} - \overline{y}^4 = -2(x_0^2+y_0^2)\frac{1}{x_0^2}\ln x_0 + u_0\frac{1}{x_0^2} - \frac{y_0^4}{x_0^4}$, což platí v libovolném bodě $[x_0,y_0,u_0]$ na charakteristice, tedy je možno index „nula“ nepsat. Na závěr z rovnice $w(x,y,u) = 0$ vypočteme u jako implicitně zadanou funkci.

- $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}\left(1 + sd\frac{\partial w}{\partial y}\right)$, $\quad w(0,y) = 0$. Návod: Řešíme tedy rovnici $w_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma-y-sw}w_y = \frac{M\sigma}{\sigma-y-sw}$. Řešme nejprve pomocnou lineární úlohu pro $z = z(t,y,w)$, a sice $z_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma-y-sw}z_y + \frac{M\sigma}{\sigma-y-sw}z_w = 0$ s počáteční podmínkou $z(0,y,w) = w$. Charakteristiky této úlohy jsou popsány rovnicemi $\frac{d}{d\tau}t = 1$, $\frac{d}{d\tau}y = -\frac{M\sigma sd}{\sigma-y-sw}$, $\frac{d}{d\tau}w = \frac{M\sigma}{\sigma-y-sw}$. První z těchto rovnic má triviální řešení $t = \tau + c$, proměnnou parametrizace τ však můžeme vhodně posunout, a proto bez újmy na obecnosti předpokládat, že $t = \tau$, tj. $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$, a psát
$$\frac{d}{dt}y = -\frac{M\sigma sd}{\sigma-y-sw}\,,\quad \frac{d}{dt}w = \frac{M\sigma}{\sigma-y-sw}\,. \tag{5.24}$$
Úspěch při řešení tohoto systému bude záviset na tom, jestli budeme umět například vyjádřit y pomocí w a dosadit to do rovnice pro $\frac{d}{dt}w$. Udělejme to: z tvaru rovnic pro $\frac{d}{dt}y$ a $\frac{d}{dt}w$ je vidět, že $\frac{d}{dt}(y+sdw) = 0$, odkud máme pro $y(0) = y_0$, $w(0) = w_0$,
$$y + sdw = y_0 + sdw_0 \quad (=: c_0)\,. \tag{5.25}$$
Vypočítáme odtud y, dosadíme do druhé rovnice v (5.24), a obdržíme $\frac{d}{dt}w = \frac{M\sigma}{\sigma-c_0+s(d-1)w}$, odkud dostaneme $(\sigma-c_0)w + \frac{s(d-1)}{2}w^2 = M\sigma t + C$. Pro $t=0$ získáme hodnotu konstanty C a s její pomocí upravíme tento vztah na
$$(\sigma-y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t = (\sigma-y_0)w_0 - \frac{s(d+1)}{2}w_0^2\,. \tag{5.26}$$

Rovnice (5.25), (5.26) nejen popisují charakteristiku, ale zároveň říkají, že $y + sdw$, $(\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t$ jsou konstantní na charakteristice. Odtud plyne, že

$$z(t, y, w) = F\Big(y + sdw, (\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t\Big) \tag{5.27}$$

(kde F je dostatečně hladká) je obecným řešením problému $z_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw}z_y + \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}z_w = 0$ (zkuste si dosadit). Uvažujme počáteční podmínku pro z tvaru $z(0, y, w) = w$. Tedy

$$w = F\Big(\underbrace{y + sdw}_{:=a}, \underbrace{(\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2}_{:=b}\Big). \tag{5.28}$$

Z rovnic $a = y + sdw$, $b = (\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2$ spočteme w — vypočtením y z první a dosazením do druhé rovnice dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici pro w, jejíž řešení je

$$w = F(a, b) = \frac{-(\sigma - a) \pm \sqrt{(\sigma - a)^2 + 2bs(d-1)}}{s(d-1)}, \tag{5.29}$$

což dává (až na jedno znaménko, které za chvíli určíme) tvar funkce F. Použitím tohoto tvaru funkce F v (5.27) dostaneme po úpravě

$$z(t, y, w) = \frac{-(\sigma - y - sdw) \pm \sqrt{(\sigma - y - sw)^2 - 2s(d-1)M\sigma t}}{s(d-1)}, \tag{5.30}$$

pro dostatečně malá $|y|$ však má platit $z(0, y, w) = w$ a tedy před odmocninou v (5.30) musí být znaménko „plus“, čímž dostáváme jediné řešené úlohy $z_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw}z_y + \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}z_w = 0$ s počáteční podmínkou $z(0, y, w) = w$. Na závěr musíme ještě z rovnice $z(t, y, w) = 0$ vypočítat $w = w(y, t)$, což opět vede na kvadratickou rovnici pro w. Jejím formálním řešením dostaneme

$$w(t, y) = \frac{(\sigma - y) \pm \sqrt{(\sigma - y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}}{s(d+1)}. \tag{5.31}$$

Uvažujeme však $|y|$ malá (viz zadání), tj. $\sqrt{(\sigma - y)^2} = (\sigma - y)$. Pak ovšem z okrajové podmínky $w(0, y) = 0$ plyne, že ve vztahu (5.31) je potřeba brát před odmocninou znaménko „mínus“, a tedy je

$$w(t, y) = \frac{(\sigma - y) - \sqrt{(\sigma - y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}}{s(d+1)}. \tag{5.32}$$

6 Důsledky věty Cauchyho-Kowalevské

Vyjdeme z následující věty.

Věta 6.1 (Cauchy-Kowalevská) *Buďte* $a_{ijr}(x,u)$, $b_r(x,u) : I_\rho^{d+s} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,d$, $j = 1,\dots,s$, *reálně analytické pro nějaké* $\rho > 0$. *Pak existuje* $\rho' \in (0,\rho\rangle$ *a reálně analytické funkce* $u_r : I_{\rho'}^{d+1} \to \mathbb{R}$, $r = 1,\dots,s$, *takové, že pro všechna* $r = 1,\dots,s$ *platí*

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} a_{ijr}(x,u(t,x))\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(t,x) + b_r(x,u(t,x)) \quad \textit{na } I_{\rho'}^{d+1}\,, \tag{6.33}$$

$$u_r(0,x) = 0 \quad \textit{na } I_{\rho'}^{d}\,. \tag{6.34}$$

Ve třídě reálně analytických funkcí je toto řešení určeno jednoznačně.

Ukažte, že Větu 6.1 lze podstatně zobecnit:

1. V (6.33) lze připustit závislost koeficientů úlohy na proměnné t, tj. $a_{ijr} = a_{ijr}(t,x,u)$, $b_r = b_r(t,x,u)$. Návod: Uvažujte novou „neznámou" funkci $u_{s+1} \equiv t$ a sestavte pro ni $(s+1)$. rovnici a počáteční podmínku.

   Ukažte, že pro novou vektorovou funkci $\widetilde{u} := (u_1,\dots,u_s,u_{s+1})$ dostaneme systém typu (6.33), (6.34), kde $a_{ijr} = a_{ijr}(x,\widetilde{u})$, $b_r = b_r(x,\widetilde{u})$.

2. Ve (6.34) lze připustit obecnou počáteční podmínku $u_r(0,x) = \varphi_r(x)$, kde $\varphi_r(x)$ je reálně analytická funkce. Návod: Uvažujte nové neznámé funkce $v_r(t,x) := u_r(t,x) - \varphi_r(x)$.

3. Diskutujte lokálnost existence řešení. Uvažte, že lokální řešení lze „slepovat" nejen v prostoru, ale i v čase, tj. pokud řešení existuje například pro $|x - x^0| < \delta$ a pro $t = t_0 > 0$ (označme toto řešení U), lze uvažovat systém (6.33) v $I_\delta^{d+1}([t_0,x^0])$ s počáteční podmínkou $u_r(t_0,x) = U_r(t_0,x)$ v $I_\delta^d(x^0)$. Odůvodněte, že Větu 6.1 lze zobecnit takto: je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ oblast, „kde jsou všechny koeficienty úlohy (tj. a_{ijr}, b_r, příp. φ_r) reálně analytické" (zformulujte přesně!), existuje $\Omega' \subset \Omega$, na které existuje (ve třídě reálně analytických funkcí jednoznačně určené) řešení (6.33), (6.34).

4. Konečně: v (6.33) lze připustit i systém zcela obecných parciálních diferenciálních rovnic vyššího řádu, za následujících omezujících předpokladů:

   (a) všechny rovnice v systému lze (alespoň lokálně) převést na rovnice vyřešené vzhledem k nejvyšší derivaci podle jedné z proměnných (ve všech rovnicích musí tato proměnná být tatáž); pak lze vhodnými substitucemi převést takový systém na systém tvaru (6.33);

   (b) koeficienty úlohy (po provedení výše naznačených substitucí) musí být reálně analytické, tj. původní systém musí být tvořen „reálně analytickými závislostmi";

   (c) počáteční podmínky úlohy musí být takové, aby po převedení na systém tvaru v (6.33) byl k dispozici dostatečný počet reálně analytických podmínek tvaru (6.34); poznámka: někdy může dojít k situaci, kdy musíme proderivováním zvýšit řád rovnice, v takové situaci je nutno zvolit novou počáteční podmínku, která je automaticky splněna pro původní rovnice.

   Diskutujte celou situaci na příkladu dvou rovnic:

   (i) Zcela obecná rovnice druhého řádu ve dvou proměnných, vyřešená vzhledem k u_{tt}:

   $$u_{tt} = F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xt},u_{xx}) \tag{6.35}$$

   s podmínkami

   $$u(0,x) = \varphi(x)\,, \tag{6.36}$$

   $$u_t(0,x) = \psi(x)\,. \tag{6.37}$$

   Ukažte, že pokud jsou F, φ, ψ reálně analytické funkce svých proměnných, existuje (lokálně) jediné reálně analytické řešení problému (6.35)–(6.37). Návod: Položte $t = u_1$, $u = u_2$, $u_x = u_3$, $u_t = u_4$, $u_{xt} = u_5$, $u_{xx} = u_6$.

(ii) Zcela obecná rovnice 1. řádu ve dvou proměnných:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0\,. \tag{6.38}$$

Návod: Nejprve proderivujte celou rovnici podle (například) y. Vypočtěte u_{yy} a postupujte dle předchozího příkladu. Diskutujte počáteční podmínky, zejména novou podmínku typu „$F(\dots)|_{y=0} = 0$“, která je splněna automaticky pro řešení původní rovnice. Proč vlastně je potřeba nová podmínka a proč je vhodné ji mít takového tvaru?

Na základě předchozích úvah ukažte:

5. Úloha pro Laplaceovu rovnici

$$\Delta u = 0\,, \tag{6.39}$$
$$u(x, 0) = \varphi(x)\,, \tag{6.40}$$
$$u_y(x, 0) = \psi(x)\,, \tag{6.41}$$

má v okolí $\{y{=}0\}$ jediné reálně analytické řešení (jsou-li φ, ψ reálně analytické v okolí $\{y{=}0\}$).

6. Úloha (6.33)–(6.34) nemusí být vždy korektně zadána! Tj. řešení sice existuje a je jediné, ale nemusí záviset spojitě na datech úlohy. Návod: V předchozí situaci úlohy (6.39)–(6.41) uvažujte tzv. Hadamardův příklad: $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \frac{\sin nx}{n^k}$. Odůvodněte, že funkce $u(x, y) = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^{k+1}} \sin nx$ je jediné reálně analytické řešení úlohy (6.39)–(6.41). Přitom pro toto řešení platí výrok:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, y_1 > 0 \ \ \forall\, K > 0 \ \ \exists\, n, k \in \mathbb{N},$$

že

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon\,,$$

a přitom pro libovolné $a < b$ (v proměnné x)

$$\|u(\cdot, y_1)\|_{\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)} > K\,.$$

Tento příklad nám naznačuje, že úloha (6.39)–(6.41) asi nebude „ta správná okrajová úloha“ pro Laplaceův operátor.

7. Pro vhodnou sadu počátečních podmínek ukažte, že lokálně existuje jediné (reálně analytické) řešení tzv. Stokesova systému v $\mathbb{R}^2$ (případně v $\mathbb{R}^3$), pro funkce $\vec{u} = (u, v)$ (případně $\vec{u} = (u, v, w)$) a p (reprezentující po řadě rychlost a tlak),

$$\Delta \vec{u} - \nabla p = 0\,, \tag{6.42}$$
$$\operatorname{div} \vec{u} = 0\,. \tag{6.43}$$

Návod: Věřili byste, že například pro problém ve dvou dimenzích budete potřebovat 5 počátečních podmínek? A co víc, dokázali byste si tuto víru logicky odůvodnit?

7 Řešení některých základních rovnic 2. řádu pomocí vhodných substitucí

1. Zopakujte si, že klasické řešení Cauchyovy úlohy pro lineární konvektivní rovnici v jedné prostorové a jedné časové proměnné (pro $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) s počáteční podmínkou $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, tj.

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= \varphi(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{7.1}$$

je dáno vztahem

$$u(x,t) = \varphi(x - at)\,, \tag{7.2}$$

a že toto řešení je možno nalézt[9] zavedením nových proměnných

$$\xi = x - at\,, \qquad \eta = x + at\,. \tag{7.3}$$

2. Zkoumejte, zda substituce (7.3) vede k řešení následujících rovnic druhého řádu ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$):

   (a) Lineární eliptická rovnice ve dvou proměnných (x,t):

   $$u_{tt} + a^2 u_{xx} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,. \tag{7.4}$$

   Návod: Po provedení substituce dostaneme rovnici $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$. Uvedená substituce vede tedy pouze k „odstranění koeficientu a^2 u u_{xx}“, tj. převádí (7.4) v Laplaceovu rovnici $\Delta u(\xi,\eta) = 0$. V příštím cvičení se k této rovnici znovu (o něco úspěšněji) vrátíme.

   (b) Lineární rovnice vedení tepla v jedné prostorové a jedné časové dimenzi:

   $$u_t - a^2 u_{xx} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,. \tag{7.5}$$

   Návod: Po provedení substituce obdržíme rovnici $a(u_\eta - u_\xi) + a^2(u_{\eta\eta} + 2u_{\eta\xi} - u_{\xi\xi}) = 0$, tedy se nám úspěšně povedlo problém učinit složitějším. Rovnici vedení tepla budeme vbrzku řešit jiným způsobem.

   (c) Lineární vlnová rovnice v jedné prostorové a jedné časové dimenzi:

   $$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,. \tag{7.6}$$

   Návod: Po provedení substituce (7.3) dostaneme rovnici $u_{\xi\eta} = 0$, jejímž dvojím přeintegrováním (podle ξ a podle η) dostaneme, že řešením (7.6) jsou všechny funkce tvaru $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$, kde f a g jsou libovolné dostatečně hladké funkce. Celkově tedy je $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$ libovolným řešením (7.6).

   (d) Předchozí úspěšný bod učiňte ještě úspěšnějším: najděte řešení problému

   $$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= \varphi(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{7.7}$$

   tj. dopracujte se až k tzv. d'Alembertovu vzorci

   $$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,. \tag{7.8}$$

   Návod: Vyjděte z výsledku, který jste odvodili v předchozím bodu: $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$. S použitím obou okrajových podmínek z (7.7) se relativně snadno dopracujete k d'Alembertovu vzorci. Přímým dosazením se přesvědčte, že funkce (7.8) řeší problém (7.7). Odůvodněte pomocí věty Cauchy-Kowalevské, že úloha (7.7) má pro reálně analytické funkce φ, ψ jediné reálně analytické řešení. Protože funkce (7.8) je (pro reálně analytické φ, ψ) reálně analytická, našli jsme toto řešení explicitně.

[9]. . . samozřejmě je možno řešení (7.1) nalézt také metodou charakteristik – srov. s předchozími cvičeními.

3.* Všimněte si: rovnici $u_t + au_x = 0$ je možno zapsat ve tvaru

$$(\partial_t + a\partial_x)u = 0$$

a její všechna řešení mají tvar

$$u(x,t) = f(x - at)\,,$$

zatímco rovnici $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ je možno zapsat ve tvaru

$$(\partial_t + a\partial_x)(\partial_t - a\partial_x)u = 0$$

a její všechna řešení mají tvar

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at).$$

Nenapadlo by vás přitom něco, co by mělo šanci obdobným, byť formálním postupem zdolat rovnici $u_{tt} + a^2 u_{xx} = 0$? Návod: Zkuste substituci obdobnou (s přihlédnutím k charakteru rovnice) substituci $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ a postupujte analogicky jako v případě vlnové rovnice. Pokud se dopracujete ke vzorci, který bude dosti podobný d'Alembertově vzorci (viz příklad 6n), zkuste ověřit jeho platnost buď přímým dosazením výsledné funkce do rovnice nebo tím, že pomocí něho spočítáte tzv. Hadamardovo řešení Laplaceovy rovnice (viz bod 6 z programu čtvrtého cvičení).[10]

[10] Řešení sem pro pořádek napíšu, i když cennější jistě bude, když si je odvodíte sami: substituce $\xi = x - iat$, $\eta = x + iat$ (je vám jasné, proč zrovna tato? Věřili byste formálnímu rozpisu $u_{tt} + a^2 u_{xx} = (\partial_t + ia\partial_x)(\partial_t - ia\partial_x)u$?) nás dovede k rovnici $u_{\eta\xi} = 0$ a následně k obecnému řešení $u(x,t) = f(x - ait) + g(x + iat)$. S přihlédnutím k počátečním podmínkám dostaneme

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - iat) + \varphi(x + iat)}{2} + \frac{1}{2ia}\int_{x-iat}^{x+iat} \psi(s)\,ds\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,.$$

(Vlastně jde o formálně tytéž výpočty jako v případě vlnové rovnice). Přímým dosazením se přesvědčíme, že vzoref „funguje“. Použitím tohoto vzorce pro $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \frac{1}{n^k}\sin nx$ dostaneme $u(x,t) = \frac{1}{n^{k+1}}\sin nx \sinh nt$, což je očekávaná (Hadamardova) odpověď.

8 Kanonický tvar a klasifikace PDR 2. řádu

1. Uvažujte lineární PDR druhého řádu s konstantními koeficienty, v $\mathbb{R}^2$, tedy rovnici typu

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f\,, \qquad |a| + |b| + |c| > 0. \tag{8.1}$$

   Ukažte, že platí:

   - (8.1) je eliptická $\iff$ $b^2 - 4ac < 0$;
   - (8.1) je parabolická (event. v širším slova smyslu) $\iff$ $b^2 - 4ac = 0$;
   - (8.1) je hyperbolická $\iff$ $b^2 - 4ac > 0$.

2. Uvažujte lineární PDR druhého řádu v kanonickém tvaru (vzhledem k nejvyšším derivacím), tedy rovnici pro $u = u(y)$,

$$\sum_{k=1}^{d} \alpha_k(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \sum_{k=1}^{d} \beta_k(y) \frac{\partial u}{\partial y_k} + c(y)\, u = f(y)\,, \qquad \text{kde } \alpha_k(y) \in \{-1, 1, 0\}\,. \tag{8.2}$$

   Ukažte, že v každém bodě y lze provést tyto úvahy:

   (a) Pokud existuje takový index j, že $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ susbtitucí $u = v\, e^{-\frac{\beta_j y_j}{2\alpha_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:

   - v rovnici pro v nebude člen, odpovídající β_j (odpovídající koeficient bude nulový)
   - všechny koeficienty u členů druhého řádu zůstanou beze změny a všechny zbylé koeficienty u členů prvého řádu (s výjimkou výše zmíněného) zůstanou rovněž beze změny

   Ta dvojka ve jmenovateli zlomku v exponenciele není překlep. Sledujte její roli při výpočtu.

   (b) Pokud existuje takový index j, že $\alpha_j = 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ susbtitucí $u = v\, e^{-\frac{c y_j}{\beta_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:

   - v rovnici pro v nebude absolutní člen, tj, člen odpovídající nulté derivaci (koeficientu c)
   - všechny koeficienty u členů druhého i prvního řádu zůstanou beze změny

3. Pomocí výše uvedených dvou substitucí ukažte, že každou lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty lze vhodnými substitucemi převést na jeden z následujících typů:

   - Eliptickou rovnici na $-\Delta u + ku = f$. Pro $k = 0$ jde o tzv. Laplace-Poissonovu rovnici, pro $k \neq 0$ o rovnici Helmholtzova typu. Koeficient k, je-li nenulový, obecně nelze „vynulovat“.
   - Parabolickou rovnici na $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$, tj. na rovnici vedení tepla. Všechny parabolické lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty jsou tedy nějakou rovnicí vedení tepla.
   - Hyperbolickou rovnici na $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u + ku = f$, tj. na vlnovou rovnici. Koeficient k, je-li nenulový, obecně nelze „vynulovat“.

4. Určete typ rovnice, převeďte na kanonický tvar, případně převeďte na jednu z rovnic z předchozího bodu, případně se pokuste vyřešit, pokud se po převedení dostanete na „řešitelný typ“ rovnice.

   (a) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0$ Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\chi = 2x - 2y + z$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{-\xi/2}$ dostaneme rovnici $\Delta v = \frac{1}{4} v$. Jde o eliptickou rovnici (Helmholtzova typu).

   (b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + u_y = 0$ Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{2} - x$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{-\xi/2 + \eta/4}$ dostaneme eliptickou rovnici (Helmholtzova typu) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{5}{16} v$.

   (c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_y = 0$ Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - 2x$ dostaneme parabolickou rovnici $u_\eta - u_{\xi\xi} = 0$.

   (d) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$ Řešení: Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{\eta/4}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = -\frac{1}{16} v$.

(e) $4u_{xy} - 3u_{yy} + 4u_x - 8u_y - 5u = 0$,
řešte obecně a poté s podmínkami $u(x,0) = e^{\frac{x}{2}}$, $u_y(x,0) = 0$. Řešení: Po provedení substituce $\xi = x + y$, $\eta = x + 2y$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{2\xi - \frac{3}{2}\eta}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - 4v_{\eta\eta} = 0$. Její obecné řešení je $v(\xi, \eta) = f(\eta - 2\xi) + g(\eta + 2\xi)$, tedy $u(x,y) = e^{\frac{x}{2} - y}\big(f(x) + g(3x + 4y)\big)$. Okrajové podmínky dají $u(x,y) = e^{\frac{x}{2} - y}(1 + y)$.

5.* A další sada příkladů pro vaše samostatné počítání: v každé oblasti, kde se nemění typ rovnice, najděte její kanonický tvar.

(a) $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$

(b) $u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} + (2 - \cos^2 x)\, u_{yy} = 0$

(c) $x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} = 0$

(d) $y u_{xx} - x u_{xy} = 0$

(e) $(1 + x^2) u_{xx} + (1 + y^2) u_{yy} + y u_y = 0$

9 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici na kouli

9.1 Odvození Poissonova vzorce metodou kulové inverze v dimenzi $d \geq 3$

Základem Poissonova vzorce je následující lemma.

Lemma 9.1 *Buď $B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$ koule se středem 0 a poloměrem $R > 0$, $d \geq 3$. Buď dále $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(0)})$, taková, že $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$. Potom pro všechna $x \in B_R(0)$ je*

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^d} \, \mathrm{d}S(\xi), \tag{9.1}$$

kde $\varkappa_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ je povrch jednotkové sféry v dimenzi d.

Poznámka 9.2 Vztah (9.1) je tedy nutnou podmínkou pro to, aby funkce uvedené hladkosti byla řešením Laplaceovy rovnice na kouli. Zároveň tento vztah říká, že hodnoty takové (harmonické, dostatečně hladké) funkce u uvnitř koule $B_R(0)$ lze vyjádřit pomocí hodnot funkce na hranici této koule. Vzhledem k tomu, že k existenci integrálu vpravo v (9.1) není nutné, aby $u \in \mathcal{C}^2(\partial B_R(0))$, vzniká přirozená otázka, jaké vlastnosti bude mít funkce u, definovaná předpisem

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int\limits_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^d} \, \mathrm{d}S(\xi), \tag{9.2}$$

pro (např.) $\varphi \in \mathcal{C}(\partial B_R(0))$. Skutečně lze dokázat, že takto definovaná funkce je klasickým řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli, s hraničními hodnotami $\varphi \in \mathcal{C}(\partial B_R(0))$. Příslušná věta byla součástí přednášky. Zde prezentované lemma tvoří k této větě jakousi komplementární, motivační část, ukazující, že (Poissonův) vzorec (9.2) „nespadl z nebe“.

Dokažme nyní Lemma 9.1.

Důkaz. Použijeme větu o třech potenciálech pro $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(0)})$ (odtud hladkost, požadovaná na u), $d \geq 3$:

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{1}{(d-2)\varkappa_d} \Bigg(& \underbrace{-\int_{B_R(0)} \frac{\Delta u(\xi)}{|x-\xi|^{d-2}} \, \mathrm{d}\xi}_{=0} + \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} \, \mathrm{d}S(\xi) \\ & - \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} \right) \mathrm{d}S(\xi) \Bigg). \end{aligned} \tag{9.3}$$

První integrál je nulový, protože $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$. Třetí integrál pracuje s hodnotami funkce u na množině $\partial B_R(0)$, je tedy stejného typu jako integrál vpravo v (9.1). Druhý integrál způsobuje jisté obtíže, protože pracuje s hodnotami $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ na množině $\partial B_R(0)$, které se vpravo v (9.1) nevyskytují. Naším cílem bude nyní tento integrál nějakým vhodným způsobem přepsat, abychom tuto obtíž odstranili. Využijeme k tomu druhou Greenovu větu, ze které plyne, že pro funkce v, $w \in \mathcal{C}^1(\overline{B_R(0)})$ je

$$\int\limits_{B_R(0)} (v\Delta w - w\Delta v) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial B_R(0)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S - \int\limits_{\partial B_R(0)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S \,. \tag{9.4}$$

Položíme $v = u$ a pokusíme se nalézt $w \in \mathcal{C}^1(\overline{B_R(0)})$ takovou, že $\Delta w = 0$ v $B_R(0)$. Pro takovou volbu funkcí v, w plyne z (9.4) rovnost

$$\int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{\partial w}{\partial \nu}(\xi) \, \mathrm{d}S(\xi) = \int\limits_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \, w(\xi) \, \mathrm{d}S(\xi) \,, \tag{9.5}$$

což umožní nahradit integrál, ve kterém vystupuje $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)$, integrálem, ve kterém vystupuje $u(\xi)$. Zbývá najít vhodnou funkci w. Porovnáme-li druhý integrál v (9.3) s pravou stranou (9.5), mohli bychom dojít k názoru, že by touto funkcí mohla být funkce $w(\xi) = \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}$. Tato funkce však (pro pevné $x \in B_R(0)$)

není harmonická (v proměnné ξ) v celém $B_R(0)$, jak je nutné. Použijeme proto (podobnou) funkci $w(\xi) = c \cdot \frac{1}{|x'-\xi|^{d-2}}$ s vhodně zvoleným bodem $x' \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$ a vhodnou konstantou $c \in \mathbb{R}$. Taková funkce splňuje podmínku $w \in \mathcal{C}^1(\overline{B_R(0)})$ a $\Delta w = 0$ v $B_R(0)$ a lze ji použít v identitě (9.5).
K nalezení bodu $x' \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$, který je „vhodně přiřazen“ bodu $x \in B_R(0)$ použijeme kulovou inverzi: Buď $x \in B_R(0)$, $x = (x_1, \dots, x_d) \neq 0$. Řekneme, že bod $x' = (x'_1, \dots, x'_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$ je kulově inverzní k bodu x (vzhledem ke kouli $B_R(0)$), pokud

$$x'_k = x_k \frac{R^2}{|x|^2}\,, \quad k = 1, \dots, d\,, \tag{9.6}$$

tedy (kreslete si) pokud x' leží na polopřímce vycházející ze středu koule $B_R(0)$ a procházející bodem x, a navíc platí

$$|x| \cdot |x'| = R^2\,. \tag{9.7}$$

Pro kulově inverzní body lze navíc poměrně jednoduše dokázat následující identita: jsou-li $x \in B_R(0)$, $x \neq 0$, a x' kulově inverzní k x vzhledem ke kouli $B_R(0)$, potom

$$|x' - \xi| = \frac{R}{|x|}|x - \xi|\,, \quad \forall \xi \in \partial B_R(0)\,. \tag{9.8}$$

(Návod k důkazu (9.8): umocněte (9.8) na druhou a použijte (9.7)). Položíme nyní pro $x \neq 0$,

$$w(\xi) = \frac{1}{|x'-\xi|^{d-2}} \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} \quad \left(\overset{(9.8)}{=} \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} \right)\,. \tag{9.9}$$

Tato funkce je harmonická v $B_R(0)$, protože bod x' leží mimo $B_R(0)$, navíc je $w \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(0)})$. S použitím (9.5) a (9.9) dostaneme z (9.3):

$$u(x) = \frac{1}{(d-2)\varkappa_d} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \left(\frac{1}{|x'-\xi|^{d-2}} \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} - \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} \right)}_{:=A_d} \mathrm{d}S(\xi)\,. \tag{9.10}$$

Zbývá v A_d spočítat příslušné normálové derivace a poté přejít k původní proměnné x. Máme:

$$\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} \right) = \nabla_\xi \left(|x-\xi|^{2-d} \right) \cdot \nu(\xi) = \frac{2-d}{2} |x-\xi|^{-d}\, 2(x-\xi)\,(-1) \cdot \nu(\xi) = (d-2) \frac{x-\xi}{|x-\xi|^d} \cdot \frac{\xi}{R},$$

neboť $\nu(\xi) = \frac{\xi}{R}$ pro $\xi \in \partial B_R(0)$. Podobně

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \left(\frac{1}{|x'-\xi|^{d-2}} \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} \right) &= (d-2) \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} \frac{x'-\xi}{|x'-\xi|^d} \cdot \frac{\xi}{R} \overset{(9.6),(9.8)}{=} (d-2) \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} \frac{x\frac{R^2}{|x|^2} - \xi}{\frac{R^d}{|x|^d}|x-\xi|^d} \cdot \frac{\xi}{R} \\ &= (d-2) \frac{R^2 x - |x|^2 \xi}{R^2 |x-\xi|^d} \cdot \frac{\xi}{R}\,. \end{aligned}$$

Celkově je, pro $\xi \in \partial B_R(0)$,

$$A = \frac{d-2}{R^2|x-\xi|^d} \left(R^2 x - |x|^2 \xi - R^2 x + R^2 \xi \right) \cdot \frac{\xi}{R} = (d-2) \frac{R^2 - |x|^2}{R^2 |x-\xi|^d} \cdot \underbrace{\frac{\xi \cdot \xi}{R}}_{= \frac{R^2}{R}} = (d-2) \frac{R^2 - |x|^2}{R|x-\xi|^d}\,,$$

a tedy, dle (9.10),

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^d} \,\mathrm{d}S(\xi)\,, \qquad x \in B_R(0) \setminus \{0\}\,, \tag{9.11}$$

(bod $x = 0$ jsme vyloučili v okamžiku, kdy jsme začali používat kulovou inverzi). Funkce vpravo v (9.11) je však spojitá (jako funkce proměnné x) na kompaktním okolí $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon(0)}$ – integrabilní majorantou spojité funkce na kompaktní množině je vhodná konstanta. Vztah (9.11) tedy platí i pro $x = 0$, cbd. $\square$

Poznámka 9.3 Jako bonus dostáváme ze vztahu (9.11) pro $x = 0$ identitu

$$u(0) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2}{|\xi|^d} \, \mathrm{d}S(\xi) = \frac{1}{\varkappa_d R^{d-1}} \int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \, \mathrm{d}S(\xi) \,, \tag{9.12}$$

což je vlastnost průměru pro harmonické funkce.

9.2 Poissonův vzorec ve dvou dimenzích

Odvoďme analogii vztahu (9.1) ve dvou dimenzích. Buď $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ kruh se středem 0 a poloměrem $R > 0$. Buď dále $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(0)})$ taková, že $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$. Potom věta o třech potenciálech dává pro tuto funkci

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \ln |x - \xi| \, \mathrm{d}\gamma(\xi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \, \frac{\partial}{\partial \nu} \Big(\ln |x - \xi| \Big) \, \mathrm{d}\gamma(\xi) \,, \tag{9.13}$$

kde uvedené integrály jsou křivkovými integrály přes obvod kruhu $B_R(0)$. Postupujeme zcela analogicky jako v důkazu lemmatu 9.1: definujeme bod kruhově inverzní k bodu $x \in B_R(0)$, $x \neq 0$, splňující (9.6)–(9.8), a pomocnou funkci

$$w(\xi) = \ln \left(\frac{|x|}{R} |x' - \xi| \right) = \ln |x| - \ln R + \ln |x' - \xi| \,,$$

pro kterou tedy platí (9.5). Navíc z předchozího vztahu plyne

$$\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} w(\xi) = \frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \Big(\ln |x' - \xi| \Big) \,. \tag{9.14}$$

Odtud plyne analogie vztahu (9.10), neboli

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \, \underbrace{\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \Big(\ln |x - \xi| - \ln |x' - \xi| \Big)}_{:= A_2} \, \mathrm{d}\gamma(\xi) \,. \tag{9.15}$$

Rutinní (doufejme) výpočty dále dají

$$\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \Big(\ln |x - \xi| \Big) = \frac{1}{|x - \xi|} \nabla_\xi \Big(|x - \xi| \Big) \cdot \frac{\xi}{R} = -\frac{(x - \xi) \cdot \xi}{R|x - \xi|^2} = \frac{R^2 - x \cdot \xi}{R|x - \xi|^2} \,,$$

a podobně

$$\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \Big(\ln |x' - \xi| \Big) = \frac{R^2 - x' \cdot \xi}{R|x' - \xi|^2} = \frac{R^2 - x \frac{R^2}{|x|^2} \cdot \xi}{R \frac{R^2}{|x|^2} |x - \xi|^2} = \frac{|x|^2 - x \cdot \xi}{R|x - \xi|^2} \,.$$

Proto $A_2 = \frac{R^2 - |x|^2}{R|x - \xi|^2}$ a, uvážíme-li navíc, že $\varkappa_2 = 2\pi$, dostaneme z (9.15)

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_2 R} \int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} \, \mathrm{d}\gamma(\xi) \,, \tag{9.16}$$

nejprve pouze pro $x \in B_R(0) \setminus \{0\}$, stejnou úvahou jako výše však ukážeme platnost (9.16) i pro $x = 0$. Všimněte si, že vztah (9.16) je speciálním případem vztahu (9.1) pro $d = 2$ (s konvencí, že plošný integrál se pro $d = 2$ chápe jako křivkový integrál). V tomto smyslu tedy platí (9.1) pro $d \geq 2$. Zkuste si jako cvičení rozmyslet, jak by tomu bylo v dimenzi $d = 1$.

Cvičení 9.4 *Vyjádřete křivkový integrál (9.16) pomocí vhodné (polární) parametrizace jako jednorozměrný integrál přes interval* $(0, 2\pi)$*. Hodnoty funkce* u *vyjádřete také v polárních souřadnicích.*

Návod: Použijeme parametrizaci obvodu kruhu $\partial B_R(0)$ ve formě $\xi_1 = R\cos\alpha$, $\xi_2 = R\sin\alpha$, $\alpha \in (0, 2\pi)$. Metrický člen je $\sqrt{\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha}\right)^2} = R$. Označíme dále $g(\alpha) = u(R, \alpha) = u(\xi_1, \xi_2)$ hodnoty funkce u na obvodu kruhu a, pro $x \neq 0$, $u(x) = u(r, \beta)$ hodnoty funkce uvnitř kruhu $B_R(0)$, tj. pro $x_1 = r\cos\beta$, $x_2 = r\sin\beta$, $r \in (0, R)$, $\beta \in (0, 2\pi)$. Pak $|x^2| = r^2$, $|x-\xi|^2 = (R\cos\alpha - r\cos\beta)^2 + (R\sin\alpha - r\sin\beta)^2 = R^2 - 2rR\cos(\beta - \alpha) + r^2$, a

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{R|x-\xi|^2} \,\mathrm{d}\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\beta - \alpha) + r^2} \,\mathrm{d}\alpha = u(r, \beta)\,. \tag{9.17}$$

Zvlášť ke potřeba si rozmyslet případ $x = 0$ resp. $r = 0$. Na vztah (9.17) narazíme ještě při řešení Laplaceovy rovnice na kruhu tzv. Fourierovou metodou rozdělení proměnných.

10 Fourierova metoda rozdělení proměnných pro Laplace-Poissonovu rovnici – Dirichletova úloha na obdélníku

10.1 Dirichletova okrajová podmínka „na jedné straně obdélníka“

Budeme řešit následující Dirichletovu (= s předepsanými hodnotami hledané funkce na hranici) úlohu pro Laplaceovu rovnici:

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b)\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u(x,0) = g(x)\,, & x \in \langle 0,a \rangle\,, \\ & u(x,b) = 0\,, & x \in \langle 0,a \rangle\,, \\ & u(0,y) = 0\,, & y \in \langle 0,b \rangle\,, \\ & u(a,y) = 0\,, & y \in \langle 0,b \rangle\,. \end{array} \tag{10.1}$$

Přirozeně předpokládáme $a > 0$, $b > 0$, a dále $g(0) = 0$, $g(a) = 0$, aby okrajová podmínka byla spojitá na hranici.
Funkci $u(x,y)$ budeme nejprve hledat ve speciálním „separovaném“ tvaru, jako součin dvou funkcí,

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{10.2}$$

a dosadíme tento „ansatz“[11] do rovnice (10.1). Dostaneme

$$Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0\,. \tag{10.3}$$

Na základě tvaru hledaného řešení (10.2) se rozhodneme, že nás budou především zajímat ta řešení X, Y, která jsou nenulová alespoň v nějaké podoblasti obdélníka $(0,a) \times (0,b)$. V takových množinách lze upravit (10.3) na

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}\,.$$

Levá strana je závislá pouze na proměnné x, pravá strana je závislá pouze na proměnné y, a rovnost má platit pro všechna $[x,y] \in (0,a) \times (0,b)$, obě strany rovnice proto musí být rovny společné konstantě, kterou označme λ. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda\,, \tag{10.4}$$

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \lambda\,. \tag{10.5}$$

K první obyčejné diferenciální rovnici (10.4) máme ze zadání (10.1) i okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(a) = 0$ (které plynou z $u(0,y) = 0$ a $u(a,0) = 0$). Proto řešíme nejprve tuto úlohu.[12] Řešení pro funkci X je toto: pro $\lambda \geq 0$ neexistuje žádné netriviální řešení (tj. existuje pouze řešení rovné identické nule), taková řešení nás však nezajímají. Naštěstí pro $\lambda < 0$ existuje netriviální řešení rovnice (10.4), splňující příslušné okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(a) = 0$, nastane to však jen tehdy, když[13]

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Potom

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)\,,$$

kde c_n jsou libovolné konstanty.

[11] Pro německé slovo „ansatz“ se někdy používá nepěkný překlad „násada“. Myslím, že lepší varianta je buď použít opisu „vyjádřit funkci ve tvaru“ nebo se k tomu postavit například stejně jako v anglicky mluvících zemích: říkat „ansatz“. ☺

[12] Všimněte si, že pro funkci Y bychom měli jednak okrajovou podmínku $Y(b) = 0$, dále však „podivnou“ podmínku $X(x)Y(0) = g(x)$, která by plynula z $u(x,0) = g(x)$. To ukazuje, že „ansatz“ (10.2) není úplně správně. Půjde jej však časem poněkud upravit, aby bylo možno splnit i onu „podivnou“ podmínku.

[13] Proveďte podrobně.

Pro tato λ_n se nyní pokusíme vyřešit rovnici (10.5) pro $Y(y)$ resp. $Y_n(y)$,

$$\frac{d^2Y_n(y)}{dy^2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y)\,.$$

Obecným řešením této rovnice je

$$Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\,,$$

kde a_n a b_n jsou libovolné konstanty.
Jednu z okrajových podmínek pro Y lze splnit, a sice $Y(b) = 0$ (tato podmínka je důsledkem okrajové podmínky $u(x,b) = 0$), což dává

$$a_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} = 0\,,$$

odkud dostaneme

$$b_n = -a_n e^{-\frac{2n\pi}{a}b}\,,$$

a tedy

$$Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\left(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}\right)\,.$$

Celkem jsme tedy nalezli nekonečně mnoho funkcí typu (10.2),

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = d_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\left(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,,$$

kde d_n jsou libovolné konstanty. Všechny tyto funkce splňují $\Delta u_n = 0$ ve všech vnitřních bodech obdélníka $(0,a)\times(0,b)$, a také okrajové podmínky $u_n(x,b) = 0$, $u_n(0,y) = 0$ a $u_n(a,y) = 0$.
Ukažme si, jakým způsobem lze zajistit splnění i zbývající okrajové podmínky. Řešení celého problému (10.1) budeme hledat jako nekonečný součet funkcí typu $u_n(x,y)$,

$$u(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\left(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,.$$

Takto definovaná funkce u nepochybně splňuje okrajové podmínky $u(x,b) = 0$, $u(0,y) = 0$ a $u(a,y) = 0$, a pokud bude uvedená řada konvergovat „dostatečně rozumně" (budeme tento případ podrobně diskutovat za chvíli), tak bude možno provést derivování za znamením sumy, a tedy dostaneme $\Delta u = \Delta\big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n(x,y) = 0$.
Zbývá zajistit platnost okrajové podmínky $u(x,0) = g(x)$. Předpokládejme, že funkci $g(x)$ lze rozvést do sinové Fourierovy řady:[14]

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \quad \text{kde} \quad \gamma_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx\,. \tag{10.6}$$

Podmínka $u(x,0) = g(x)$ je pak vyjádřena rovnicí

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\left(e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right) = g(x)\,,$$

odkud z jednoznačnosti Fourierových rozvojů plyne vztah mezi konstantami d_n a koeficienty Fourierova rozvoje γ_n,

$$d_n e^{\frac{n\pi}{a}b} = \frac{\gamma_n}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}}\,,$$

a tedy dostáváme (zatím pouze formálně) řešení našeho problému ve tvaru řady:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,, \qquad \text{kde} \quad \gamma_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx\,. \tag{10.7}$$

[14] I tento požadavek budeme diskutovat v následujícím paragrafu.

10.2 Diskuse formálního výsledku

Nejprve si ujasněme, co vše potřebujeme k rigoróznímu důkazu[15] toho, že funkce (10.7) je řešením našeho problému (10.1). Tvrdím, že k tomu stačí, když ukážeme:

1. Funkce g je rozvinutelná do sinové Fourierovy řady (10.6), přičemž první z rovností (10.6) platí bodově pro všechna $x \in \langle 0, a\rangle$.
2. Řada v (10.7), i řady, které vzniknou formálními prvními a druhými derivacemi podle x a y za znamením sumy v (10.7), konvergují lokálně stejnoměrně na $(0, a) \times (0, b)$.
3. Řada v (10.7) konverguje stejnoměrně na $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle$.

Potom totiž:

a) Z bodu 2 výše plyne, že řadu (10.7) lze dvakrát derivovat člen po členu v každém bodě $[x, y] \in (0, a) \times (0, b)$, tedy máme $\Delta u(x, y) = \Delta\big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)\big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta u_n(x, y) = 0$. Dále bod 2 implikuje, že $u \in \mathcal{C}^2((0, a) \times (0, b))$.

b) Bod 3 implikuje, že $u \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle)$. Speciálně odtud plyne, že hodnoty funkce u na hranici obdélníka lze obdržet přímým dosazením příslušných hraničních bodů do řady (10.7). Tedy

$$
\begin{aligned}
u(0, y) &= 0\,, && y \in \langle 0, b\rangle\,,\\
u(a, y) &= 0\,, && y \in \langle 0, b\rangle\,,\\
u(x, b) &= 0\,, && a \in \langle 0, a\rangle\,,\\
u(x, 0) &\overset{(10.7)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right) \overset{(10.6)}{=} g(x)\,, && x \in \langle 0, a\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Poslední rovnost plyne pochopitelně z bodu 1 výše.

Věnujme se nyní podrobněji bodům 1–3 výše.

ad 1. Dodefinujeme nejprve funkci g liše na interval $\langle -a, 0\rangle$ a označíme toto rozšíření opět g. Protože $g(0) = 0$, je $g \in \mathcal{C}(\langle -a, a\rangle)$, platí tedy také $g \in L^1((-a, a))$ a $g \in L^2((-a, a))$. Odtud plyne:

- $g \in L^1((-a, a)) \implies$ na intervalu $(-a, a)$ existuje Fourierova řada funkce g vzhledem k úplnému trigonomickému systému $\{1, \sin(\frac{\pi n}{a}x), \cos(\frac{\pi n}{a}x)\}$; z lichosti funkce g na intervalu $(-a, a)$ plyne, že nenulové jsou pouze Fourierovy koeficenty u funkcí $\sin(\frac{\pi n}{a}x)$, z L^1 integrability g dále plyne, že tyto Fourierovy koeficienty jsou omezené (dokonce jdou k nule). Tedy:

$$\gamma_n := \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx \quad\implies\quad \exists c > 0\,,\quad |\gamma_n| \le c\,; \tag{10.8}$$

- $g \in L^2((-a, a)) \implies$ první z rovností (10.6) platí alespoň skoro všude na intervalu $\langle 0, a\rangle$; k tomu, aby tato rovnost platila ve všech bodech $\langle 0, a\rangle$ potřebujeme obecně vědět něco víc. Například pokud víme, že řada v (10.6) konverguje na $\langle 0, a\rangle$ stejnoměrně, je jejím součtem spojitá funkce; ta je ovšem skoro všude na $\langle 0, a\rangle$ rovna spojité funkci g, tedy první rovnost v (10.6) platí ve všech bodech, což jsme chtěli vědět. Zmíněná stejnoměrná konvergence je například důsledkem vyšší hladkosti funkce g, která zaručí konvergenci řady $\sum|\gamma_n|$. Abychom připomněli (resp. zformulovali přesněji) toto tvrzení, definujme nejprve třídu funkcí

$$\mathcal{C}^k_{\text{per}}(\mathbb{R}) := \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R});\ \exists p \in \mathbb{R}, \text{že } g \text{ je } p\text{-periodická a po částech třídy } \mathcal{C}^k \text{ na } \mathbb{R}\}\,. \tag{10.9}$$

Potom platí:

$$g \in \mathcal{C}^k_{\text{per}}(\mathbb{R}) \quad\implies\quad \sum n^{k-1}|\gamma_n| < \infty\,, \tag{10.10}$$

[15] Byl bych rád, kdybyste si z následující diskuse odnesli jednak dojem, že kdybyste chtěli, uměli byste každý výpočet provedený touto metodou odůvodnit rigorózně, a jednak pocit, že není nezbytně nutné, abyste to vždy dělali. ☺

v našem případě tedy

$$g \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \sum |\gamma_n| < \infty\,, \tag{10.11}$$

odkud podle Weierstrassova kriteria obdržíme stejnoměrnou konvergenci řady v (10.6). Výsledek (10.11) budeme ještě potřebovat.

ad 2. Provedeme následující klíčový odhad členů řady (10.7):

$$A_n := \left|\gamma_n \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right| \le |\gamma_n|\, e^{-\frac{n\pi}{a}y} \underbrace{\left|\frac{1 - e^{-\frac{2n\pi}{a}(b-y)}}{1 - e^{-\frac{2n\pi}{a}b}}\right|}_{=:Z} \le c\,|\gamma_n|\, e^{-\frac{n\pi}{a}y}\,, \tag{10.12}$$

neboť výraz Z je omezen konstantou $c > 0$ (je $n \ge 1$ a tedy jmenovatel je odražený od nuly, zatímco čitatel je omezený shora). Pro použití Weierstrassova kriteria pro stejnoměrnou konvergenci je potřeba, aby výraz vpravo v (10.12) byl dále odhadnut členy konvergentní číselné řady (tj. řady, jejíž členy nezávisí na y) . Kdyby platilo (10.11), stačilo by uvážit, že $|e^{-\frac{n\pi}{a}y}| \le 1$, my však máme obecně pouze omezenost koeficientů γ_n (viz (10.8)), a tedy obecně $A_n \le c$, kterýžto odhad nelze pro $y \in \langle 0, b\rangle$ a omezená γ_n zlepšit. Proto se omezíme pouze na $y \ge \varepsilon$, což nám dá

$$A_n \le c\,|\gamma_n|\, e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon} \le \tilde{c}\, e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}\,, \quad y \ge \varepsilon\,, \qquad \forall \varepsilon > 0\,, \tag{10.13}$$

odkud plyne, že řada (10.7) je stejnoměrně konvergentní na $\langle 0, a\rangle \times \langle \varepsilon, b\rangle$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a je tedy lokálně stejnoměrně konvergentní (dokonce) na $\langle 0, a\rangle \times (0, b\rangle$.

Řady, které vzniknou formálním prvním či druhým derivováním (podle x či y) za znamením sumy v (10.7) se budou lišit od řady v (10.7) zejména tím, že budou obsahovat členy $\left(\frac{n\pi}{a}\right)^k$, kde $k = 1, 2$ je počet provedených derivací. Proto lze členy těchto řad odhadnout naprosto stejným postupem pomocí

$$\tilde{c}\, n^k e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}\,, \quad y \ge \varepsilon\,, \qquad \forall \varepsilon > 0\,, \tag{10.14}$$

což jsou opět členy konvergentní číselné řady. Bod 2 je tedy ukázán, dokonce i pokud platí pouze $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle)$.

ad 3. Už v předchozím bodě jsme naznačili, že pokud by platilo $\sum |\gamma_n| < \infty$ (tj. například pro $g \in \mathcal{C}^1(\langle 0, a\rangle)$), lze odhad (10.13) upravit takto:

$$A_n \le c\,|\gamma_n|\, e^{-\frac{n\pi}{a}y} \le c|\gamma_n| \qquad \forall y \ge 0\,, \tag{10.15}$$

což dává kýženou stejnoměrnou konvergenci řady (10.7) na celém uzavřeném obdélníku $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle$. Pro obecné $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle)$ je nutno postupovat opatrněji:

- Aproximujeme funkci $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle)$ posloupností funkcí[16] $g_m \in \mathcal{C}^1(\langle 0, a\rangle)$, takových, že $g_m(0) = g_m(a) = 0$ a $g_m \rightrightarrows g$ na $\langle 0, a\rangle$.
- Postupem jako výše odvodíme, že pro $\gamma_{mn} = \frac{2}{a}\int\limits_0^a g_m(x) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right) dx$ jsou funkce

$$u_m(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{mn} \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{10.16}$$

  řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na obdélníku $(0, a) \times (0, b)$ s okrajovou podmínkou $g_m(x)$ pro $y = 0, x \in \langle 0, a\rangle$, a jinde nulovou.
- Lze ukázat (viz přednáška - například 1. věta Harnackova nebo princip maxima), že potom $u_m \rightrightarrows u$ na $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle$, přičemž u je klasickým řešením úlohy (10.1) a tím je náš problem vyřešen.[17]

[16] Rozmyslete si, že to lze.

[17] Ovšem pozor, tato limitní funkce u pouze „existuje“, ale pro obecné $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle)$ nemusí být vyjádřitelná řadou tvaru (10.7). Pokud chcete mít řešení v tomto tvaru, musíte takjakotak zadat okrajovou podmínku g „o něco lepší“ než pouze spojitou. Tak co, sílí ve vás pocit, zmíněný v poznámce pod čarou číslo 5? ☺

10.3 Dirichletova okrajová podmínka „na všech stranách obdélníka“

Máme zadaný problém

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b)\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u(x,0) = g_1(x)\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ & u(x,b) = g_2(x)\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ & u(0,y) = g_3(x)\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,, \\ & u(a,y) = g_4(x)\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,. \end{array} \tag{10.17}$$

Opět předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$, a že v rozích obdélníka $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ platí tzv. podmínky souhlasu, tj. platí $g_1(0) = g_3(0)$, $g_1(a) = g_4(0)$, $\ldots$, tedy že funkce definované na sousedních stranách obdélníka se rovnají ve společném vrcholu. Okrajovou podmínku pak můžeme pro zkrácení zapisovat $u(x,y)|_{\partial\Omega} = g(x)$, kde $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.
Úlohu vyřešíme ve dvou krocích. Nejprve přičteme k funkci $g(x,y)$ vhodnou funkci $c(x,y)$ tak, aby platilo $\Delta c(x,y) = 0$ uvnitř obdélníka a navíc aby hodnota rozdílu $g(x,y) - c(x,y)$ v rozích obdélníka byla nulová. Toho lze vždy dosáhnout: zvolíme-li funkci c tvaru

$$c(x,y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy\,, \tag{10.18}$$

bude pro libovolnou volbu konstant c_0, c_1, c_2, c_3 platit $\Delta c(x,y) = 0$ uvnitř obdélníka. Konstanty pak najdeme takové, aby hodnota rozdílu $g(x,y) - c(x,y)$ v rozích obdélníka byla nulová (rozmyslete si, že to vždy lze[18].
Nyní budeme funkci $u(x,t)$ hledat ve tvaru

$$u(x,t) = v(x,t) + c(x,t)\,.$$

Díky vlastnostem funkce c máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \iff \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,,$$

a úlohu pro u tedy vyřešíme, pokud najdeme funkci $v(x,y)$ takovou, že

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & v(x,0) = -c(x,0) + g_1(x)\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ & v(x,b) = -c(x,b) + g_2(x)\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ & v(0,y) = -c(0,y) + g_3(x)\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,, \\ & v(a,y) = -c(a,y) + g_4(x)\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,. \end{array} \tag{10.19}$$

Zbývá tedy nalézt řešení problému pro funkci $v(x,y)$. To je ale jednoduché. Využijeme toho, že okrajová podmínka pro funkci v má díky naší konstrukci nulové hodnoty ve všech rozích obdélníka, a napíšeme $v(x,y)$ jako součet čtyř funkcí

$$v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) + v_3(x,y) + v_4(x,y),$$

kde každá z funkcí $v_i(x,y)$ řeší problém typu „Dirichletova okrajová podmínka na jedné straně obdélníka“ (viz minulé cvičení). Například problém pro $v_1(x,y)$ je

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & v(x,0) = -c(x,0) + g_1(x)\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ & v(x,b) = 0\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ & v(0,y) = 0\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,, \\ & v(a,y) = 0\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,, \end{array}$$

[18]Ukažte: označíme-li $h_1 := g(0,0)$, $h_2 := g(a,0)$, $h_3 := g(0,b)$, $h_4 := g(a,b)$ hodnoty okrajové podmínky g v rozích obdélníka $(0,a) \times (0,b)$, pak hledanou funkcí c je funkce tvaru (10.18), kde $c_0 := h_1$, $c_1 := \frac{1}{a}(h_2 - h_1)$, $c_2 := \frac{1}{b}(h_3 - h_1)$, $c_3 := \frac{1}{ab}(h_4 - h_3 - h_2 + h_1)$.

pro $v_2(x,y)$ by okrajové podmínky byly

$$\begin{array}{ll} v(x,0) = 0\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ v(x,b) = -c(x,b) + g_2(x)\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ v(0,y) = 0\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,, \\ v(a,y) = 0\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,, \end{array}$$

a obdobně pro zbývající dvě funkce. Z linearity rovnice je zřejmé, že součet funkcí $v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) + v_3(x,y) + v_4(x,y)$ je řešením úlohy pro $v(x,y)$.
Tím jsme si rozmysleli, že problém (10.17) umíme řešit.

10.4 Nulová Dirichletova okrajová podmínka, nenulová pravá strana

Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplace-Poissonovu rovnici na obdélníku. Návod:

1. Předně lze předpokládat, že Dirichletova podmínka je nulová: pokud by tomu tak nebylo, hledali bychom řešení jako součet dvou funkcí, kde jedna by splňovala rovnici s nenulovou pravou stranou a nulovou Dirichletovou podmínkou, a druhá by splňovalo řešení s nulovou pravou stranou a nenulovou okrajovou podmínkou (takovou úlohu již umíme řešit).
2. Zbývá tedy řešit úlohu typu

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f & \text{pro } [x,y] \in (0,a)\times(0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & u(x,0) = 0\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ & u(x,b) = 0\,, & x \in \langle 0,a\rangle\,, \\ & u(0,y) = 0\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,, \\ & u(a,y) = 0\,, & y \in \langle 0,b\rangle\,. \end{array} \tag{10.20}$$

   Přirozeně předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$, $f \in \mathcal{C}((0,a)\times(0,b))$.
3. Předpokládejme, že funkci $f(x,y)$ lze rozvést (alespoň pro skoro všechna $y \in (0,b)$) do sinové Fourierovy řady[19] vzhledem k proměnné x

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad \text{kde } f_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx\,.$$

   Řešení $u(x,y)$ budeme hledat ve tvaru

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,.$$

   Právě zavedená funkce zřejmě splňuje okrajové podmínky $u(0,y) = 0$ a $u(a,y) = 0$. Dosadíme-li takto definovanou funkci $u(x,t)$ do rovnice, dostaneme (derivujeme nejprve formálně člen po členu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 c_n(y)}{dy} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

   odkud plyne požadavek

$$\frac{d^2 c_n(y)}{dy} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(y) = f_n(y)\,. \tag{10.21}$$

   Okrajové podmínky k této obyčejné diferenciální rovnici získáme z okrajových podmínek původního problému $u(x,0) = 0$ a $u(x,b) = 0$, požadujeme proto $c_n(0) = 0$ a $c_n(b) = 0$.
4. Dořešíme celou úlohu: obyčejnou diferenciální rovnici vyřešíme metodou variace konstant, řešení homogenní rovnice je

$$c_n(y) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + b_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

   variací konstant získáme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dy}\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{db_n}{dy}\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) &= 0\,, \\ \frac{n\pi}{a}\left(\frac{da_n}{dy}\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{db_n}{dy}\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right) &= f_n(y)\,, \end{aligned}$$

[19] Viz „Diskusi formálního výsledku“ v minulém cvičení.

odkud

$$\frac{da_n}{dy} = \frac{a}{n\pi} f_n(y) \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \quad \Longrightarrow \quad a_n(y) = \frac{a}{n\pi} \int\limits_0^y f_n(s) \cosh\left(\frac{n\pi}{a} s\right) ds\,,$$

$$\frac{db_n}{dy} = -\frac{a}{n\pi} f_n(y) \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \quad \Longrightarrow \quad b_n(y) = -\frac{a}{n\pi} \int\limits_0^y f_n(s) \sinh\left(\frac{n\pi}{a} s\right) ds\,.$$

Právě získané vyjádření "konstant" a_n a b_n dosadíme do tvaru homogenního řešení $c_n(y)$ a dostaneme (použili jsme součtový vzorec pro hyperbolické funkce) obecné řešení rovnice (10.21)

$$c_n(y) = \alpha_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + \beta_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + \frac{a}{n\pi} \int\limits_0^y f_n(s) \sinh\left((y-s)\,\frac{n\pi}{a}\right) ds, .$$

Použitím okrajových podmínek $c_n(0) = 0$ a $c_n(b) = 0$ určíme konstanty α_n a β_n

$$c_n(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta_n = 0$$

$$c_n(b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_n = -\frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \frac{a}{n\pi} \int\limits_0^b f_n(s) \sinh\left((y-s)\,\frac{n\pi}{a}\right) ds\,,$$

čímž jsme vyřešili obyčejnou diferenciální rovnici pro $c_n(y)$. Získané $c_n(y)$ dosadíme zpět do vyjádření funkce $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$ a dostaneme řešení původního problému (10.20)

$$\begin{aligned} u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(&-\frac{a}{n\pi} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \int\limits_0^b f_n(s) \sinh\left((y-s)\,\frac{n\pi}{a}\right) ds + \\ &+ \frac{a}{n\pi} \int\limits_0^y f_n(s) \sinh\left((y-s)\,\frac{n\pi}{a}\right) ds \Bigg) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)\,, \end{aligned} \tag{10.22}$$

kde

$$f_n(y) = \frac{2}{a} \int\limits_0^a f(x,y) \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) dx\,.$$

11 Fourierova metoda pro Laplace-Poissonovu rovnici na kruhu

11.1 Dirichletova okrajová úloha

Řešte rovnici $\Delta u = 0$ na kruhu o poloměru $R > 0$, s okrajovou podmínkou $u = g$ na hranici kruhu.

Návod:

1. Nejprve převedeme Laplaceův operátor do polárních souřadnic pomocí vztahů $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Uvažujeme $u(x,y) = u(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$. Pro zkrácení zápisu píšeme $\frac{\partial u}{\partial r} = u_r$ atd. Postupujeme například takto (existují i jiné možnosti): Podle pravidla o derivování složené funkce je

$$\begin{aligned} u_r &= u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi\,, && (11.1)\\ u_\varphi &= u_x(-r\sin\varphi) + u_y(r\cos\varphi)\,. && (11.2)\end{aligned}$$

Odtud (derivujte (11.1) podle r a (11.2) podle φ)

$$\begin{aligned} u_{rr} &= u_{xx}\cos^2\varphi + 2u_{xy}\cos\varphi\sin\varphi + u_{yy}\sin^2\varphi\,, && (11.3)\\ u_{\varphi\varphi} &= u_{xx}r^2\sin^2\varphi - 2u_{xy}r^2\cos\varphi\sin\varphi + u_{yy}r^2\sin^2\varphi && (11.4)\\ &\quad -u_x r\cos\varphi - u_y r\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Porovnáním (11.3) a (11.4) vidíme, že

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} &= u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{r}(u_x\cos\varphi + u_y\sin\varphi)\\ &= \Delta_{x,y}u - \frac{1}{r}u_r \end{aligned}$$

podle (11.1). Celkově tedy $\Delta_{x,y}u = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r$ a Laplaceova rovnice v polárních souřadnicích má tvar

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r = 0\,. \qquad (11.5)$$

2. Hledejme dále řešení ve tvaru

$$u(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} R_n(r)e^{in\varphi}\,, \qquad (11.6)$$

nejprve formálně: Dosazením (11.6) do (11.5) dostaneme $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(r^2R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2R_n(r)\big)e^{in\varphi} = 0$ což vede na (Eulerovu) ODR

$$r^2R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2R_n(r) = 0 \qquad (11.7)$$

pro neznámé funkce $R_n(r)$. Její charakteristický polynom je $\lambda(\lambda-1) + \lambda - n^2 = 0$,[20] odkud máme $\lambda^2 = n^2$ a tedy $\lambda = \pm|n|$, $n \in \mathbb{Z}$. Pro $n = 0$ je $\lambda = 0$ dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu, tedy $R_0(r) = A_0 + B_0\ln r$, A_0, $B_0 \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Pro $n \neq 0$ jsou $\lambda = \pm|n|$ jednonásobnými kořeny charakteristického polynomu, tedy $R_n(r) = A_n r^{|n|} + B_n r^{-|n|}$, A_n, $B_n \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Bereme však do úvahy pouze ta řešení, která jsou na kruhu o poloměru R (speciálně v počátku) omezená (jde nám o klasické řešení, tj. funkci u, mající uvnitř kruhu o poloměru R spojité druhé parciální derivace. Proto

$$u(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n r^{|n|}e^{in\varphi}\,, \qquad (11.8)$$

pro nějaké konstanty $A_n \in \mathbb{R}$.

3. Předpokládejme, že funkci g lze také rozvinout do komplexní Fourierovy řady:

$$g(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{in\varphi}\,, \quad \text{kde tedy } \gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt\,. \qquad (11.9)$$

Porovnáním (11.8) pro $r = R$ a (11.9) dostaneme $A_n = \frac{\gamma_n}{R^{|n|}}$, a tedy konečně

$$u(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n\Big(\frac{r}{R}\Big)^{|n|}e^{in\varphi}\,, \quad \text{kde } \gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt\,. \qquad (11.10)$$

Proveďte diskusi tohoto (formálně obdrženého) řešení, tj. ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci g je $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$, $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$, a $u = g$ na $\partial B_R(0)$.

[20] Zopakujte si řešení Eulerovy ODR: k charakteristickému polynomu této rovnice vede napříkald ansatz $R_n(r) = r^\lambda$.

4. Řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kruhu lze také vyjádřit Poissonovým integrálem (viz přednášku nebo jedno z předchozích cvičení). Poissonův integrál lze pomocí polárních souřadnic v $\mathbb{R}^2$ převést na tvar
$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - t) + r^2}\,dt\,. \tag{11.11}$$
Dosaďte nyní do řady pro funkci u v (11.10) za konstanty γ_n jejich integrální vyjádření, prohoďte sumu a integrál (samozřejmě ukažte, že to lze) a pokuste se sečíst vzniklou řadu.[21] Mělo by vám (nikoli překvapivě) vyjít (11.11).

- **Cvičení pro vaše počítání**

(i) Řešte Laplaceovu rovnici v jednotkovém kruhu, je-li okrajová podmínka rovna $u(1,\varphi) = \cos^2\varphi$.

(ii) Řešte Laplaceovu rovnici v jednotkovém kruhu, je-li okrajová podmínka rovna $u(1,\varphi) = \sin^3\varphi$.

(iii) Řešte Laplace-Poissonovu rovnici $\Delta u = 2$ v obdélníku $(0,a)\times(-b/2,b/2)$, je-li u na hranici

(a) identicky nulové

(b) rovno funkci $x - y + xy$.

[21] Nápověda: při označení $\lambda := \frac{r}{R} \in (0,1)$ a $s := \varphi - t$ ukažte, že $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{|n|} e^{ins} = \mathrm{Re}\left(1 + 2\frac{\lambda e^{is}}{1-\lambda e^{is}}\right) = \frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos s+\lambda^2}$.

12 Fourierova metoda řešení rovnice vedení tepla na intervalu

12.1 Nulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

Řešte následující úlohu pro rovnici vedení tepla ($L > 0$, $T > 0$):

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T)\,, \\ \text{počáteční podmínka} & u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \langle 0, L \rangle\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in \langle 0, T \rangle\,. \end{array} \tag{12.1}$$

Návod:

- Funkci $u(x, t)$ závislou na čase (t) i prostoru (x), hledejme v separovaném tvaru

$$u(x, t) = X(x)Y(t),$$

po dosazení do rovnice (12.1) dostaneme (za standardního předpokladu identické nenulovovsti X a T)

$$\frac{1}{a^2 Y(t)} \frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}\,,$$

což vede opět k požadavku existence konstanty λ takové, že

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda\,, \tag{12.2}$$

$$\frac{1}{a^2 Y(t)} \frac{dY(t)}{dt} = \lambda\,. \tag{12.3}$$

Okrajové podmínky pro rovnici (12.2) dostaneme ze zadání (12.1), a sice $X(0) = 0$ a $X(L) = 0$, což plyne z podmínek plynou z $u(0, t) = 0$ a $u(L, t) = 0$. Okrajové podmínky pro funkci Y nelze v této chvíli jednoduše zformulovat. I to je důvod, proč řešíme nejprve úlohu pro X.

- Řešení úlohy pro funkci X se principiálně liší podle znaménka konstanty λ:
  - je-li $\lambda > 0$, pak je řešením rovnice (12.2) funkce

$$X(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}},$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Je zřejmé, že okrajové podmínky můžeme splnit pouze volbou $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, tzn. $X(x) \equiv 0$. Zajímají nás však pouze identicky nenulová řešení, tedy tento případ vyloučíme.

  - je-li $\lambda = 0$, pak je řešením rovnice (12.2) funkce

$$X(x) = c_1 x + c_2,$$

kde $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, jak opět plyne z okrajových podmínek, závěr je tedy stejný jako v předchozím případě.

  - je-li $\lambda < 0$, pak je řešením rovnice (12.2) funkce

$$X(x) = c_1 \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) + c_2 \cos\left(x\sqrt{|\lambda|}\right)$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Lze poměrně jednoduše nahlédnout, že netriviální řešení pro X dostaneme pouze v případě, kdy bude konstanta λ tvaru

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{12.4}$$

Dostali jsme tedy, že všechna netriviální řešení problému pro X vypadají takto:

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{12.5}$$

- Pro λ_n tvaru (12.4) dostaneme rovnici (12.3) pro funkci $Y(t) \equiv Y_n(t)$ ve tvaru

$$\frac{dY_n(t)}{dt} = \lambda_n a^2 Y_n(t),$$

obecným řešením této rovnice je funkce

$$Y_n(t) = a_n e^{\lambda_n a^2 t} = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}, \tag{12.6}$$

kde a_n jsou libovolné konstanty.

- Našli jsme tedy funkce $u_n(x,t)$, které pro libovolné přirozené číslo n splňují rovnici (12.1) a okrajové podmínky (součin konstant c_n a a_n přeznačíme na c_n),

$$u_n(x,t) = X_n(x)Y_n(x) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) . \tag{12.7}$$

K úplnému řešení problému (12.1) je ještě třeba splnit počáteční podmínku. Řešení celého hledáme jako nekonečnou sumu funkcí $u_n(x,t)$,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),$$

v případě „dostatečně rozumné“ konvergence této řady bude funkce u splňovat rovnici i okrajové podmínky. Zbývá vyřešit otázku nabývání počáteční podmínky. Chceme, aby platilo $u(x,0) = \varphi(x)$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = \varphi(x), \quad \text{pro } x \in \langle 0, L\rangle,$$

což neznamená nic jiného, než že koeficienty c_n je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady (předpokládáme tedy, že φ lze takt orozvinout). Koeficienty c_n pak spočteme jako

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx \tag{12.8}$$

a obdrželi jsme (formálně, tj. bez toho, že bychom diskutovali kvalitu konvergence atd...) řešení problému (12.1),

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \quad \text{kde } c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx\,. \tag{12.9}$$

12.2 Nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T)\,, \\ \text{počáteční podmínka} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in \langle 0, L\rangle\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in \langle 0, T\rangle\,. \end{array} \tag{12.10}$$

Návod:

- Vyjdeme z toho, že již umíme řešit rovnici s nulovou pravou stranou a nulovou okrajovou podmínkou, viz (12.9). Předpokládejme nyní, že pravou stranu f lze rozvést do sinové Fourierovy řady vůči prostorové proměnné, tj.

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \text{ kde } f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx$$

Řešení problému (12.10) budeme hledat metodou variace konstant v (12.9), tj. píšeme koeficienty c_n v rozvoji funkce $u(x,t)$ jako funkce času

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) .$$

- Dosadíme takto navrženou funkci do rovnice (12.10), čistě formálně zderivujeme člen po členu, atd... Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{dc_n(t)}{dt}e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} - f_n(t)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = 0,$$

což má platit pro každé $x \in (0,L)$ a $t \in (0,T)$. Z jednoznačnosti Fourierových rozvojů tedy plyne, že pro každé n musí být splněna obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = f_n(t)e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t},$$

jejímž řešením je

$$c_n(t) = c_n(0) + \int_0^t f_n(\tau)e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau}d\tau$$

Dosadíme–li takto vypočtené koeficienty $c_n(t)$ do rozvoje funkce $u(x,t)$, bude výsledkem

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n(0)+\int_0^t f_n(\tau)e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2\tau}d\tau\right)e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2t}\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),$$

konstanty $c_n(0)$ určíme z počáteční podmínky úlohy (12.10). Chceme, aby platilo $u(x,0)=\varphi(x)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(0)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)=\varphi(x)$$

což neznamená nic jiného, než že koeficienty $c_n(0)$ je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady.

- Formálním řešením problému (12.10) je tedy funkce

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(0)e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2t}\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)+\left(\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \tag{12.11}$$

kde

$$c_n(0)=\frac{2}{L}\int\limits_0^L\varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx\,,\qquad f_n(t)=\frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x,t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx\,.$$

12.3 Nulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nulová počáteční podmínka

$$\begin{array}{lll}\text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & \text{pro } x\in(0,L)\,,t\in(0,T)\,,\\ \text{počáteční podmínka} & u(x,0)=0 & x\in\langle 0,L\rangle\,,\\ \text{okrajová podmínka} & u(0,t)=\ell(t) & t\in\langle 0,T\rangle\,,\\ & u(L,t)=p(t)\,. & \end{array}\tag{12.12}$$

Návod: S nenulovými okrajovými podmínkami se vypořádáme tak, že úlohu (12.12) převedeme na úlohu (12.10): funkci $u(x,t)$ hledáme jako součet dvou funkcí

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t),$$

kde funkci $v(x,t)$ definujeme takto

$$v(x,t)=\left(1-\frac{x}{L}\right)\ell(t)+\frac{x}{L}p(t),$$

pak platí, že

$$\begin{aligned}v(0,t)&=\ell(t)\,,\\ v(L,t)&=p(t)\,.\end{aligned}$$

Funkce $v(x,t)$ tedy splňuje okrajové podmínky problému (12.12). Dosadíme–li rozepsanou funkci $u(x,t)$ do zadání rovnice (12.12), dostaneme

$$\frac{\partial w}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\left(\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=-\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{d\ell(t)}{dt}-\frac{x}{L}\frac{dp(t)}{dt},$$

a počáteční podmínku pro $w(x,0)=-v(x,0)=-\left(\left(1-\frac{x}{L}\right)l(0)+\frac{x}{L}p(0)\right)$. Je tedy vidět, že problém pro funkci w je problém typu „nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka“, který jsme řešili v předchozím bodu.

12.4 Obecný problém: nenulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

$$\begin{array}{lll}\text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f & \text{pro } x\in(0,L)\,,t\in(0,T)\,,\\ \text{počáteční podmínka} & u(x,0)=\varphi(x) & x\in\langle 0,L\rangle\,,\\ \text{okrajová podmínka} & u(0,t)=l(t) & t\in\langle 0,T\rangle\,,\\ & u(L,t)=p(t)\,. & \end{array}\tag{12.13}$$

Návod: Řešení problému převedeme na řešení již známých případů. Hledanou funkci $u(x,t)$ rozdělíme na dvě funkce, funkci $u_h(x,t)$, která zajistí splnění okrajových podmínek, a funkci $u_r(x,t)$, která zajistí splnění rovnice a počáteční podmínky. Definujeme tedy rozklad $u(x,t) = u_h(x,t) + u_r(x,t)$ a příslušné problémy

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u_r}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\ \text{počáteční podmínka} & u_r(x,0) = \varphi(x) & x \in \langle 0, L\rangle\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u_r(0,t) = 0 & t \in \langle 0, T\rangle\,, \\ & u_r(L,t) = 0\,. & \end{array}$$

Toto je problém, který již umíme řešit (zadání viz. (12.10), řešení viz. (12.11)). Druhý problém je tvaru

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u_h}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T)\,, \\ \text{počáteční podmínka} & u_h(x,0) = 0 & x \in \langle 0, L\rangle\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u_h(0,t) = \ell(t) & t \in \langle 0, T\rangle\,, \\ & u_h(L,t) = p(t)\,. & \end{array}$$

Tento problém jsme již také zkoumali (12.12). Z linearity úlohy je zřejmé, že funkce $u(x,t)$, která je součtem funkcí $u_h(x,t)$ a $u_r(x,t)$, je řešením původní úlohy (12.13).

13 Fourierova metoda pro řešení vlnové rovnice na intervalu

Jde o problém tvaru

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T)\,, \\ \text{počáteční podmínky} & u(x,0) = \varphi(x)\,, & x \in \langle 0, L\rangle\,, \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)\,, & \\ \text{okrajové podmínky} & u(0,t) = \ell(t)\,, & t \in \langle 0, T\rangle\,, \\ & u(L,t) = p(t)\,. & \end{array} \tag{13.14}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, a že f je funkce proměnných x a t.

Návod: Rozdělte úlohu na dvě úlohy, stejně jako jsme to udělali v případě úlohy (12.13). Postup řešení těchto partikulárních úloh je principiálně stejný jako v případě rovnice vedení tepla, který jsme právě dodiskutovali. Možná bude cennější (a jako prevence znechucení z dalších stránek „stále stejných“ výpočtů i zdravější), když se pokusíte celý proces si v případě vlnové rovnice projít sami, než kdybych jej zde metodou copy-and-paste-and-modify naservíroval.