Vybrané partie z matematiky pro fyziky - NMAF006, LS 2015/16

Poznámky přednášejícího

Předmluva

Poznámky, které najdete na následujících cca 80 stranách, nejsou ničím jiným než rozšířenou přípravou vyučujícího na přednášku. On sám by pravděpodobně psal tuto přípravu daleko stručněji, kdyby počítal s tím, že do těchto poznámek bude nahlížet jen on. Poznámky tedy byly psány s vědomím, že by měly sloužit i studentům, kteří se o tuto přenášku zajímají.

Poznámky neprošly žádnou pečlivou korekturou, takže jejich autor uvítá jakékoli připomínky či postřehy.

Tyto poznámky jsou zároveň nadmnožinou toho, co bylo skutečně přednášeno – některé části jsou zde jen pro zajímavost nebo na doplnění. Při přípravě na zkoušku proto kombinujte tento text s požadavky, které najdete na příslušné webové stránce přednášejícícho.

M. Rokyta, 16. 5. 2016

Literatura

[1] P. Čihák, [M.Rokyta] a kol.: Matematická analýza pro fyziky (V), skriptum MFF UK, Matfyzpress, 2003.

[2] E. Kreyszig: Introductory functional analysis with applications, John Willey & Sons, 1978.

[3] J. Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy, skriptum MFF UK, Karolinum, 1998.

[4] K. Najzar: Funkcionální analýza, skriptum MFF UK, SPN, 1981.

[5] W. Rudin: Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[6] A. E. Taylor: Úvod do funkcionální analýzy, Academia, Praha, 1973.

[7] ... tyto poznámky...

1. ÚVOD: OPERÁTOROVÁ TRIVIA

Co budeme považovat za známé:

• <u>Vektorový prostor</u> X nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ (skaláry). Tam, kde nebude důležité, jestli jde o $\mathbb{R}$ nebo o $\mathbb{C}$, budeme někdy používat značení $\mathbb{K}$ (znamenající tedy „buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$“).

Kromě termínu „vektorový prostor“ (VP) se používá i termín „lineární prostor“ (LP), případně „lineární vektorový prostor“ (LVP).

• <u>Lineárně nezávislá</u> (LN) <u>množina</u> ve VP: $M \subseteq X$ je LN, pokud

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

pro všechny možné n-tice $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ a všechny skaláry $a_j \in \mathbb{K}$.

<u>Pozn.</u>: I v případě, že M je nekonečná, uvažujeme pouze konečné součty (tj. všechny možné „libovolně dlouhé, ale konečné“ součty). Je totiž potřeba si uvědomit, že v obecném VP není definován pojem konvergence, a tedy samotný pojem nekonečného součtu nemá v obecném VP smysl.

• <u>Báze X</u> ($X \neq \emptyset, X \neq \{0\}$):

1) Pokud existuje <u>konečná</u> LN množina B v X taková, že její lineární obal

$$\mathrm{Lin}(B) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \,,\ x_j \in B,\ a_j \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

je roven X (říkáme, že M <u>generuje</u> X), pak takovou množinu nazveme <u>bází X</u>. Její mohutnost je pak určena jednoznačně (bez důkazu) a tomuto číslu pak říkáme <u>dimenze X</u>: $\dim X = \mathrm{moh}(B) \in \mathbb{N}$

2) Pokud v X $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje LN množina o n prvcích, říkáme, že $\dim X = \infty$. V tomto případě je pojem báze složitější:

bází X je v tomto případě taková <u>nekonečná množina</u> B, která splňuje

a) B je LN (ve smyslu všech konečných lin. kombinací – viz výše)

b) $\forall x \in X \ \exists\, m(x) \in \mathbb{N}$ a odpovídající <u>konečný počet</u> prvků báze $x_1, \dots, x_{m(x)}$ a $a_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \dots, m(x)$, že
$$x = \sum_{j=1}^{m(x)} a_j x_j .$$

<u>Pozn:</u> • I zde tedy jde principiálně o konečné součty prvků, vybraných z nekonečné množiny (pro různá x může jít o různé sady prvků báze).

• Této nekonečné bázi se říká <u>Hamelova báze X nad $\mathbb{K}$</u>. Otázka zní, zda každý VP X (který nemá konečné dimenze) má Hamelovu bázi. Odpověď ANO je důsledkem <u>axiomu výběru</u> (kdo jej tedy neuznává, pro něj je odpověď tedy NE)

Př: • $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{VP}}}{\mathbb{R}}$ nad $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{skaláry}}}{\mathbb{R}}$ má dim 1 : $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists\, a = x \in \mathbb{R}$, že $x = a \cdot 1$. Báze je tedy $\{1\}$.

• $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ má dim $= n$.

• $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{VP}}}{\mathbb{R}}$ nad $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{skaláry}}}{\mathbb{Q}}$ má dim $= \infty$: Lze totiž ukázat, že žádná konečná množina reálných čísel nevygeneruje pomocí racionálních koeficientů všechna reálná čísla.

Tím je vyřešen problém dimenze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Všimněte si, že dimenzi ∞ lze určit i bez znalosti odpovědi na otázku existence báze, tj. bez nutnosti axiomu výběru. Pokud však připustíme axiom výběru, pak existuje Hamelova báze $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Q}$, tj. $\exists\, B \subseteq \mathbb{R}$, že

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists\, m(x) \in \mathbb{N} \ \exists\, b_1, \dots, b_{m(x)} \in B \ \exists\, q_1, \dots, q_{m(x)} \in \mathbb{Q} \ \text{ že } \ x = \sum_{j=1}^{m(x)} q_j b_j .$$

- **Norma na LP**: $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, že
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$
$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

$(X, \|\cdot\|)$ je potom NLP normovaný lineární prostor.
V něm lze definovat konvergenci:
$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \|x_n - x\| < \varepsilon$$
a lze tedy zavést i nekonečné součty.
Dále lze definovat cauchyovskost
$$\{x_n\} \text{ cauchyovská} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m,n \geq n_0\ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$
a úplnost X v normě:
$$(X, \|\cdot\|) \text{ je úplný v normě } \|\cdot\| \overset{def}{\iff} \left(\{x_n\} \text{ cauchyovská} \implies \underline{\underline{\exists x \in X}}\ \ x_n \to x \right)$$
Je-li $(X, \|\cdot\|)$ úplný v normě $\|\cdot\|$, nazývá se Banachův prostor.
(B – prostor)

- Za známé dále považujeme, že pokud $\dim X < \infty$, pak všechny normy na něm jsou ekvivalentní. Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ nazveme ekvivalentní, pokud $\exists\ c_1, c_2 > 0$, že
$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x_1\| \qquad \forall x \in X.$$
- Ekvivalentní normy zachovávají pojem konvergence ($x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$) i cauchyovskosti a tedy i úplnosti. Speciálně: je-li konečnědimenzionální prostor X úplný v $\|\cdot\|$, je úplný i ve všech jiných normách na X.

Toto neplatí v nekonečné dimenzi, např. $C([0,1])$ je úplný v maximové normě $\|f\|_\infty := \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$, ale není úplný v integrální normě
$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f| .$$

- **Skalární součin na LP**: $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ (je-li X nad $\mathbb{C}$, má tedy sk. součin komplexní hodnoty), je takové zobrazení, že platí:

$$(x,y) = \overline{(y,x)}$$

$$(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \qquad \forall x,y,z \in X$$

$$(x,x) \geq 0, \text{ přičemž } (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(\alpha x, y) = \alpha (x,y) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

- Dvojice $(X,(\cdot,\cdot))$ obdařený skalárním součinem se nazve LP se skal. souč., někdy též <u>unitární prostor</u>.
- Snadno lze ukázat, že výraz $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ má všechny vlastnosti normy a tedy:
  - X unitární $\Rightarrow$ X je NLP (s tzv. „normě generovaná sk.s.")
- Pokud je X <u>úplný v normě generované skalárním součinem</u>, říká se mu <u>Hilbertův prostor</u> (H-prostor), tedy
  - X Hilbertův $\Rightarrow$ X Banachův

(naopak to neplatí)

- Na libovolném unitárním prostoru platí <u>Cauchy-Schwartzova nerovnost</u>

$$\forall x,y \in X: \quad |(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \text{kde } \|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

- X unitární; řekneme, že $x,y \in X$ jsou <u>kolmé</u> na X (v odpovídajícím skal. součinu), pokud
  a) $x \neq 0,\ y \neq 0$
  b) $(x,y) = 0$

Značíme $x \perp y$.

Př: $L^2, L^2_\rho, \ell_2, W^{1,2}, W^{k,2}, W^{k,2}_\rho$ jsou Hilbertovy
$C(K)$, L^p pro $p \neq 2$ jsou Banachovy a nejsou Hilbertovy.

Existence normy (sk. součinu, příp. metriky) definuje na LP tzv. geometrické vlastnosti (vzdálenost, konvergence, pro sk.s. i kolmost).

Nyní připomeneme různé pojmy a vlastnosti, související se <u>zobrazeními</u> na vektorových prostorech.

(I) Buďte X, Y LP (tj. nepotřebuji geometrii)

operátor: $T: X \to Y$

funkcionál: $T: X \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

Každý funkcionál je i operátor. Budeme tedy BÚNO definovat další vlastnosti pro operátory.

(II) Operátor $T: X \to Y$ je

- lineární: $T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$ $\quad \forall x,y \in X$, $\forall a,b \in \mathbb{K}$
- nelineární: není lineární.

(III) X, Y NLP:

$T: X \to Y$ je

- omezený: $\forall K>0\ \exists C>0\quad \|x\| \le K \Rightarrow \|Tx\| \le C$ (zobrazuje se „omezené množ. na omezené")
- neomezený: není omezený, tj. $\exists K>0\ \forall C>0\ \exists x_C \in X$ $\quad \|x_C\| \le K\ \&\ \|Tx\| > C$

(IV) X, Y Banachovy

$T: X \to Y$ je

- spojitý: $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$ („Heineova definice")
- nespojitý: není spojitý

Dále již budeme uvažovat jenom Banachovy (příp. Hilbertovy) prostory, tj. vždy budeme mít úplnost.

• Mějme lineární operátor $T: X \to Y$ a definujme číslo

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|. \tag{*}$$

Toto číslo může vyjít i nekonečno (např. pro vhodné neomezený operátor). Pro lin. operátor však vidím:

$$x \neq 0 \Rightarrow \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \|T\|$$ ($\|T\|$ je supremum hodnot)

$\|Tx\| \leq \|T\| . \|x\|$ (to nám platí i pro
$\forall x \neq 0$ $\|T\| = +\infty$)

a pokud $\|T\| < \infty$, tak obě strany jsou konečné a
$\underline{\|Tx\| \leq \|T\|.\|x\| \quad \forall x \in X}$ (tj. včetně 0)

Lemma

Pro lin. operátory máme:

$\underline{T \text{ omezený} \iff \|T\| < \infty}$,

a v tom případě má $\|T\|$ vlastnosti normy (ověřte sami)

(D) $\Rightarrow$: T omez.: $(\exists C \; \forall \|x\| \leq 1 \;\; \|Tx\| \leq C) \Rightarrow \|T\| \leq$

$\Leftarrow$: $\|T\| < \infty$: $\|Tx\| \leq \|T\| . \|x\|$
tj. $\|x\| \leq K \Rightarrow \|Tx\| \leq K\|T\|$. $\boxtimes$

Lemma

Buďte X, Y Banachovy. Pokud je $T: X \to Y$ lineární operátor, tak

$$\boxed{T \text{ omezený} \iff T \text{ spojitý} \iff \|T\| < \infty}$$

(D). Ekvivalenci prvního a třetího výroku už jsme dokázali.
Ohledně prvního a druhého máme:

„$\Rightarrow$": je-li T omezený, tak $\|T(x_n - x)\| \leq c\|x_n - x\|$
a lineárný $\|Tx_n - Tx\| \leq c\|x_n - x\|$
Pokud $x_n \to x$, tak odsud máme $Tx_n \to Tx$, ctd.

„$\Leftarrow$": Ze spojitosti plyne m.j., že pokud $x_n \to 0$, tak $Tx_n \to 0$. $(\forall x_n)$
Proto $\forall \varepsilon$ (např. pro $\varepsilon = 1$) $\exists \delta > 0$ $\|x_n\| < \delta \Rightarrow \|Tx_n\| < 1$
Buď nyní $\|x\| < K$, tak $\left\|\frac{x}{K}\delta\right\| < \delta \Rightarrow \left\|\frac{Tx}{K}\delta\right\| < 1$

$$\|Tx\| < \frac{K}{\delta} =: c$$

$\boxtimes$

<u>Označení</u>:

$\mathcal{L}(X,Y) := \{T: X \to Y,\ X, Y \text{ NLP},\ T \text{ lineární a omezený}\}$.

Lze ukázat, že $\mathcal{L}(X,Y)$ sám o sobě je NLP s normou $\|T\|$, definovanou pomocí (*) na str. 5. Navíc, pokud Y je Banachův, tak i $\mathcal{L}(X,Y)$ je úplný v normě $\|T\|$, a tedy Banachův. Speciálně prostory operátorů $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ jsou vždy Banachovy.

Další používané značení:

$$\mathcal{L}'(X) := \mathcal{L}(X,\mathbb{K}),$$

$$\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X).$$

(V) Vztah konečné a nekonečné dimenze

- Buď $T: X \to Y$, X, Y Banachovy, T lineární; $\boxed{\dim X < \infty}$ } Potom T je omezený a tedy i spojitý.

D. $x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, kde $n = \dim X$; $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ báze X.

$$\Rightarrow Tx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T x_j$$

$$\|Tx\| \le \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \, \|Tx_j\| \le \underbrace{\max_{j=1,\dots,n} \|Tx_j\|}_{=:c} \cdot \overbrace{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|}^{\text{jedna z norem na } X \; \|x\|_S}$$

$=: c$ … konečná a konstantní pro pevně zvolenou bázi

$$\le c\|x\|_S \le \tilde{c}\|x\|$$

ekvivalence všech norem pro $\dim X < \infty$ ☒

Pozn: V konečné dimenzi jsou tedy všechny lineární operátory spojité.
Přirozená otázka: platí to i pro $\dim X = +\infty$?
Ne.

- X, Y NLP, $\dim X = +\infty$, pak $\exists\, T: X \to Y$ lineární a neomezený. (V případě Y = Banachův tedy i nespojitý)

Př: $X = C^1([a,b])$ s normou $\|f\| = \max_{[a,b]} |f(x)|$. (V této normě není X úplný, proč?)
$Y = C([a,b])$ s touto normou (v ní je Y Banachův, proč?)

Buď nyní $f_n(x) = \sin nx$ $\quad f_n \in X$; $\|f_n\| = 1$
$f_n'(x) = n \cos nx$ $\quad f_n' \in Y$; $\|f_n'\| = n$

Omezená množina se zobrazila na neomezenou $\Rightarrow$ operátor je neomezený.

⊠

Cvičení: $\dim X = \infty$, Y Banachův,
Vezměme $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ LN nekonečnou spočetnou množinu prvků v X
BÚNO $\|x_j\| = 1$ (jinak vezmeme místo nich $\frac{x_j}{\|x_j\|}$)

Každou LN množinu lze podle tvr. Zornova lemmatu (je ekvivalentní s axiomem výběru) doplnit na bázi LP. Doplňme ji tedy prvky $\{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$, A … indexová množina.

Potom dle vlastnosti báze $B := \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ platí $\forall x \in X\ \exists n(x), n(x) \in \mathbb{N}$, $\exists a_j, b_j$ skaláry

$$x = \sum_{j=1}^{n(x)} a_j x_j + \sum_{k=1}^{n(x)} b_k z_k .$$

Definujme $Tx := \sum_{j=1}^{n(x)} a_j T x_j$ pro každé $x \in X$.

Tím je definován T na celém X, pokud definujeme Tx_j a Tz_α.
Definujme je takto: $Tx_j = j \quad \forall j \in \mathbb{N}$
$Tz_\alpha = 0 \quad \forall z_\alpha, \alpha \in A$.
Potom T je lineární na X (ověřte), přičemž
$\|x_n\| = 1$, ale $\|Tx_n\| = n \quad \forall x_n$.

⊠

2. Základy spektrální analýzy

2.1. Motivace: řešení jedné ODR

Příklad. Uvažujme počáteční úlohu pro ODR

$$
\begin{aligned}
y'' + y &= f(t), \quad \text{na } (0,a), \quad a>0, \\
y(0) &= 1, \\
y'(0) &= 0,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

kde $f \in C(\langle 0,a\rangle)$. Řešení této úlohy pro $f \equiv 0$ je $y = \cos x$, jak snadno zjistíme například metodou charakteristického polynomu. Pro nalezení jednoho (partikulárního) řešení rovnice s pravou stranou f můžeme použít např. metodu variace konstant.

Z tvaru $\quad y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$

dostaneme rovnice pro $c_1(x), c_2(x)$:

$$
\begin{aligned}
c_1' \cos x + c_2' \sin x &= 0 \\
-c_1' \sin x + c_2' \cos x &= f(x)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

odkud plyne
$$
\begin{aligned}
c_1' &= -f \cdot \sin x \\
c_2' &= f \cdot \cos x
\end{aligned}
$$

a tedy $\quad c_1(x) = -\int_0^x f(t)\sin t\,dt, \qquad c_2(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,dt$ jsou jedna z řešení (2). *)

Dostáváme

$$
y_p = \sin x \int_0^x f(t)\cos t\,dt - \cos x \int_0^x f(t)\sin t\,dt =
$$
$$
= \int_0^x f(t)\left(\sin x \cos t - \cos x \sin t\right) dt = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt,
$$

---

*) Pozn.: Mohli jsme samozřejmě zvolit pro c_1 resp. c_2 i jinou z primitivních funkcí k $-f(x)\sin x$ resp. $f(x)\cos x$ (lišících se však jen o konst.), tato volba však způsobí, že y_p splňuje počáteční podmínky.

tedy celkově

$$y(x) = \cos x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt . \qquad (3)$$

Dosazením se lze přesvědčit, že funkce y daná předpisem (3) je řešením úlohy (1) (a z teorie víme, že jediným).

Poznámka: Při dosazování (3) do (1) se může hodit následující lemma o derivování integrálu jak podle parametru, tak podle mezí:

$\boxed{\text{Lemma}}$ Buďte $a, b \in C^1((\alpha,\beta))$, $a((\alpha,\beta)) \subset (A,B)$, $b((\alpha,\beta)) \subset (A,B)$, $g \in C^1((\alpha,\beta)\times(A,B))$, a nechť funkce a, b, g a $\frac{\partial g}{\partial x}$ jsou omezené na svých definičních oborech. Potom:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt + g(b(x))\cdot b'(x) - g(a(x))\cdot a'(x), \qquad (4)$$

$$x \in (\alpha,\beta).$$

Důkaz

Protože g je spojitá ve druhé proměnné, existuje $G \in C^1((\alpha,\beta)\times(A,B))$ taková, že

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = g(x,t) \quad , (x,t) \in (\alpha,\beta)\times(A,B). \qquad (4.a)$$

Podle Newton-Leibnizovy formule tedy je

$$\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt = G(x,b(x)) - G(x,a(x)). \qquad \Big/ \ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big(G(x,b(x)) - G(x,a(x)) \Big) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}(x,b(x)) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,a(x))}_{\text{derivace podle 1. proměnné}} + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}(x,b(x))}_{g(x,b(x))}\cdot b'(x) - \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}(x,a(x))}_{g(x,a(x))}\cdot a'(x)$$

dle (4.a)

Důkaz se dokončí tím, že se ověří, že

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,c) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,d) = \int_d^c \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Skutečně, je-li $G(x,t)$ primitivní ke $g(x,t)$ v proměnné t, je $\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ primitivní ke $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$, v proměnné t, za uvedených předpokladů. Proveďte podrobně.

$\boxtimes$

Uvažujme nyní modifikaci úlohy (1), a sice

$$\begin{aligned} y'' + y &= f(x)\,y(x) \quad \text{na } (0,a),\quad a>0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

na pravé straně rovnice máme tedy ve zvýrazněném členu jakousi „zpětnou vazbu".

Proto na základě analogie si troufneme vyslovit následující hypotézu:

Pokud existuje funkce $y \in C(\langle 0,a\rangle)$, která splňuje vztah

$$y(x) = \cos x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,y(t)\,dt, \tag{6}$$

pak je tato funkce třídy $C^2(\langle 0,a\rangle)$ a řeší úlohu (5).
Ověříme tuto hypotézu s využitím lemmatu z předchozí strany.
Především platí, že pokud je $y \in C(\langle 0,a\rangle)$, je integrand v (6) spojitý, tedy je $y \in C^1(\langle 0,a\rangle)$, a máme

$$y'(x) = -\sin x + \int_0^x f(t)\cos(x-t)\,y(t)\,dt + 0, \tag{7}$$

odkud stejnou úvahou máme $y' \in C^1(\langle 0,a\rangle)$, tedy $y \in C^2(\langle 0,a\rangle)$, a

$$y''(x) = -\cos x - \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,y(t)\,dt + f(x)\,y(x). \tag{8}$$

Z (6)–(8) dostaneme $y'' + y = f(x)\,y(x)$, stejně jako $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Ověřili jsme tedy, že

> Pokud existuje $y \in C(\langle 0,a\rangle)$ taková, že platí (6), je tato funkce klasickým řešením úlohy (5). (9)

Zatím jsme úlohu (6) nevyřešili, pouze jsme ji přeformulovali. Uvidíme však, že vhodným pohledem na toto přeformulování budeme schopni otázku existence (i jednoznačnosti) řešení odpovědět.

Píšeme

$$y(x) = \underset{\substack{\| \\ u(x)}}{\cos x} + \int_0^x \underbrace{\sin(x-t)\,f(t)}_{K(x,t)\ \dots\ \text{integrační jádro}}\,y(t)\,dt$$

tj.

$$y(x) = u(x) + \int_0^x K(x,t)\,y(t)\,dt \tag{10}$$

což je přeformulování úlohy (6) na obecnější integrální rovnici (10).

Vyšetříme však ještě obecnější formulaci. Označíme

$$Ty(x) := \int_0^x K(x,t)\, y(t)\,dt = \int_0^x \sin(x-t)\, f(t)\, y(t)\,dt, \qquad (11)$$

kde $T : C(\langle 0,a\rangle) \longrightarrow C(\langle 0,a\rangle)$ je (evidentně) lineární operátor. Úlohu (6) resp. (10) pak lze chápat jako rovnici

$$y = u + Ty \qquad (12)$$

na Banachově prostoru $C(\langle 0,a\rangle)$. (12) můžeme psát dále

$$(Id - T)y = u$$

, kde Id je identický operátor na $C(\langle 0,a\rangle)$, nebo (zatím ovšem zcela formálně, protože nevíme, zda něco jako „inverzní operátor k $Id - T$" existuje)

$$y = (Id - T)^{-1} u. \qquad (13)$$

Formulace (13) nás dovedla až k těmto otázkám:

- Jaké jsou vlastnosti operátoru T z (11)?
- Za jakých podmínek existuje operátor inverzní k $Id - T$, a jaké má vlastnosti?
- Je y, „definované" pomocí (13) řešením naší úlohy?

Nejprve odpovíme na první otázku: T je lineární a omezený, tedy spojitý operátor na $C(\langle 0,a\rangle)$, tedy $T \in \mathcal{L}(C(\langle 0,a\rangle))$.

Připomeňme:

$$\|y\|_{C(\langle 0,a\rangle)} \equiv \|y\|_\infty = \sup_{\langle 0,a\rangle} |y(x)|.$$

<u>Důkaz</u>: Linearita je zřejmá, pro omezenost určíme nejprve

$$\|Ty\|_\infty = \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} \left| \int_0^x \sin(x-t)\, f(t)\, y(t)\,dt \right| \le$$

$$\le \sup_{x\in\langle 0,a\rangle} \int_0^x |f(t)|\cdot|y(t)|\,dt \le a \cdot \|f\|_\infty \|y\|_\infty,$$

Protože $\|T\|_{\mathcal{L}(C(\langle 0,a\rangle))} = \sup_{\|y\|_\infty \le 1} \|Ty\|_\infty \le \sup_{\|y\|_\infty \le 1} a\|f\|_\infty \|y\|_\infty$

$$\le a\|f\|_\infty < \infty, \tag{13b}$$

jde tedy (pokud $\langle 0,a\rangle$ je omezený interval) o omezený operátor. $\boxtimes$

Pro odpověď na další otázky nejprve přichystáme následující větu. Všimněte si, že její vnější abstrakce je pouze zdánlivá: v podstatě jde o popis naší úlohy v operátorové řeči.

Věta 1 Buď X Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$. Definujme $T^0 \equiv Id$, $T^{j+1}y = T(T^j y)$ tzv. iterovaný operátor. Dále nechť je splněna alespoň jedna z následujících tří podmínek:

(a) $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$,

(b) $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$,

(c) $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j y\|_X < \infty \quad \forall y \in X$,

Potom

1) $\forall u \in X$ existuje jediné $y \in X$ takové, že $(Id - T)y = u$.

2) Definujeme-li zobrazení "$u \mapsto y$" z předchozího bodu, a označíme-li jej $(Id-T)^{-1}$, platí:

$$(Id-T)^{-1}(Id-T) = (Id-T)(Id-T)^{-1} = Id,$$

a navíc

$$(Id-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \quad \left(:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} T^j \right) \tag{14}$$

ve smyslu konvergence v $\mathcal{L}(X)$.

Pozn.:

① Řadě ve (14) se říká von Neumannova řada operátoru T.

② V následujícím ukážeme, že (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c), že jde tedy o řetězec podmínek.
Platí
$$\|T^2 y\|_X = \|T(Ty)\|_X \le \|T\|_{\mathcal{L}(X)} \|Ty\|_X \le \|T\|^2_{\mathcal{L}(X)} \|y\|_X .$$

Odtud $\|T^2\| = \sup\limits_{\|y\|_X \le 1} \|T^2 y\|_X \le \|T\|^2$ a indukcí snadno
$$\|T^j\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|T\|^j_{\mathcal{L}(X)} . \tag{15}$$

Pokud tedy platí (a), je $\sum\limits_{j=0}^{n} \|T^j\| \le \sum\limits_{j=0}^{n} \|T\|^j \le \sum\limits_{j=0}^{\infty} \|T\|^j < \infty$,

proto platí (b). Pokud platí (b), je
$$\sum_{j=0}^{n} \|T^j y\| \le \|y\| \sum_{j=0}^{n} \|T^j\| ,$$
tedy platí (c).

Skutečně tedy (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) a bude stačit ukázat, že podmínka (c) implikuje tvrzení věty. (Jsme však vděčni za to, že máme tři různé podmínky: různé operátory mohou splňovat a), b) nebo c), viz dále.)

③ Ještě než větu dokážeme, přesvědčme se, že operátor T, definovaný v (11), splňuje její předpoklady: $\mathcal{C}(\langle 0,a\rangle)$ je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\langle 0,a\rangle))$. V (13b) jsme navíc ukázali, že
$$\|T\|_{\mathcal{L}} \le a \|f\|_\infty .$$

Odtud ihned dostáváme, že pro každé $f \in \mathcal{C}(\langle 0,b\rangle)$ existuje takové $a \in (0,b)$, že $\|T\| < 1$. Z tvrzení věty pak dostaneme

existenci a jednoznačnost řešení úlohy (6), tedy i (5), na příslušně omezeném intervalu $\langle 0,a\rangle$ tak, aby $a\|f\|_\infty < 1$.
Toto je typický předpoklad tzv. vět o lokální existenci řešení diferenciální rovnice.
Nevýhoda tohoto tvrzení spočívá v tom, že tento interval existence řešení závisí na velikosti pravé strany f.

Toto pozorování nám zároveň bude sloužit i jako poučení: ukážeme nyní, že T splňuje podmínku (c) bez jakýchkoli požadavků na velikost a; jen uděláme naše odhady jemněji:
je

$$|Ty(x)| \le \int_0^x |f(t)||y(t)|\,dt \le x\|f\|_\infty \|y\|_\infty \quad \Big(\text{neděláme } \sup_{x\in\langle 0,a\rangle}\Big)$$

dále

$$|T^2y(x)| \le \int_0^x |f(t)||Ty(t)|\,dt \le \|f\|_\infty^2 \|y\|_\infty \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}\|f\|_\infty^2 \|y\|_\infty ,$$

odtud dostaneme indukcí

$$|T^j y(x)| \le \frac{x^j}{j!}\|f\|_\infty^j \|y\|_\infty .$$

Až nyní provedeme $\sup_{x\in\langle 0,a\rangle}$ a dostaneme $\|T^j y\| \le \frac{a^j}{j!}\|f\|_\infty^j \|y\|_\infty$
a tedy $\|T^j\| = \sup_{\|y\|_\infty \le 1} \|T^j y\| \le \frac{a^j}{j!}\|f\|_\infty^j$. Odtud:

$$\sum_{j=0}^\infty \|T^j\| \le \exp(a\|f\|_\infty) < \infty .$$

Podmínka (b) je tedy splněna a my jsme došli k závěru, že pokud dokážeme Větu 1, ukázali jsme zároveň existenci a jednoznačnost (klasického) řešení úlohy (5) pro libovolný (ale omezený) interval $\langle 0,a\rangle$, a pro libovolnou $f \in C(\langle 0,a\rangle)$.

Důkaz Věty 1.

Podle bodu (2) předchozí poznámky stačí ukázat, že tvrzení věty plyne z předpokladu (c).

Definujme následující posloupnost prvků $y_n \in X$ (tzv. „iterační proces").

$$y_0 \in X \text{ libovolný}$$
$$y_{n+1} := u + Ty_n .$$

Máme
$$y_1 = u + Ty_0$$
$$y_2 = u + Ty_1 = u + Tu + T^2 y_0 ,$$
indukcí snadno plyne

$$y_n = \sum_{j=0}^{n-1} T^j u + T^n y_0 . \tag{16}$$

Ukážeme, že posloupnost y_n má v X limitu. Protože X je Banachův, a tedy úplný, stačí pro konvergenci y_n ukázat, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$, uvažujme $n > m$ a počítejme:

$$y_n - y_m = \sum_{j=m}^{n-1} T^j u + T^n y_0 - T^m y_0 ,$$

tedy

$$\|y_n - y_m\| \le \sum_{j=m}^{n-1} \|T^j u\| + \|T^n y_0\| + \|T^m y_0\| .$$

Protože platí podmínka (c), je první člen menší než ε pro dostatečně velká $n > m$. Stejně tak členy $\|T^n y_0\|$, $\|T^m y_0\|$ jsou (jako n-tý resp. m-tý člen konvergentní řady tvaru (c)) menší než ε pro dostatečně velká n, m.

Posloupnost $\{y_n\}$ je tedy cauchyovská v Banachově prostoru X, proto je konvergentní v X, tedy existuje $y \in X$ takové, že

$y_n \xrightarrow{X} y$. Protože T je spojitý, je $Ty_n \xrightarrow{X} Ty$, tedy platí i

$$\begin{array}{ccc} y_{n+1} & = & u + Ty_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & = & u + Ty \end{array}$$

a y je řešením rovnice $y = u + Ty$ (pro libovolné $u \in X$).
Ukážeme, že toto řešení je jediné. Nechť tedy jsou dvě, y a z, tedy nechť platí

$$y = u + Ty$$
$$z = u + Tz$$

Odečtením těchto rovnic a označením $w = y - z$ získáme vztah

$$w = Tw.$$

Odtud ovšem indukcí plyne $w = Tw = T^2w = \dots = T^j w \ \forall j \in \mathbb{N}$.
Tedy $\|w\| = \|T^j w\| \ \forall j \in \mathbb{N}$. Řada $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j w\|$ je ovšem konvergentní řada typu (c) tedy

$$\|w\| = \lim_{j \to \infty} \|T^j w\| = 0, \quad \text{odkud } w = 0,$$

a tedy $y = z$.
Úloha $y = u + Ty$ má tedy $\forall u \in X$ právě jedno řešení $y \in X$.
Jinak řečeno: Víme: $\left.\begin{array}{l} Id - T \text{ lin + spoj} \\ \forall u \in X \ \exists! \, y \in X, (Id-T)y = u \end{array}\right\} \Rightarrow Id - T$ je na a prosté.
Zobrazení $u \mapsto y$ je tedy dobře definované zobrazení z X do X.
Označme je $(Id - T)^{-1}$, tj. $y = (Id - T)^{-1} u$, $\forall u \in X$. Je lineární a prosté, nevíme nic o jeho spojitosti.
Z (16) dostaneme

$$\begin{array}{ccccc} y_n & = & \sum_{j=0}^{n-1} T^j u & + & T^n y_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y & = & \sum_{j=0}^{\infty} T^j u & + & 0, \end{array}$$

tedy máme pro všechna $u \in X$: $(Id - T)^{-1} u = \sum_{j=0}^{\infty} T^j u$, neboli
$(Id - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ ve smyslu rovnosti operátorů.

Konečně, označme
$$S_N := \sum_{j=0}^{N} T^j .$$
Pak $S_N \circ (Id - T) = \sum_{j=0}^{N} T^j - \sum_{j=1}^{N+1} T^j = T^0 - T^{N+1} = Id - \underset{\downarrow \atop 0}{T^{N+1}}$

a podobně pro $(Id-T)\circ S_N$.

$\boxtimes$

Poznámka: Časem uvidíme, že platí: je-li operátor $T : X \to X$ lineární, omezený, prostý a na, pak jeho inverze T^{-1} (která existuje) je také lineární a omezená, tj. spojitá.
To vnáší do naší úlohy tzv. pojem stability. Je-li totiž inverzní operátor (v našem případě $(Id-T)^{-1}$) spojitý, pak to znamená, že pro
$$u_n \xrightarrow{X} u \implies \underbrace{(Id-T)^{-1}u_n}_{y_n} \xrightarrow{X} (Id-T)^{-1}u$$
$$y_n \xrightarrow{X} y,$$
jinak řečeno, „blízkým pravým stranám rovnice u_n" odpovídají „blízká řešení", či: malé změny na pravé straně rovnice způsobí malé změny řešení. A to právě je stabilita řešení.

(Ř) Uvažujme $y'' + y = x^2 y$
$y(0) = 1$
$y'(0) = 0$

Úloha má na libovolném $\langle 0, a\rangle$ jediné řešení (podle předchozí teorie). Můžete ověřit, že funkce $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ je hledaným řešením.
Díky předchozí větě však také víme, že toto řešení je možné získat pomocí iterací (tj. lze se k němu libovolně přiblížit).
Uvažujte $y_0 \equiv 0$ a napište prvních pár iterací. Zdá se vám, že konvergujete k $e^{-\frac{x^2}{2}}$? Umíte z toho popsat nějaké zajímavé pozorování. :)

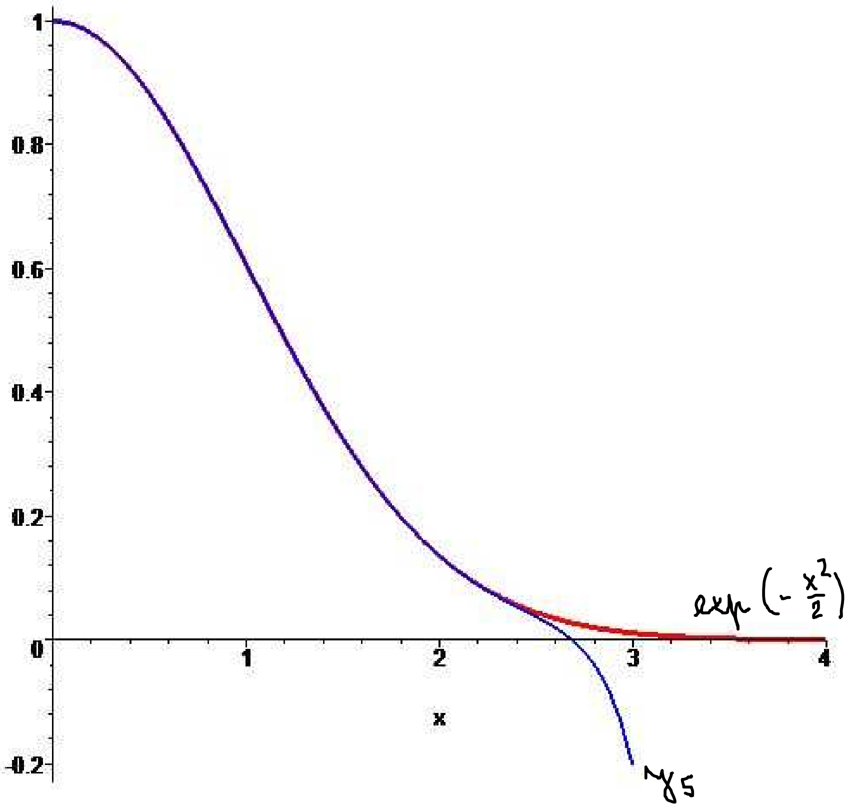
Při $y_0 = 0$ dostáváme pro y_5:

$$y_0 := 0$$

$$y_5 := \cos(x) - \frac{54975}{1024}\sin(x)\,x^3 - \frac{164925}{2048}x^2\cos(x) + \frac{164925}{2048}\sin(x)\,x + \frac{165437}{6144}\cos(x)\,x^4 - \frac{154871}{46080}\cos(x)\,x^6 + \frac{32383}{3072}\sin(x)\,x^5 + \frac{126481}{645120}\cos(x)\,x^8 - \frac{143131}{161280}\sin(x)\,x^7 + \frac{12983}{362880}\sin(x)\,x^9 - \frac{18889}{3628800}\cos(x)\,x^{10} + \frac{1}{31104}\cos(x)\,x^{12} - \frac{7}{12960}\sin(x)\,x^{11}$$

Struktura této řady je zajímavá: obsahuje členy tvaru
$a_k \cos x \cdot x^k + b_k \sin x \cdot x^k$

Rozdíl mezi y_5 a $\exp(-\frac{x^2}{2})$ ukazuje tento obrázek:



2.2. Základní pojmy spektrální analýzy

Budeme zkoumat operátorovou rovnici pro neznámé $x \in X$

$$(T - \lambda I)x = u \quad , \lambda \in \mathbb{C}, \quad T \in \mathcal{L}(X), \ u \in X \qquad (1)$$

X Banachův

Motivací k tomu je předchozí paragraf.

Označme $T_\lambda := T - \lambda I$, pak $T_\lambda \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow T \in \mathcal{L}(X)$.

Označme obor hodnot (range) operátoru T_λ:

$$R(T_\lambda) := \{y \in X, \ \exists x \in X, \ T_\lambda x = y\} \quad (= T_\lambda(X))$$

Otázky řešitelnosti rovnice (1) lze přeformulovat v řeči operátoru T_λ takto:

V řeči rovnice	V řeči operátoru
$\exists$ řešení pro libovolnou pravou stranu $u \in X$?	Je T_λ <u>na</u>, tj. je $R(T_\lambda) = X$?
Pokud řešení pro dané $u \in X$ existuje, je určeno jednoznačně?	Je T_λ prostý na X?
Pokud $\forall u \in R(T_\lambda)\ \exists!\ x \in X;\ T_\lambda x = u$, je toto řešení <u>stabilní</u>? (viz pozn. níže)	Je-li T_λ prostý, je potom T_λ^{-1} spojitý na $R(T_\lambda)$?

<u>Pozn</u>: Pod <u>stabilním</u> řešením míníme (zjednodušeně) situaci, kdy v rovnici $T_\lambda x = u$, která má jednoznačně určené řešení pro $\forall u \in U(u_0)$ platí, že „malé změny $u \in U(u_0)$" mají za následek „malé změny řešení". To přesně odpovídá situaci, kdy je inverzní

nohaření T_λ^{-1} spojité na $U(u_0)$. Tato vlastnost je velmi důležitá při přibližném hledání řešení: při něm často aproximujeme pravou stranu u nějakou „přibližnou pravou stranou" $\bar{u}$ a doufáme, že i řešení $\bar{x}$, které odpovídá pravé straně $\bar{u}$, bude blízké řešení x, odpovídajícímu pravé straně u. Pro nestabilní operátory to však nemusí být pravda.

Podívejme se nejprve na situaci pro $\dim X = n \in \mathbb{N}$

V konečné dimenzi: $T \in \mathcal{L}(X) \Longleftrightarrow \exists$ matice $M \in \mathbb{M}^{n \times n}$ taková, že

$$T(x) = M \cdot x \quad \forall x \in X$$

(v X volíme jednu pevnou bázi)

Potom platí T je prosté $\Longleftrightarrow$ T je na $\Longleftrightarrow$ M je regulární a reprezentuje T

$\Updownarrow$

T^{-1} je prosté $\Longleftrightarrow$ T^{-1} je na $\Longleftrightarrow$ M^{-1} je regulární a reprezentuje T^{-1}

Za výše popsané situace je navíc vždy i $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

V konečné dimenzi tedy platí „všechno nebo nic", tzv. konečnědimenzionální Fredholmova alternativa pro $T \in \mathcal{L}(X)$; $\dim X = n$.

Platí právě 1 z následujících situací:

(a) T je prosté, na a má spojitou inverzi

(b) T není prosté, není na a nemá spojitou inverzi

V nekonečné dimenzi není obecně žádný vztah mezi prostotou a nohařením na:

Příklad: Definujme prostor l_2 – posloupností:

$$l_2 := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{C};\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

Lze ukázat, že ℓ_2 s normou $\|\{x_n\}\|_{\ell_2}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ je Banachův prostor (je dokonce Hilbertův – více na str. 28).

Na ℓ_2 definujeme dva tzv. operátory posunu („shift operators")

$$A_1 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$A_2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Evidentně $\|A_1 x\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2} \Rightarrow \|A_1\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|A_1 x\| = 1$

$$\|A_2 x\|_{\ell_2} \le \|x\|_{\ell_2} \Rightarrow \|A_2\| \le 1$$

tedy oba jsou omezené, $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\ell_2)$.

Přitom:
- A_1 je prostý (různým prvkům přiřadí různé prvky) ale není na (nic se nezobrazí např. na $(1, 0, 0, 0, \dots)$)
- A_2 je na, ale není prostý (rozmyslete).

Nicméně, co se týče stability, tak i v nekonečné dimenzi platí tato hluboká věta:

$\boxed{\text{Věta 1}}$ $A \in \mathcal{L}(X)$, X Banachův; nechť A je prostý a na. Potom $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, tj. A^{-1} je spojitý.

Důkaz: Věta je důsledkem tzv. Věty o otevřeném zobrazení, důkaz lze nalézt např. ve skriptu [Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy, 4.13 – 4.16] $\boxtimes$

Pozn.: Tímto se zdá, že problém stability řešení je vyřešen: stačí prostota & „na". Ano, pro lineární omezené (tj. spojité) operátory tomu tak je. Ale např. pro lineární nespojité nebo pro nelineární operátory není situace tak jednoduchá.

Buď $T \in \mathcal{L}(X)$, X Banachův, $\lambda \in \mathbb{C}$, $T_\lambda := T - \lambda I \in \mathcal{L}(X)$. Pak v návaznosti na $\lambda \in \mathbb{C}$ může operátor T_λ mít různé vlastnosti z hlediska jeho prostoty, spojitosti inverze a velikosti $R(T_\lambda)$. Následující tabulka shrnuje všechny možnosti, přičemž dvě z nich nemohou nastat: ta, která je vyloučena Větou 1 (označeno „V1") z předchozí strany, a ta, která je vyloučena Lemmatem 1, které zformulujeme a dokážeme za chvíli (označeno „L1")

Tabulku je nutno chápat tak, že pomocí ní definujeme různé kategorie, do kterých může patřit parametr $\lambda \in \mathbb{C}$. Tedy například levý horní roh tabulky je nutno číst takto: „$\lambda \in \mathbb{C}$ je regulárním bodem T, pokud T_λ je prosté, T_λ^{-1} spojité a $R(T_\lambda) = X$". Atd.

		T_λ „na"	T_λ není „na"	
		$R(T_\lambda) = X$	$R(T_\lambda) \neq X$, $\overline{R(T_\lambda)} = X$	$\overline{R(T_\lambda)} \neq X$
T_λ prostý	$\exists T_\lambda^{-1}$ a je spojitý	λ je regulární bod T	X $\boxed{L1}$	$\lambda \in \sigma_R(T)$
T_λ prostý	$\exists T_\lambda^{-1}$ a není spojitý	X $\boxed{V1}$	$\lambda \in \sigma_c(T)$	$\lambda \in \sigma_R(T)$
T_λ není prostý	neex. T_λ^{-1}	$\lambda \in \sigma_p(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$

Komentář:

- $\sigma_C(T)$ … tzv. spojité spektrum operátoru T. Pokud $\lambda \in \sigma_C(T)$, tak rovnice $T_\lambda y = u$ nemá řešení pro každou pravou stranu $u \in X$ (protože $R(T_\lambda) \neq X$), ale platí, že ke každé pravé straně $u \in X$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $u_\varepsilon \in X$, $\|u_\varepsilon - u\|_X < \varepsilon$ a přitom existuje řešení rovnice $T_\lambda y = u_\varepsilon$ (to je důsledek toho, že $\overline{R(T_\lambda)} = X$.). … Někdy se jim říká „skoro řešení". Zároveň však T_λ je nestabilní (T_λ^{-1} je nespojitý), tedy nedává dobrý smysl se bavit o tom, co se děje s řešeními, když trochu měníme pravé strany u_ε.

- $\sigma_R(T)$ … tzv. residuální spektrum T. Protože $\overline{R(T_\lambda)} \neq X$, nejsou k dispozici řešení pro velkou část $u \in X$.

- $\sigma_p(T)$ … tzv. bodové spektrum T. T_λ není prostý, tj.

$$\exists\, x_1 \neq x_2, \quad T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2 \qquad x := x_1 - x_2 \neq 0$$

$$\text{tj.} \quad \exists\, x \neq 0 \quad T_\lambda x = 0$$

$$(T - \lambda I)x = 0$$

$$Tx = \lambda x.$$

Tedy $\lambda \in \sigma_p(T) \iff \exists\, x \neq 0 \ \ Tx = \lambda x \overset{def}{\iff}$ λ je vlastní číslo T a $x \neq 0$ je odpovídající vl. vektor.

Def: Spektrum operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ je $\sigma(T) := \sigma_C(T) \cup \sigma_R(T) \cup \sigma_p(T)$.

Upozornění:
1) $\lambda \in \sigma(T) \iff T_\lambda$ není prostý nebo není na.
2) λ regulární $\iff T_\lambda$ prostý, na (a pak už T_λ^{-1} spojitý)
3) Ne každý prvek spektra T je vlastním číslem.

Def. Spektrální poloměr $\rho(T) := \sup\{|\lambda|;\ \lambda\in\sigma(T)\}$

Pozorování: • Pokud je $\rho(T)<+\infty$, pak platí: $|\lambda|>\rho(T) \Rightarrow \lambda$ regulární

Je potřeba ještě zmínit ono Lemma 1, slíbené na str. 24:

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ X Banachův, $A\in\mathcal{L}(X)$. Potom:

$$\left.\begin{array}{l} R(A)\neq X,\ \overline{R(A)}=X,\ \exists A^{-1}: R(A)\to X \\ \qquad\qquad\qquad (\text{tj. } A \text{ prostý}) \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} \text{ není spojitý}$$

D: Nechť A^{-1} je spojitý na $R(A)$.

- $R(A)\neq X \Rightarrow \exists y\in X\setminus R(A)$
- $\overline{R(A)}=X \Rightarrow \exists y_n\in R(A);\ y_n\to y$ v X.
- $y_n\in R(A) \Rightarrow \exists x_n\in X,\ A(x_n)=y_n \Rightarrow x_n = A^{-1}(y_n)$.
- y_n konverguje $\Rightarrow$ y_n cauchyovská $\underset{(A^{-1}\text{ spoj.})}{\Rightarrow}$ x_n cauchyovská $\underset{(X\text{ úplný})}{\Rightarrow}$ $\exists x\in X$, že $x_n\to x$.
- Potom ale $Ax = A(\lim x_n) \underset{A \text{ spojitý}}{=} \lim \underbrace{Ax_n}_{y_n} = \lim y_n = y$

Tedy $Ax=y \Rightarrow y\in R(A)$
což je spor s $y\in X\setminus R(A)$ $\boxed{X}$

Poznámka: Jak vypadá tabulka ze str. 24 v konečné dimenzi?

Víme (viz str. 22):

$T\in\mathcal{L}(X)$; $\dim X = n\in\mathbb{N}$ je reprezentován maticí $M\in\mathbb{M}^{n\times n}$.

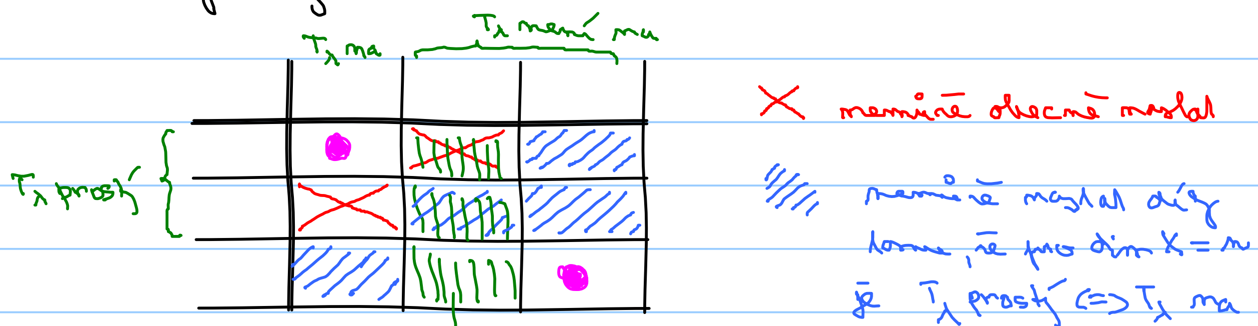
Potom platí: T je prostý $\Leftrightarrow$ T je na $\Leftrightarrow$ M je regulární a reprezentuje T

$\Updownarrow$

T^{-1} je prostý $\Leftrightarrow$ T^{-1} je na $\Leftrightarrow$ M^{-1} je regulární a reprezentuje T^{-1}

Za výše popsané situace je navíc vždy $T^{-1}\in\mathcal{L}(X)$.

Ve schématicky nakreslené tabulce ze str. 24:



Tento celý sloupec popisuje situaci $R(T_\lambda) \neq X$, $\overline{R(T_\lambda)} = X$. Ta však v konečné dimenzi také nenastane, protože v kon. dim. platí $R(T_\lambda) = \overline{R(T_\lambda)}$.

V konečné dimenzi tedy nastanou pouze situace, označené ●
a tedy v konečné dimenzi máme:

1) $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda$ je buď regulární nebo vl. číslo
2) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \text{ je vlastní číslo } T\} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \text{ je vl. č. } (M)\}$.

Následující věta ukazuje, že $\rho(T)$ je pro $T \in \mathcal{L}(X)$ vždy konečný.

Věta X Banachův, $T \in \mathcal{L}(X)$ (tj. $\|T\| < \infty$). Potom:

$|\lambda| > \|T\| \Rightarrow$ (1) $\lambda \notin \sigma(T)$, tj. λ je regulární

(2)
$$(T - \lambda I)^{-1} = T_\lambda^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \in \mathcal{L}(X)$$

Pozn.: • Z (1) ihned plyne

$$\boxed{\rho(T) \leq \|T\|}$$

• Řada ze (2) se nazývá von Neumannova řada operátoru $T - \lambda I$.

(D) Je-li $|\lambda| > \|T\|$, pak jistě $\lambda \neq 0$. Položme $A := \frac{1}{\lambda} T$.

Odtud $\|A\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| < 1$ a na A můžeme použít větu ze str. 14:

To nám dává, že: (1) $I - A$ je prostý a na $\Rightarrow$ $T - \lambda I = (-\lambda)(I - A)$ je prostý a na

$\Downarrow$ věta ze str. 23

$(T - \lambda I)^{-1}$ je spojitý.

Odtud λ je regulární číslo.

(2) Věta ze str. 14 dává

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \qquad \Big/ \cdot(-1)$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{\lambda} \qquad (*)$$

$$\underbrace{(\lambda^{-1})\cdot\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1}}_{(T - \lambda I)^{-1}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \qquad \text{cbd.}$$

Pozn.: V posledním kroku důkazu POZOR! Inverzní zobrazení k $y = 3x$ je $y = \frac{1}{3}x$, tedy inverzní zobrazení má hodnotu koeficientu převrácenou. Ve vzorci (*) lze tedy (alternativně) postupovat:

$$\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1} = \lambda\left(T - \lambda I\right)^{-1},$$ a proto je jasné proč musím rovnici (*) <u>dělit</u> λ.

Na závěr kapitoly uvedeme jeden <u>příklad</u>.

(Př) Uvažujme $\ell_2 := \{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$ prostor všech komplexních posloupností, které jsou tzv. „sčítatelné s kvadrátem". Platí (lze ukázat), že ℓ_2 se skalárním součinem $(\{x_n\}, \{y_n\})_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ (který indukuje normu $\|\{x_n\}\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$) je úplný, a tedy Hilbertův

(tj. i Banachův) prostor.
Uvažujme operátor

$$T : \ell_2 \to \ell_2$$

$$T : (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, \dots x_{k-1}, x_k, \dots).$$

Protože $\|Tx\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2}$, je $\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|x\| = 1$.

Tedy $\rho(T) \le \|T\| = 1$ a proto $\underbrace{|\lambda| > 1} \Rightarrow \lambda$ je regulární.
Celé spektrum T tedy leží v jednotkovém kruhu v $\mathbb{C}$.

- $\underline{\lambda = 0}$: Už víme (str. 23), že T <u>není na</u>, je prostý. Zároveň je vidět, že žádný prvek z ℓ_2 se pomocí T nezobrazí na $(a, 0, 0, 0 \dots)$, $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Nelze tedy žádnou posloupností z $R(T)$ dokonvergovat (myšleno) k prvku $(1, 0, 0, \dots)$. Proto $\overline{R(T)} \neq \ell_2$, odkud plyne $\underline{0 \in \sigma_R(T)}$ (plyne z tabulky na str. 24).

- $\underline{|\lambda| \le 1, \lambda \neq 0}$

a) Ukážeme nejprve, že žádné takové číslo λ není vlastním číslem T.
Pokud by tomu tak bylo, tak $\exists x \neq 0$

$$Tx = \lambda x$$

$$(0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

tj. (i) $\lambda x_1 = 0$

(ii) $\lambda x_k = x_{k-1} \quad \forall k = 2, 3, 4 \dots$

Z (i) plyne $x_1 = 0$ (neboť $\lambda \neq 0$),
z (ii) pak indukcí plyne $x_2 = x_3 = \dots = 0$
Tedy $x = 0$, což je však spor s tím, že by to měl být vlastní vektor T. $\boxtimes$

b) Ukážeme, že T_λ není <u>na</u>, speciálně, že žádné $x \in \ell_2$ se nezobrazí na $(1, 0, 0 \dots)$. Nechť takové $x \in \ell_2$ existuje. Pak tedy

$$T_\lambda x = (1,0,0,\dots)$$
$$\parallel$$
$$(-\lambda x_1,\ x_1-\lambda x_2,\ x_2-\lambda x_3,\dots)$$

tedy $\quad 1 = -\lambda x_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\lambda}$

$k=1,2,3\dots \quad x_k - \lambda x_{k+1} = 0 \Rightarrow x_{k+1} = \frac{x_k}{\lambda}$

$$\Rightarrow x = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda^2}, -\frac{1}{\lambda^3}, \dots\right)$$

Zdánlivě jsme tedy takové x našli, ale

$\|x\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2k}} = \infty$, neboť jde o geom. řadu s kvocientem $\frac{1}{\lambda^2}$, pro který $|\lambda| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\lambda^2}\right| \ge 1$.

Protože T_λ je lineární a $(1,0,0,0\dots) \notin R(T_\lambda)$, tak platí také $(a,0,0,\dots) \notin R(T_\lambda)$ $\forall a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \Rightarrow \overline{R(T_\lambda)} \neq \ell_2$.

Ocitáme se tedy v posledním sloupci tabulky ze str. 24, $\forall \lambda \neq 0, |\lambda| \le 1$. Protože však současně žádné takové λ není vl. číslem, je $\lambda \in \sigma_R(T)$ pro všechna taková λ. (To by šlo také nepřímo ukázat tak, že bychom ukázali prostotu T_λ – zkuste si.)

Závěr: Pro tento T platí $\sigma(T) = \sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1\}$.
Spektrem je tedy právě celý jednotkový kruh, je tedy nespočetná množina prvků spektra (a přitom žádný z nich není vl. číslem). Takový operátor je tedy „poměrně nehezký", ale přitom negeneruje žádné vl. rozklady.

Právě jsme provedli spektrální analýzu uvedeného operátoru.

Cvičení: Zkuste spektrální analyzovat:

a) $T: \ell_2 \to \ell_2$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto \left(x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \frac{x_5}{4}, \dots\right)$$

Řešení: $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$

$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$, $\sigma_R(T) = \emptyset$, $\sigma_C(T) = \emptyset$.

Doplňující otázka: jaká je $\|T\|$?

b) $T: \ell_2 \to \ell_2$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right)$$

Řešení: $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$

$\sigma(T) = \{0\}$, $\sigma_p = \emptyset$

Doplňující otázka: jaká je $\|T\|$ a je $0 \in \sigma_C(T)$ nebo $0 \in \sigma_R$?

3. KOMPAKTNÍ OPERÁTORY

Víme: $\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ Banachovy} \\ T: X \to Y \\ T \text{ lineární} \end{array}\right\}$: T spojitý $\iff$ T omezený, píšeme $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ přičemž $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$.

$\boxed{T(\text{omezené množiny}) = \text{omezené mn.}}$

Výrok v rámečku tedy pro lin. operátory charakterizuje spojitost. Matematicky: $\forall A \subset X$ omezená je $T(A)$ omezená v Y.

Def. X, Y Banachovy, $T: X \to Y$ lineární, se nazývá kompaktní, pokud

$\boxed{T(\text{omezené}) = \text{kompaktní}}$

Matematicky: $\forall A \subset X$ omezená je $\overline{T(A)}$ kompaktní v Y.

Píšeme $T \in \mathcal{C}(X,Y)$, přičemž $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X,X)$.

Pozn.: • $\mathcal{C}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$

D. $A \subset X$ omezená $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\overline{T(A)}$ kompakt $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\overline{T(A)}$ omezená $\underset{(3)}{\Rightarrow}$ $T(A)$ omezená.

(1) plyne z definice $\mathcal{C}(X,Y)$

(2): platí, že K kompakt $\Rightarrow$ K omezený a uzavřený (v lib. Banachově prostoru). Pozn: obrácená implikace obecně neplatí, platí pouze v konečnědimenzionálních NLP.

(3): Sporem: je-li $T(A)$ neomezená, pak $\overline{T(A)} \supseteq T(A)$ je taky neomezená. $\boxtimes$

• Charakterizace pomocí posloupností:

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$	$T \in \mathcal{C}(X,Y)$
(a) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$ (to je spojitost)	$\{x_n\}$ omezená $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\} \; \exists y \in Y$ $T(x_{n_k}) \to y$
(b) $\{x_n\}$ omezená $\Rightarrow \{Tx_n\}$ omezená (to je omezenost)	

Důvod: $\overline{T\{x_n\}}$ je kompaktní a $T(x_n)$ je posloupnost v něm. Lze z ní tedy vybrat konvergentní podposloupnost.

Úvaha: Pokud by celý prostor Y měl vlastnost, že z každé omezené posloupnosti v Y vybereme konvergentní podposloupnost, pak by platilo $\underbrace{\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)}$.

Odůvodnění: Stačí ukázat $\mathcal{L}(X,Y) \subset \mathcal{C}(X,Y)$; buď tedy $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\{x_n\}$ omezená v X $\underset{\mathcal{L}(X,Y)}{\Longrightarrow}$ $\{Tx_n\}$ omezená $\underset{\text{vlastnost } Y}{\Longrightarrow}$ $\exists \, Tx_{n_k} \to$

Takové vlastnosti prostoru Y budeme říkat „B-W vlastnost" na počest Bolzano-Weierstrassovy věty.

Platí

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Y Banachův, potom

$$Y \text{ má B-W vlastnost} \iff \dim Y < \infty \qquad (*)$$

Nástin důkazu:

$\Leftarrow$: v $\mathbb{R}$ je to B-W věta, v $\mathbb{R}^n$ pomocí postupné vybírání po složkách. $\dim X = n \Rightarrow$ ztotožním X a $\mathbb{R}^n$ tím, že v X zvolím jednu bázi a každý prvek $x \in X$ ztotožním s n-ticí souřadnic x vzhledem k této bázi.

$\Rightarrow$: obměněná implikace: je-li $\dim Y = \infty$, vybereme $x_1 \in Y$ a potom induktivně x_{k+1} tak, aby vzdálenost x_{k+1} od $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_k)$ byla alespoň 1. Libovolná podposloupnost této posloupnosti má prvky, které jsou vzájemně od sebe vzdáleny alespoň 1 a tedy nesplňuje B-C podmínku.

Lemma

stejné normy.

$Id : X \to X$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ X má B-W vlastnost. $(**)$

Ⓓ Jasný.

Z $(*)$ a $(**)$ dostáváme:

Lemma $Id \in \mathcal{L}(X)$ je kompaktní $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

Odtud plyne překvapivé tvrzení: pro $\dim X = \infty$ <u>není identita kompaktním operátorem</u>.

<u>Pozn:</u> narazíme s tzv. <u>kompaktním vnořením</u>, což je situace, kdy $Id : X \to Y$ pro $X \subset Y$ a kdy uvažujeme na X a Y <u>různé</u> normy. Pak může nastat situace, kdy je Id kompaktní.

Ⓟř Tzv. Rellichova věta: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená, otevřená, s hladkou hranicí. $W^{1,2}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} ;\ \|f\|_{1,2} := \left(\int |f|^2 + |\nabla f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \}$

Potom $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ a navíc $Id : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je <u>kompaktní</u>.

K čemu se to používá: $\{f_n\}$ omezená v $W^{1,2} \Rightarrow \exists f_{n_k} \xrightarrow{v\, L^2}$.

$\boxed{\text{Vlastnosti kompaktních operátorů}}$

① $\dim Y < \infty \Rightarrow \mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$

Ⓓ $A \subset X$ omez $\underset{T\in\mathcal{L}(X,Y)}{\Rightarrow}$ $T(A)$ omez $\Rightarrow \overline{T(A)}$ omez + uzavř v Y

$\Downarrow$ $\dim Y < \infty$

$\overline{T(A)}$ kompaktní.

Důsledek: $\left.\begin{array}{l} T \in \mathcal{L}(X),\ \dim X = \infty \\ \dim \mathcal{R}(T) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow T \in \mathcal{C}(X)$

② $S \in \mathcal{L}(X), T \in \mathcal{C}(X) \Rightarrow$ (a) $S\circ T \in \mathcal{C}(X)$, (b) $T\circ S \in \mathcal{C}(X)$

Ⓓ $\{x_n\}$ omez $\Rightarrow$ (a) $Tx_{n_k} \to$ $\overset{S\in\mathcal{L}}{\Rightarrow}$ $S(Tx_{n_k}) \to$

(b) $\{Sx_n\}$ omez $\overset{T\in\mathcal{C}}{\Rightarrow}$ $T(Sx_{n_k}) \to$

③ $\left.\begin{array}{l} T\in\mathcal{C}(X) \\ \dim X = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0 \in \sigma(T)}$

Ⓓ Nechť $0 \notin \sigma(T) \Rightarrow \exists T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

Pak ale $\underset{\mathcal{C}}{\underset{\cap}{T}} \circ \underset{\mathcal{L}}{\underset{\cap}{T^{-1}}} = \underset{\Rightarrow\ \mathcal{C}\ \text{spor}.}{\underset{\cap}{Id}}$

④ $\left.\begin{array}{l} T\in\mathcal{C}(X) \\ \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ a) $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ je uzavřený (důkaz 5.17)

b) $\underbrace{\mathcal{R}(T-\lambda I) = X}_{\text{na}} \Leftrightarrow T - \lambda I$ prostý (důkaz 5.27)

Pozn.: b) se nazývá „Fredholmova alternativa"

Důsledky: $\boxed{\lambda \neq 0}$

- a) znamená, že nemůže nastat situace, kdy $R(T_\lambda) \neq X$ a $\overline{R(T_\lambda)} = X$
- b) znamená, že T_λ je prostý $\Leftrightarrow$ T_λ je na

$\Rightarrow$ Spektrální tabulka pro $\boxed{T_\lambda,\ \text{kde } T \in \mathcal{C}(X),\ \lambda \neq 0}$

	$R(T_\lambda) = X$	$R(T_\lambda) \neq X$, $\overline{R(T_\lambda)} = X$	$\overline{R(T_\lambda)} \neq X$
T_λ prostý, T_λ^{-1} spojitý	$\boxed{\lambda \text{ regul.}}$	×	× b)
T_λ prostý, T_λ^{-1} nespojitý	×	×	× b)
T_λ není prostý	× b)	× a)	$\boxed{\lambda \text{ vl. č.},\ \lambda \in \sigma_p}$

Tabulka má pro $\lambda \neq 0$ stejný tvar jako pro operátory v konečné dimenzi.

Shrnutí:
- 0 je vždy ve spektru kompaktního operátoru. Je to jediný prvek spektra, který nemusí být vlastním číslem T (i když může)
- Všechny nenulové prvky spektra mu jsou vlastní čísla.

(5) $T \in \mathcal{C}(X)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(T)$ (tj. λ je vl. č.) $\Rightarrow$
- $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda I) < \infty$ (Lemma 5.15)
- $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ je uzavřený podprostor X, prostor všech vl. vektorů příslušných vl. číslu λ.

Def: Číslo $\dim \operatorname{Ker}(T_\lambda) \in \mathbb{N}$ nazveme násobností vl. čísla $\lambda \in \sigma_p(T)$

Vidíme tedy: • každé nenulové vlastní číslo kompaktního operátoru má konečnou násobnost – dimenze podpr. vl. vektorů, který přísluší nenulovému vl. číslu, je konečná

(6) $T \in \mathcal{C}(X)$; $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > \varepsilon\}$ je konečná $\forall \varepsilon > 0$.

Důsledek: • Spektrum kompaktního operátoru je nejvýše spočetné
• Má-li spektrum komp. operátoru hromadný bod, pak jím může být jenom bod 0.

(7)
$$\left.\begin{array}{l} T_n : X \to X_n \subset X ; \quad T \in \mathcal{L}(X, X_n) \\ \dim X_n < \dim X_{n+1} < \infty, \quad X_n \nearrow X \\ \exists \lim T_n =: T : X \to X \end{array}\right\} \Rightarrow T \in \mathcal{C}(X)$$

4. DUÁLNOST

4.1. Duál a dualita

Def: X Banachův, $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$) nazveme (topologickým) duálem k X.

Pozn:
- X' jsou tedy spojité lineární funkcionály, spojitost ve smyslu
  $$x_n \xrightarrow{X} x \Rightarrow Tx_n \to Tx \quad (\text{pro } T \in X')$$
- Víme, že $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův, pokud Y je Banachův, tedy i X' je Banachův, $\|T\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \le 1} |Tx|$
- nezplést s vektorovým duálem (pouze lineární zobrazení $X \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) – nezajímá spojitost). Tj prostor vektorového duálu je víc (o ty „nespojité"). V konečné dimenzi pro X Banachův je vektorový duál = topologický duál.

Def. Dualitou nazveme zobrazení $S : X \times X' \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), které je

a) bilineární (tj lineární v každé složce) *)

b) spojité (tj $(x_n, y_n) \xrightarrow{X \times X'} (x,y) \Rightarrow S(x_n,y_n) \to S(x,y)$)

*) v komplexním případě požadujeme místo bilinearity tzv. seskvilinearitu,
$S(\alpha x + \beta y, z) = \alpha S(x,z) + \beta S(y,z)$ & $S(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} S(x,y) + \bar{\beta} S(x,z)$.

(Př) V situacích, kdy lze rozumným způsobem ztotožnit X a X', například pro $\mathbb{R}^n$, je dualitou například skalární součin v $\mathbb{R}^n$. Později uvidíme, že podobně lze uvažovat i v jakémkoli Hilbertově prostoru.

Pozn: Pojem ztotožnění prostoru duálu (což jsou zobrazení) s prvky nějakého jednoduššího prostoru se v matematice používá poměrně často, ve smyslu reprezentace prostoru duálu.
Můžeme se tak například ptát, co znamená často vídaná rovnost
$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ omezená, otevřená}, \; p,q \in (1,\infty), \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Když říkáme jsou ztotožnění $(L^p(\Omega))'$ a prostor funkce.
Znamená to přesně toto:

$\forall T \in (L^p(\Omega))' \ \exists!\, g \in L^q(\Omega)$, že

a) $$T(f) = \int_\Omega f\bar{g} \qquad \forall f \in L^p(\Omega)$$

b) $$\|T\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^q}$$

V tomto smyslu pak ztotožňujeme T a g, $(L^p)'$ a L^q
a dualitu
$$(f,T) \longmapsto T(f)$$
ztotožníme s dualitou
$$(f,g) \longmapsto \int_\Omega f\bar{g} \qquad f \in L^p,\ g \in L^q \qquad (D)$$

Vidíme skutečně, že pro $p=2$ dostáváme $q=2$ a dualita (D) má tvar skalárního součinu na $L^2(\Omega)$.

Otázka: Je to jen specialita $L^2(\Omega)$ nebo něco hlubšího?
Odpověď: Je to něco hlubšího:

Věta (Riesz–Fréchet) [viz Lukeš 2.9]
Buď H Hilbertův prostor, $(\cdot,\cdot)_H$ buď skalární součin v H.
Potom $\forall T \in H' \ \exists!\, f \in H$, že
a) $T(x) = (x,f)_H \quad \forall x \in H$
b) $\|T\|_{H'} = \|f\|_H$

Pozn: • Opět ztotožňujeme $H' \cong H$ a ztotožňujeme T a f.
↳ isometrický isomorfismus
↓ zachovává normu
↓ bijekce

Pozn.: • V komplexní verzi v bodě a) by stačila tak malá úprava, a to že $\forall T \in H' \ \exists! \, g \in H$

$$T(x) = (g, x)_H \quad \forall x \in H.$$

Skutečně: položme $S(x) = \overline{T(x)}$, pak podle R.-F. věty nalezneme $g \in H$

$$S(x) = (x, g)_H;$$

ale $T(x) = \overline{S(x)} = \overline{(x, g)} = (g, x)$.

Pozn.: Pro X, Y Banachovy máme:

$$\boxed{X \subset Y \Rightarrow Y' \subset X'} \qquad \text{(INK)}$$

Pozn., kde jde o proces zúžení zobrazení (restrikce)

Neboť $T \in Y' \Rightarrow T$ spojité a lineární (na prvcích z Y) $\Rightarrow$

$\Rightarrow T|_X$ spojité a lineární (na prvcích z X) $\Rightarrow T \in X'$.

(Pokud se ovšem na X používá norma z Y, tj. norma na X je „zděděná" z Y).

POZOR!! Bezhlavá aplikace předchozích tvrzení nás může zavést do slepých uliček:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{R}^2)' \subset \mathbb{R}' \quad \text{dle předch. pravidla}$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)' & \subset & \mathbb{R}' \\ \| & & \| \\ \mathbb{R}^2 & \subset & \mathbb{R} \end{array}$$

$\underline{\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}}$, neboť oba jsou Hilbertovy

Kde je chyba? :)

Odpověď: chyby jsou zde dvě, malá a velká:

a) malá: $(\mathbb{R}^n)' \cong \mathbb{R}^n$ není úplně přesně rovnost, ale ztotožnění:

každé lineární zobrazení na $\mathbb{R}^n$ má tvar

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$ a ztotožníme se s n-ticí

koeficientů

$$T \approx (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \ \ldots \text{ reprezentuje } (\mathbb{R}^n)'.$$

Onu reprezentující $\mathbb{R}^n$ tedy je třeba maličko opravit jako prostor prvků, které reprezentují lin. zobrazení.

b) Velká: Inkluze $(\mathbb{R}^2)' \subset \mathbb{R}'$, která vede až k $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}$ není de facto množinovou inkluzí, ale je to tento výrok:

Všechna lineární zobrazení, pracující na $\mathbb{R}^2$, lze zúžit tak, aby pracovala na $\mathbb{R}^1$. Pokud lin. zobrazení na $\mathbb{R}^2$ jsou reprezentována dvojicí čísel (α_1, α_2), lze tato „zobrazení" skutečně zúžit mají na $(\alpha_1, 0)$, aby mohla pracovat na $\mathbb{R}^1$. To je pojem smysl „inkluze" $Y' \subset X'$, viz (INK).

Pozn.: „Duálnost" se často pojímá i tím, že „vzorce, obsahující prostory X a X' vykazují jisté symetrie.

Př.:

Víme: $$\boxed{\|T\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \le 1} |T(x)|} \qquad (N)$$

Dále víme

$$|T(x)| \le \|T\| \cdot \|x\| \text{ ; pokud mají uvážíme } \|T\| \le 1$$

dostaneme

$$|T(x)| \le \|x\| \qquad \forall \|T\| \le 1 \quad \Big/ \sup_{\|T\| \le 1}$$

$$\sup_{\|T\| \le 1} |T(x)| \le \|x\|$$

Současně platí tvr. Hahn-Banachova věta [Taylor, str. 181]

|| X Banachův, $0 \neq x \in X$
|| $\Rightarrow \exists\, T \in X'$, $\|T\| = 1$, $T(x) = \|x\|$.

$$\text{H-B.} \Rightarrow \|x\| \stackrel{\le}{=} \sup_{\|T\| \le 1} |T(x)|$$

Celkově $$\boxed{\|x\|_X = \sup_{\|T\|_{X'} \le 1} |T(x)|} \qquad (N')$$ (srov. s (N))

$\boxed{4.2}$ Duální zobrazení, duální operátor

Def. Mějme X, Y Banachovy, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Řekneme, že T' je <u>duální zobrazení</u> k T, pokud:

a) $T' : Y' \to X'$ (tedy jde o zobrazení mezi duály)

b) $T' \circ y' = y' \circ T \quad \forall y' \in Y'$, tedy:

$$(T'y')(x) = y'(Tx) \qquad \forall y' \in Y',\ \forall x \in X \qquad \text{(DZ)}$$

Pozn:
- Je-li $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, pak i $T' \in \mathcal{L}(Y',X')$. Linearita je jasná a spojitost plyne takto: $y'_n \to y' \Rightarrow \|(T'y'_n)(x) - (T'y')(x)\|$
$$= \|y'_n(Tx) - y'(Tx)\| \leq \|y'_n - y'\| \cdot \|Tx\| \to 0$$
- $\|T'\| = \|T\|$ (dokažte si)
- Platí také $T \in \mathcal{C}(X,Y) \Rightarrow T' \in \mathcal{C}(Y',X')$

Pozn: $y' \in Y'$ je zobrazení pracující na Y $\Rightarrow$ $T'y' \in X'$ je zobrazení pracující na X $\Rightarrow$ $(\underset{\in X'}{T'y'})(\underset{\in X}{x})$ je objekt, přiřazující prvkům z $X \times X'$ číslo, což odpovídá struktuře duality. (DZ) často zapisujeme takto:

$$\langle \underbrace{T'y', x}_{\text{zobrazení na } X' \times X} \rangle = \langle \underbrace{y', Tx}_{\text{zobrazení na } Y' \times Y} \rangle \qquad \text{(DZ.2)}$$

symbol duality

Někdy se zápisu (DZ.2) říká „přehození T do duální složky".

Otázka: v dalším nás bude zajímat, jestli je někdy možno ztotožnit T a T'.

Úvahy: $T' \stackrel{?}{=} T$

T': pracuje na Y', zobrazuje do X'

T: pracuje na X, zobrazuje do Y

Tj nutnou podmínkou by bylo $\qquad Y' = X$ a $X' = Y$ $\quad /'$

$$Y'' = X' \quad \text{a} \quad X'' = Y'$$
$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$
$$Y \qquad\qquad\qquad X$$

Tedy něco jako $Y'' \cong Y$ a $X'' \cong X$

To by mohlo platit pro Hilb. prostory, kde je dokonce už i $X' \cong X$.

- K danému T nemusí T' vůbec existovat. Výše uvedené vlastnosti tedy platí ve smyslu „pokud T' existuje, tak má uvedené vlastnosti". Ale v Hilb. prostoru je opět vše lepší:

Věta (duální zobrazení mezi Hilb. prostory)

Buďte H_1, H_2 Hilbertovy prostory, $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Potom $\exists!$ zobrazení $T' : H_2 \to H_1$ takové, že

- $(Tx, y)_{H_2} = (x, T'y)_{H_1} \qquad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2 \qquad (+)$

Pro toto zobrazení pak platí:

a) $T' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$

b) $\|T'\| = \|T\|$

Pozn: Pokud na (+) aplikujeme komplexní sdružení, dostaneme

$$\overline{(Tx, y)_{H_2}} = \overline{(x, T'y)_{H_1}} \implies (T'y, x)_{H_1} = (y, Tx)_{H_2}$$

což je (DZ.2).

D. Buď $y \in H_2$ pevné, definujme $L_y : x \mapsto (Tx, y)_{H_2}$ je spojité a lin. na H_1

$$\overset{\text{Riesz-Fréchet}}{\implies}$$

$$\exists!\, z \in H_1, \quad (Tx, y)_{H_2} = (x, z)_{H_1} \quad \forall x \in H_1$$
$$\|z\| = \|L_y\|$$

Def: $T' : \underset{H_2}{\underset{\cap}{y}} \mapsto \underset{H_1}{\underset{\cap}{z}}$. Potom $(Tx, y) = (x, T'y)$ $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$ platí.

Ještě je potřeba ukázat linearitu T', spojitost T' a rovnost norem.

- Linearita: podle (DZ. 2) je

$$\begin{aligned}(T'(\alpha y_1+\beta y_2),x) &= (\alpha y_1+\beta y_2, Tx) = \alpha(y_1,Tx)+\beta(y_2,Tx) = \\ &= \alpha(T'y_1,x)+\beta(T'y_2,x) = \\ &= (\alpha T'y_1+\beta T'y_2, x) \quad \forall x\in H_1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T'(\alpha y_1+\beta y_2) = \alpha T'y_1+\beta T'y_2 \quad \text{cbd.}$$

- Spojitost: ukážeme omezenost normy. Předně je
$$\|T'y\| = \|z\| = \|L_y\|$$
Spočteme $\|L_y x\| = \|(Tx,y)\| \le \|Tx\|.\|y\| \le \|T\|.\|x\|.\|y\|$

Proto $\|L_y\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|L_y x\| \le \|T\|.\|y\|$

$\|L_y\| = \|T'y\|$

načež $\|T'\| = \sup_{\|y\|\le 1}\|T'y\| \le \sup_{\|y\|\le 1}\|T\|.\|y\| = \|T\|$.

Tedy $\|T'\| \le \|T\| < \infty \quad \Rightarrow \quad T'\in\mathcal{L}(H_2,H_1)$.

Zbývá: $\|T'\| = \|T\|$. Jednu nerovnost již máme, druhou dokážeme drobným trikem:

Definujme $T'' := (T')' : H_1 \to H_2$, který tedy a toto, co už máme dokázáno, splňuje: i) $T''\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$

ii) $(T''x,y) = (x,T'y) \quad \forall x\in H_1, \forall y\in H_2$

iii) $\|T''\| \le \|T'\|$.

Ale z ii) plyne

$$(T''x,y) = (x,T'y) = (Tx,y) \quad \forall x\in H_1, \forall y\in H_2$$

$\Rightarrow T = T''$, a iii) tedy je ona chybějící nerovnost, kterou jsme chtěli ukázat.

$\boxtimes$

Pozn: Operátor T' nazýváme hermitovsky sdružený s T (případně adjungovaný k T)

Následující definice vychází z toho, že pokud je v předchozí větě $H_1 = H_2$, máme: $T \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \exists T' \in \mathcal{L}(H)$, a tedy se ptáme, kdy $T = T'$.

Def. Buď H Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ nazveme hermitovský (případně samoadjungovaný) pokud $T = T'$ (přičemž oba jsou definovány na celém H).

$\boxed{\text{Vlastnosti samoadjungovaných operátorů}}$

Buď $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $T' = T$. Potom

(1) $(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H$ (zřejmý důsledek definice)

(2) Pokud $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. (Všechna vl. č. hermit. operátoru jsou reálná)

D. Nechť $Tx = \lambda x$, $x \neq 0$

Pak $(Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2$

$\quad\|$

$(x, Tx) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x) = \bar{\lambda}\|x\|^2$ $\Big\}$ $: \|x\|^2 \neq 0$

$\Downarrow$

$\lambda = \bar{\lambda}$ ctd.

(3) $\sigma(T) \subset \langle m(T), M(T) \rangle$, kde $m(T) = \inf\{(Tx, x), \|x\| = 1\}$
$M(T) = \sup\{(Tx, x), \|x\| = 1\}$

(4) Alespoň 1 z hodnot $\|T\|, -\|T\|$ je vlastním číslem T, tedy platí

$$\boxed{\rho(T) = \|T\|}$$

(5) Pokud $\lambda \neq \mu$ jsou dvě vlastní čísla T, a x, y jsou jim odpovídající vlastní vektory, pak $(x, y) = 0$, tedy $x \perp y$, kde „$\perp$" označuje kolmost.

D. $\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$

$$\Rightarrow (\lambda-\mu)\cdot(x,y)=0 \quad \Big| : \lambda-\mu\neq 0$$
$$\underline{(x,y)=0}.$$

$\boxed{4.3}$ Kompaktní samoadj. operátory na Hilbertově prostoru

Buď $T\in\mathcal{C}(H)$, T samoadjungovaný, H Hilbertův.

- Pak T má nejvýše spočetné množství vl. čísel, která jsou všechna reálná, leží v $\langle -\|T\|, \|T\|\rangle$; nula je jediným hrom. bodem, může a nemusí být vlastním číslem.
- Ke každému vl. číslu $\exists$ jen konečně mnoho LN vlastních vektorů. Vl. vektory, které odpovídají různým vlastním číslům, jsou kolmé.
- Základní otázka: Vezmeme-li všechny vl. vektory všech (nenulových) vl. čísel, tvoří ON bázi H? Odpověď dá tzv. Hilbert–Schmidtova věta.

Nejprve dvě intermezza:

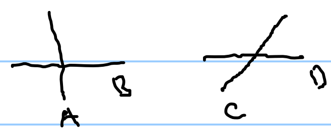
(I) Direktní součet podprostorů

Def: H lineární vektorový prostor, A, B uzavřené lin. podprostory H.
Řekneme, že $A\oplus B = H$ (direktní součet A,B), pokud:

1) $A+B=H$, tj. $\forall h\in H\ \exists a\in A\ \exists b\in B,\ a+b=h$
2) $A\cap B=\{0\}$

Př. $\underbrace{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}=\mathbb{R}^2}$; $\mathbb{R}^2+\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$

nemusí být určeno jednoznačně :



$A\oplus B = C\oplus D = \mathbb{R}^2$

Nechť dále A uzavřený lin. podprostor v Hilbertově prostoru H.

Definujeme $A^\perp := \{y\in H,\ (x,y)=0\ \forall x\in A\}$

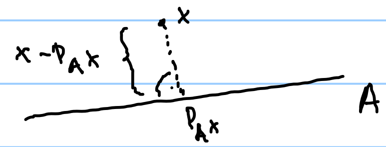
Potom: a) $A^\perp$ je lineární (zřejmé)

b) $A^\perp$ je uzavřený : $\underset{0}{\underset{\parallel}{(x,y_n)}} \to \underset{0}{\underset{\parallel}{(x,y)}}$ spojitost sk. součinu

c) $(A^\perp)^\perp = A$ (D.Cv.)

Tvrdím: $A \oplus A^\perp = H$

Nejlépe nahlédnout v kontextu tzv. lemmatu o kolmé projekci v H: | A uz.-lin. podprostor v H
Pak $\forall x \in H\ \exists P_A x \in A$, $x - P_A x \perp y \ \forall y \in A$



Nyní naše tvrzení plyne snadno

- $x \in H \rightsquigarrow x - P_A x \in A^\perp$; a přitom $x = \underbrace{(x - P_A x)}_{\in A^\perp} + \underbrace{P_A x}_{\in A}$
- $v \in A \cap A^\perp \Rightarrow (\underset{A}{v}, \underset{A^\perp}{v}) = 0$ cbd.

(II) Připomenutí teorie Fourierových řad v H.

Platí: Je-li H Hilbertův prostor, pak je ekvivalentní:

(i) H je separabilní

(ii) $\exists$ spočetná úplná OG báze $\{e_n\}$ v H

(iii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \quad \forall x \in H$

(iv) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} \quad \forall x \in H$ (Parsevalova rovnost)

Pozn.: • separabilita = existuje spočetná hustá podmnožina H
(v neseparabilním prostoru ani nelze čekat existenci úplné spočetné báze)

- „úplnost" v bodě (ii) chápeme takto:
$\{e_n\}$ je úplná OG báze v $H \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (y, e_n) = 0 \ \forall n \Rightarrow y = 0$
(tj. neexistuje už žádný další nenulový vektor, který by byl kolmý na všechny prvky e_n)
- (iii) je tvrzení o tom, že každý prvek H je roven součtu své Fourierovy řady
- (iv) je zobecnění Pythagorovy věty do H.

Věta (Hilbert – Schmidt)

H Hilbertův, $T \in \mathcal{C}(H)$, T samoadjungovaný; potom

$$H = \Lambda \oplus \operatorname{Ker} T$$

kde Λ = uzavřený lin. podprostor H, generovaný všemi vl. vektory T, které odpovídají všem nenulovým vl. číslům T.

(D) T kompaktní, hermitovský $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \in \mathbb{R}$, nenulová vl. čísla T

$$E_j = \operatorname{Ker}(T - \lambda_j I) = \{y \in H,\ y \neq 0;\ Ty = \lambda_j y\},\ j = 1, 2, \ldots$$

víme $\dim E_j = m_j < \infty$

Buď nyní B_j … OG báze E_j, složená z vl. vektorů, odpovídajících vl. č. λ_j; $|B_j| = m_j$.

lze vždy narídit pomocí Gramm – Schmidtova OG procesu.

$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ … nejvýše spočetná množina vl. vektorů T.

Pokud $x, y \in B$, $x \neq y$:
- x, y jsou příslušné stejnému vl. č. λ_j $\Rightarrow \exists j,\ x, y \in B_j \Rightarrow x \perp y$
- x, y jsou příslušné různým vl. č. $\Rightarrow x \perp y$ (z vlastností samoadj. operátoru)

$\Rightarrow$ <u>B je OG</u>, $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$

<u>Def:</u> $\Lambda := \overline{\operatorname{Lin}(B)}$:
- Λ je lineární podprostor H (uzávěr lin. podprostoru je lin. podprostor)
- Λ je uzavřený $\Rightarrow$ <u>Λ je Hilbertův</u>
- Λ je separabilní: B je spočetná a hustá v Λ.

Tedy: $x \in \Lambda \Rightarrow \exists\, \gamma_n \in \mathbb{C}$, $\underline{x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n}$

Tím jsme popsali „separabilní kus H". Otázka: kolik toho ještě zbývá?

Ukážme postupne

(A) $\boxed{T\Lambda \subset \Lambda}$

$$x\in\Lambda: \quad Tx = \underset{\text{spoj.}}{T}\Big(\underbrace{\sum \xi_n e_n}_{\text{konverg.}}\Big) = \sum_n \xi_n T e_n = \sum \underbrace{\xi_n \lambda_n}_{\in\mathbb{C}} e_n \in \Lambda$$

treba konvergenciu

ale to je pravda, neboť vieme, že súčet tejto rady je rovný Tx.

(B) Uvažujme $\Lambda^\perp$; ukážeme $\boxed{T\Lambda^\perp \subset \Lambda^\perp}$

$$\left.\begin{array}{l} y\in\Lambda^\perp \\ x\in\Lambda \text{ lib.} \end{array}\right\} \quad (Ty,x) \underset{\text{samoadj.}}{=} (\underset{\in\Lambda^\perp}{y}, \underset{\in\Lambda}{Tx}) = 0 \Rightarrow Ty\in\Lambda^\perp.$$

(C) Ukážeme dokonca $\boxed{T\Lambda^\perp = \{0\}}$

$\Lambda^\perp$ je tiež uzavretý podpriestor H. $\Rightarrow$ $\Lambda^\perp$ je Hilbertov

def $\tilde{T} := T\big|_{\Lambda^\perp}$

kompaktnosť a samoadj. sa zachová (dôležité je $T\Lambda^\perp \subset \Lambda^\perp$)

Ukážeme, že $\tilde T$ nemá žiadne nenulové vl. č. Nech áno:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\neq 0 \text{ vl. č. } \tilde T \Rightarrow \exists\, y\neq 0,\ y\in\Lambda^\perp \\ \tilde T y = \lambda y \\ \\ \text{ale tiež } Ty = \lambda y \Rightarrow y\in\Lambda \end{array}\right\} \text{ spor.}$$

$$\Rightarrow \rho(\tilde T) = 0 \Rightarrow \|\tilde T\| = 0 \Rightarrow \tilde T = 0 \Rightarrow T\big|_{\Lambda^\perp} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{T(\Lambda^\perp) = \{0\}}$$

- tedy $\Lambda^\perp \subset \ker T$
  Ale víme $\Lambda \oplus \Lambda^\perp = H$ $\Big\} \Rightarrow$ $\Lambda + \ker T = H$
  (ještě nemusí být direktní)

Zbývá ukázat $\underbrace{\Lambda \cap \ker T = \{0\}}$.

(viz $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 + \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$)

Buď $z \in \Lambda \cap \ker T$

$\Downarrow$

$$z = \sum_m \beta_m e_m \qquad / T$$

$$0 = Tz = \sum \beta_m T e_m = \sum \beta_m \lambda_m e_m \quad \overset{\text{jedn. F. ř.}}{\Longrightarrow} \quad \beta_m \lambda_m = 0 \quad \forall m$$

$\lambda_m \neq 0 \Rightarrow \beta_m = 0 \quad \forall m$

$\Downarrow$

$z = \sum \beta_m e_m = 0$ cbd

$\boxtimes$

Pozn.: • V důkazu nám stačilo $\Lambda^\perp \subset \ker T$, lze dokázat dokonce $\Lambda^\perp = \ker T$.

- $\ker T = \{0\} \Rightarrow H = \Lambda$.

Důsledek: V uvedené situaci tedy platí:

T je kompaktní samoadjungovaný na H
$\{e_m\}$ je OG množina vlastních vekt. vektorů příslušných všem nenulovým vl. číslům λ_m $\Big\} \Rightarrow \forall h \in H \ \exists \alpha_m \in \mathbb{C}$
$\exists z \in \ker T$, že

$$h = \sum_m \alpha_m e_m + z \qquad / T \qquad (*)$$

$$Th = \sum \alpha_m T e_m + \underset{0}{\underset{\parallel}{Tz}}$$

$$\boxed{Th = \sum \alpha_m \lambda_m e_m} \qquad \text{tj. } T(H) \subset \Lambda$$

$(*)$ násob. $(\cdot, e_k) \Rightarrow (h, e_k) = \sum \alpha_m \underbrace{(e_m, e_k)}_{\delta_{mk}\|e_m\|^2} + \underbrace{(z, e_k)}_{=0 \text{ neb } \Lambda^\perp = \ker T}$

$$\Rightarrow \alpha_k = \frac{(h, e_k)}{\|e_k\|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \sum_n \frac{(h, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n + z, \quad Tz = 0} \qquad (1)$$

$$\boxed{Th = \sum_n \lambda_n \frac{(h, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n} \qquad (2)$$

*)

Věta Buď $\{e_n\}$ úplná ON báze v separabilním Hilb. prostoru. Buďte $\alpha_n \in \mathbb{C}$ taková, že $M := \sup\{|\alpha_n|\} < \infty$.
Definujme

$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (h, e_n) e_n, \text{ pokud suma konverguje.} \qquad (+)$$

Potom

1) Suma vpravo v (+) vždy konverguje, $T \in \mathcal{L}(H)$, $\|T\| = M$
2) T samoadjungovaný $\Leftrightarrow \alpha_n \in \mathbb{R}$
3) $T \in \mathcal{C}(H) \Leftrightarrow \exists$ přerovnání α_n, že $\lim \alpha_n = 0$

Pozn.:
- $\alpha_n = 1 \ \forall n$: $Th = h$ (F. řada) $\Rightarrow$ T identita
(dle 2), 3) není kompaktní, je samoadj.)
- $\alpha_n = \frac{1}{n}$: definuje samoadj., kompakt. operátor. Atd..

*) Pozn.: 1) a 2) připomínají Fourierovu řadu, v 1) je však prvek z navíc. Pokud $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, je i $z = 0$ a 1) má tvar obyčejné F. řady v úplné bázi $\{e_n\}$. Výhoda 2) je v tom, že se tam již prvek z nevyskytuje, bez ohledu na strukturu $\operatorname{Ker} T$.

5. NEOMEZENÉ OPERÁTORY

5.1. Symetrie a samoadjungovanost

- Připomenutí: X, Y Banachovy, $T : X \to Y$ lineární. Potom

  <u>T omezený $\Leftrightarrow$ $\|T\| < \infty$ $\Leftrightarrow$ T spojitý.</u> (viz str. 6)

- Půjde o stále ještě <u>lineární</u>, ale <u>neomezené</u>, tedy <u>nespojité</u> operátory.

  Nejsou to neobvyklé objekty, naopak – mnohý typický <u>diferenciální</u> operátor je nespojitý – viz příklad na str. 8 těchto poznámek.

Budeme pracovat v Hilbertových prostorech, s využitím vlastností $(\cdot,\cdot)$.
Ukazuje se, že jsou zde problémy se samotným definičním oborem příslušného adjungovaného operátoru, a dokonce i samotného operátoru T.

Buď H Hilbertův, $D(T) \subseteq H$ lin. podprostor. $T : D(T) \to H$ lineární (v principu jakýkoli, tj. omezený či neomezený).

<u>Pozn.</u>: Místo T' budeme v této kapitole používat T^*. Půjde často o funkce a značení $y' \in T'$ by mohlo být matoucí.

<u>Def.</u>: 1) $D(T^*) := \{ y \in H ;\ \exists!\, h^* \in H,\ (Tx, y) = (x, h^*)\ \forall x \in D(T) \}$

2) Je-li $D(T^*) \neq \emptyset$, definujeme <u>adjungovaný operátor</u> T^* takto:

$$T^* : D(T^*) \to H$$
$$T^* : y \mapsto h^* \quad \text{(z definice 1) výše)}$$

<u>Pozn.</u>: • Pokud je $D(T^*) \neq \emptyset$, tak v důsledku definice máme ihned

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \qquad \forall x \in D(T)\ \ \forall y \in D(T^*) \qquad (*)$$

Zatímco pro omezené (spojité) operátory je vztah $(*)$ důsledkem Riesz-Fréchetovy věty, zde je potřeba $(*)$ postulovat – nemáme T spojité.

Přirozeně klademe:

Def: $T : D(T) \to H$ nazveme samoadjungovaný, pokud

1) $\exists\, D(T^*) \neq \emptyset$, $D(T^*) = D(T)$
2) $T = T^*$ na $D(T) = D(T^*)$

Pozn: Rovnost definičních oborů je zde velmi důležitá. Později uvidíme, že pro $D(T) \neq D(T^*)$ a $T = T^*$ na $D(T) \cap D(T^*)$ dostáváme jiné spektrální vlastnosti.

Příjemný poznatek:

Lemma $D(T^*) \neq \emptyset \Rightarrow T^*$ je lineární.

Otázka č. 1 Kdy je $D(T^*) \neq \emptyset$?

Věta $D(T^*) \neq \emptyset \iff \overline{D(T)} = H$

D Lukeš, 11.6.

Otázka č. 2 Lze mít přímo $D(T) = H$? To je přece nejjednodušší realizace požadavku $\overline{D(T)} = H$. Odpověď je překvapivá: ne. Než se k ní však dopracujeme, budeme potřebovat ještě jeden pojem.

Def: $T : D(T) \to H$, $\overline{D(T)} = H$, T lineární,
Řekneme, že T je symetrický, pokud

$$(Tx, y) = (x, Ty) \qquad \forall x, y \in D(T)$$

Není to těžší, co samoadjungovaný:

$\boxed{\text{Lemma}}$ T symetrický $\iff \begin{cases} 1)\ D(T) \subseteq D(T^*) \\ 2)\ \ T = T^* \end{cases}$

Odtud: T samoadj. $\Rightarrow$ T symetrický

speciálně:

<u>T není symetrický $\Rightarrow$ T není samoadjungovaný</u>

$\downarrow$

Používá se k tomu, abych ukázal, že T není samoadjungovaný, aniž bych musel hledat $D(T^*)$

Nyní ono překvapení. Platí

$\boxed{\text{Věta}}$ $\left.\begin{array}{l} D(T) = H \\ T \text{ lineární, symetrický} \end{array}\right\} \Rightarrow$ <u>T omezený</u> Lukeš 11.10.

Odtud $\left.\begin{array}{l} T \text{ samoadj., lin.} \\ D(T) = H \end{array}\right\} \Rightarrow$ T omezený.

Tedy neomezený operátor, který je samoadjungovaný, má $D(T) \neq H$.

Typická (a jediná možná) situace pro samoadjungované neomezené operátory: $\left.\begin{cases} H \text{ Hilbert} \\ D(T) \neq H,\ \overline{D(T)} = H \\ D(T) \text{ lin. podprostor} \end{cases}\right\} \overset{\text{def}}{\equiv}$ T je <u>hustě definovaný</u> na H.

<u>Terminologie</u>:

	Lukeš, Formánek	Čihák, aj.
pro omezené lin. op. splývá	symetrický	hermitovský
	samoadjungovaný	samoadj.

(Př) $H = L^2(0,1)$; $D(T) = C^1(\langle 0,1\rangle)$. Víme $\overline{C^1(\langle 0,1\rangle)} = L^2(0,1)$.

def $Tf = f'$. Je lineární, neomezený.

Zkoumejme symetrii jako nutnou podmínku samoadjungovanosti.

$$(Tf,g) = (f',g) = \int_0^1 f'\bar{g} \quad ; \quad (f,Tg) = \int_0^1 f\bar{g}'$$

V touze získat rovnost zintegrujeme per partes:

$$\int_0^1 f'\bar{g} = [f\bar{g}]_0^1 - \int_0^1 f\bar{g}' \overset{?}{=} \int_0^1 f\bar{g}'$$

Rovnost nenastane ani v případě, kdy se zbavíme hraničních členů: například modifikací $D(T)$, kam bychom přidali okrajové podmínky ($f = 0$ na hranici). Ale i tak se výsledné integrály liší o znaménko a operátor T tedy není symetrický. Poučením je, že $Tf = f'$ nemůže být samoadjungovaným – žádná sestava okrajových podmínek nemůže změnit znaménko integrálu přes interval $(0,1)$.

Spočtěme nyní z definice (jako procvičení) $D(T^*)$.

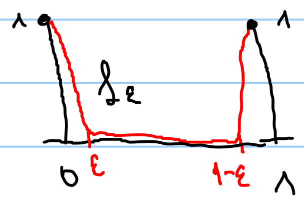
Je:

$$D(T^*) = \{ g \in C^1(\langle 0,1\rangle)\ \exists!\, h^* \in L^2(0,1),\ \underbrace{(Tf,g) = (f,h^*)}_{[f\bar{g}]_0^1 - \int_0^1 f\bar{g}' = \int_0^1 f\bar{h}^*} \}.$$

$$[f\bar{g}]_0^1 - \int_0^1 f\bar{g}' = \int_0^1 f\bar{h}^* \qquad (*)$$

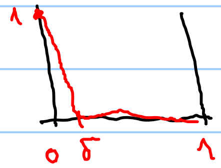
(*) má platit $\forall f \in C^1(\langle 0,1\rangle)$.

a) volbou f:

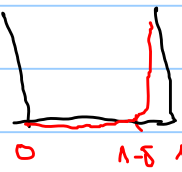


Při dosazení těchto f_ε do (*) a $\varepsilon \to 0+$ dostaneme $[f\bar{g}]_0^1 = 0$

b) dále volbou f_δ



resp.



dostaneme $g(0) = g(1) = 0$. To je první zpřesnění $\Rightarrow$
$D(T^*) \subseteq \{g \in C^1(\langle 0,1\rangle),\ g(0) = g(1) = 0\}$

c) (*) se tedy redukuje na $-\int_0^1 f\overline{g'} = \int_0^1 f\,\overline{h^*}$

$$\int_0^1 f\,\overline{(g' + h^*)} = 0 \qquad \forall f \in C^1(\langle 0,1\rangle)$$

Odtud (z Du Bois-Reymondova lemmatu) $\Rightarrow$ $h^* = \underbrace{-g'}_{\in C}$ (s.v.)

[protože h^* je s.v. rovno spojité fci, lze ji uvažovat jako spojitou.]

Nalezli jsme h^*, teď není třeba dále modifikovat $D(T^*)$.
Máme:

$$\left|\begin{array}{l} D(T^*) = \{g \in C^1(\langle 0,1\rangle),\ g(0) = g(1) = 0\} \\ T^* g = -g^* \end{array}\right.$$

Evidentně $T \neq T^*$, navíc i $D(T^*) \subsetneq D(T)$.

Pz. Pro samoadjungovanost je potřeba modifikovat jak T (aby vyšlo $T^* = T$), tak $D(T)$ (aby vyšlo $D(T^*) = D(T)$).
Myšlenka pro modifikaci T vychází z porovnání
$$Tf = f' \Rightarrow T^* f = -f'$$
Ono přebývající znaménko je potřeba „rozpůlit mezi T a T^*".
Definujeme $\boxed{Tf = if'}$

Protože nutnou podmínkou samoadjungovanosti je symetrie, bude pro symetrii potřeba mít v $D(T)$ nějaké nadbytečné okrajové podmínky.

Budeme zkoumat 3 možnosti:

a) $D(T_1) = C^1(\langle 0,1\rangle)$ $\qquad T_1 = T|D(T_1)$

b) $D(T_2) = \{f \in C^1(\langle 0,1\rangle),\ f(0) = f(1)\}$ $\qquad T_2 = T|D(T_2)$

c) $D(T_3) = \{f \in C^1(\langle 0,1\rangle),\ f(0) = f(1) = 0\}$ $\qquad T_3 = T|D(T_3)$

Symetrie:

$$(Tf,g) = \int_0^1 i f' \bar{g} = \underbrace{\left[i f \bar{g} \right]_0^1}_{\substack{=0 \text{ pro } f,g\in D(T_2) \\ f,g\in D(T_3) \\ \neq 0 \text{ pro } f,g \in D(T_1)}} - i \int_0^1 f \bar{g}' = \left[i f \bar{g} \right]_0^1 + \underbrace{\int_0^1 f\, \overline{i g'}}_{(f,Tg)}$$

$$\Rightarrow (Tf,g) = (f,Tg) \quad \text{pro } T_2, T_3 \ \dots \text{ je symetrický}$$
$$\neq (f,Tg) \quad \text{pro } T_1 \ \dots \text{ není symetrický}$$

Nyní lze ukázat (zkuste!) podobně jako v předch. příkladu

- $D(T_1^*) = D(T_3) \subsetneq D(T_1)$ (další potvrzení toho, že T_1 není symetrický)
- $D(T_2^*) = D(T_2)$ (tj. může být samoadjungovaný)
- $D(T_3^*) = D(T_1) \supsetneq D(T_3)$ (tj. potvrzení symetrie, ale zároveň důkaz, že T_3 není samoadj.)

Jediný kandidát na samoadjungovanost je T_2, který je symetrický a splňuje $D(T_2^*) = D(T_2)$. Zbývá ověřit, že $T = T^*$ na tomto společném def. oboru. To však plyne podobně jako v předchozím příkladu: symetrie dá $(Tf,g) = (f,Tg) = (f,h^*)$ $\forall f \in C^1(\langle 0,1\rangle)$ $\downarrow$ na $D(T_2^*)$ atd.

Závěr: T_1 není symetrický (ani samoadj.), T_3 je symetrický (ale není samoadj.), T_2 je samoadjungovaný.

Vidíme, že i v případě $D(T)$ se okrajové podmínky „rozdělují napůl" mezi $D(T_2)$ a $D(T_2^*)$.

Z pohledu spektra je mezi symetrickým a samoadjungovaným operátorem zásadní rozdíl, jak uvidíme v zápětí.

5.2. Spektrum neomezených operátorů

Pro omezené operátory hrály zásadní roli pro charakter spektra tyto dva pojmy:

- samoadjungovanost : ponecháme i zde
- kompaktnost : pro neomezené operátory nemá smysl, neboť kompaktní operátor musí být nutně omezený.

Roli kompaktnosti přebírá tzv. uzavřenost operátoru.

Def: $D(T) \subsetneq H$ lin. podprostor, $T: D(T) \to H$. Řekneme, že T je uzavřený, pokud:

$$\left.\begin{array}{r} x_n \in D(T),\ x_n \to x \in H \\ Tx_n \to g \in H \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in D(T) \\ Tx = g \end{array}$$

(jinak řečeno, T má uzavřený graf: $[x_n, Tx_n] \to [x, g]$
$\Rightarrow g = Tx$
a $[x, Tx] \in$ graf.

V případě omez. operátorů jsme dále studovali:

$\underbrace{\text{PROSTOTA, NA}}_{\text{má smysl i zde}}$, $\underbrace{\text{SPOJITOST INVERZE}}_{\text{překvapivě má taky smysl}}$

Překvapivá zjištění: nespojité lineární operátory v nekonečné dimenzi
a) mohou být uzavřené (ač jsou nespojité)
b) mohou mít spojitou inverzi.

Následuje telegrafický přehled poznatků.

$\boxed{\text{Věta}}$ Buď T hustě definovaný lineární neomezený operátor na Hilbertově prostoru H. Potom:

1) $\overline{R(T)} = H \implies T$ je prostý a na $R(T)$
2) $R(T) = H \implies T$ je prostý, na, samoadjungovaný a T^{-1} je spojitý.

3) T^{-1} je spojitý $\iff$ T prostý, na H, uzavřený.

[Viz např.: Rudin: Functional analysis, 13.11 a dále]

Def: Resolventa $T \equiv RES(T) := \{\lambda \in \mathbb{C},\ T_\lambda$ prostý, na H, T_λ^{-1} spojitý $\}$
Spektrum $T \equiv \sigma(T) := \mathbb{C} \setminus RES(T)$

$\sigma(T) =$ bodové spektrum (vl. č.) ... $\{\lambda \in \mathbb{C},\ \exists x \neq 0,\ Tx = \lambda x\}$
zbytek

Pozn: Spektrum neomezeného operátoru může být jakákoli (neomezená) podmnožina $\mathbb{C}$, včetně celého $\mathbb{C}$.

Vlastnosti spektra neomezených operátorů

1) T uzavřený $\implies$ $\sigma(T)$ je uzavřená v $\mathbb{C}$

2) T uzavřený a symetrický, pak nastane právě jedna z následujících situací:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \sigma(T) = \mathbb{C} \\ &b)\ \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\lambda \geq 0\} \\ &c)\ \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\lambda \leq 0\} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow T \text{ symetrický, ale ne samoadj.}$$

$$d)\ \sigma(T) = \text{uzavřená podmnožina } \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$T \text{ samoadjungovaný}$$

Případy a) – c) a případ d) ukazují právě ten velký rozdíl mezi samoadjungovaným a pouze symetrickým operátorem.

3) Je-li T uzavřený a samoadjungovaný, pak (kromě toho, že jeho vlastní čísla musí být reálná) platí, že:

| Vlastní vektory, příslušné různým vlastním číslům, jsou kolmé.

Pozn.:
- Vl. čísel i vl. vektorů může být i nespočetně mnoho. Existuje tzv. spojitý funkcionální kalkulus, užívající integrálu místo sumy.
- V teorii neom. operátorů neznáme a priori nic o úplnosti báze. V konkrétních případech bývá ji potřeba jejich úplnost ukázat (případ od případu).

6. LIN. DIFER. OPERÁTORY

6.1. Výrazy v samoadjungovaném tvaru

Mějme

$$\ell(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, y^{(k)} \qquad y \in C^n(a,b),\ y = y(x)$$

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$p_k \in C(a,b)$, $p_n \not\equiv 0$ na (a,b) — y, p_k cplx. fce

Nazveme jej lineární diferenciální výraz (LDV) n-tého řádu.

Pod pojmem lineární diferenciální operátor (LDO) n-tého řádu budeme rozumět LDV + definiční obor

$$L = \ell \quad \& \quad \mathcal{D}(L), \quad tj. \quad L = \ell\big|_{\mathcal{D}(L)}.$$

Budeme chtít, aby L byl hustě definovaný v H (Hilbertův), tj. $\mathcal{D}(L) \neq H$, $\overline{\mathcal{D}(L)} = H$.

Typicky budeme mít (viz předch. kapitola)

$$\mathcal{D}(L) = \left(H \cap C^n(a,b)\right) + \text{okrajové podm.}$$

Přitom víme, že symetrie operátoru je nutnou podmínkou samoadjungovanosti.

V dalším se budeme zabývat hledáním dalších nutných podmínek samoadjungovanosti. Typicky budeme pracovat s prostorem

$$C^\infty_{cpt}(a,b) = \{ f \in C^\infty(a,b),\ \exists K \subset (a,b) \text{ kompakt},\ f \equiv 0 \text{ na } (a,b) \setminus K \}$$

výhodou tohoto přístupu je to, že při per partes pro funkce $f \in C^\infty_{cpt}(a,b)$ jsou hraniční členy nulové, a tedy se nemusíme zabývat okrajovými podmínkami.

① Definujme tzv. adjungovaný výraz k $\ell(y)$:

$$\ell^*(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\overline{p_k(y)}\, y\right)^{(k)}$$

Lemma K danému ℓ je ℓ^* jediný lineární diferenciální výraz, pro který

$$(\ell(y), z) = (y, \ell^*(z)) \qquad \forall y, z \in C^\infty_{cpt}(a,b)$$

① • Rovnost = per partes:

$$(\ell(y),z) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x)\, y^{(k)}\, \overline{z(x)} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \int_a^b (p_k(x)\overline{z})'\, y^{(k-1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_a^b \underbrace{(p_k(x)\overline{z})^{(k)}}_{\overline{(\overline{p_k(x)}\, z)^{(k)}}}\, y(x) = (y, \ell^*(z))$$

• Jednoznačnost: nechť jsou dva, ℓ^* a $\tilde{\ell}$; pak

$$(\ell(y),z) = (y,\ell^*(z)) = (y,\tilde{\ell}(z)) \qquad \forall y,z \in C^{\infty}_{cpt}(a,b)$$

$$\ell^*(z) = \tilde{\ell}(z) \qquad \forall z \in C^{\infty}_{cpt}(a,b) \qquad \boxed{\text{cbd}}.$$

② Další nutná podmínka samoadjungovanosti: $\ell = \ell^*$, tj.

$$\sum_{k=0}^{n} p_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\overline{p_k} y)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \overline{p_k}^{(k-j)} y^{(j)}$$

Srovnejme koef. u $y^{(n)}$: $\quad p_n = (-1)^n \overline{p_n}$

- n sudé: $p_n = \overline{p_n} \Rightarrow p_n$ reálný
- n liché: $p_n = -\overline{p_n} \Rightarrow \underbrace{p_n + \overline{p_n}}_{2\mathrm{Re}\, p_n} = 0 \Rightarrow p_n = i q_n$, q_n reálný

Aha... lze z toho odvodit tvar tzv. elem. diferenciálních výrazů

Def: Elementárními dif. výrazy nazvu LDV tvaru

$$\left.\begin{aligned} E_{2k} &= (-1)^k (p\, y^{(k)})^{(k)} \\ E_{2k-1} &= \frac{i}{2}\left[(p\, y^{(k-1)})^{(k)} + (p\, y^{(k-1)})^{(k)}\right] \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &p \text{ reálná fce} \\ &k = 1,2,\dots \end{aligned}$$

Platí

Věta (Čihák, str. 210)

$\ell(y) = \ell^*(y)\ \forall y \in C^{\infty}_{cpt}(a,b) \iff \ell$ je konečnou lin. kombinací výrazů tvaru E_{2k} a E_{2k-1}.

② Čihák

Ř: $E_1 = \frac{i}{2}\left((py)' + py'\right) = \frac{i}{2}(p'y + 2py') = ipy' + \frac{i}{2}p'y$. Pro $p \equiv 1$: iy'

$E_2 = (py')'$ ... tzv. diferenciální výraz 2. řádu v samoadj. tvaru

6.2 Ortogonální báze v L^2_ρ složené z polynomů

Uvažujme

$$H = L^2_\rho(a,b) := \left\{ f:(a,b)\to\mathbb{C};\ \int_a^b \rho|f|^2 < \infty, \text{ kde } \rho:(a,b)\to\mathbb{R} \text{ je tzv. } \underline{\text{váha}}, \text{ splňující } \rho\geq 0, \rho\in C, \rho\in L^1 \right\}$$

Lze ukázat, že $L^2_\rho(a,b)$ je Hilbertův se skalárním součinem

$$(y,z)_{2,\rho} := \int_a^b \rho y \bar{z}$$

a normou

$$\|y\|^2_{2,\rho} = \int_a^b \rho|y|^2 .$$

Pozn: Proč uvažujeme L^2_ρ? Například proto, že chceme pracovat s polynomy na $\mathbb{R}$. Přitom žádný polynom P není prvkem $L^2(\mathbb{R})$. Ale všechny polynomy jsou prvkem $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$.

Uvažujme nyní $T: D(T) \longrightarrow L^2_\rho$, $D(T) \subset L^2_\rho$; $\overline{D(T)} = L^2_\rho$ samoadjungovaný (tj. má reálná vl. č.) a uzavřený neomezený lin. operátor.

Definujme vlastní číslo λ a vl. fci y operátoru T, s vahou ρ:

$$Ty = \lambda\rho y.$$

Jsou i vl. č. s vahou reálná?

Úvaha

$$(Ty,y)_2 \overset{\text{vl. č. s vahou}}{=} (\lambda y\rho, y)_2 = \lambda(\rho y,y)_2 = \lambda\int_a^b \rho|y|^2 = \lambda\|y\|^2_{2,\rho}$$

sk. součin bez váhy, tj. samoadjungovaný bez váhy

$$(y,Ty)_2 = \dots \bar{\lambda}\|y\|^2_{2,\rho}$$

, ano, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Dále, pro $Ty_j = \lambda_j \rho y_j$ $\quad j=1,2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$, máme

$$\lambda_1 (y_1,y_2)_{2,\rho} = \lambda_1 (y_1\rho, y_2)_2 = (Ty_1,y_2)_2 = (y_1, Ty_2) = \dots \lambda_2 (y_1,y_2)_{2,\rho}$$

$$\overset{\lambda_1\neq\lambda_2}{\Rightarrow} \quad (y_1,y_2)_{2,\rho} = 0 \Rightarrow \underline{\text{kolmé v } L^2_\rho}$$

Závěr: Uvažujeme vl. č. s vahou a sk. součin bez váhy (pro samoadjungovanost T). Dostáváme OG systém v L^2_ρ.

Obecně v tomto případě nemáme k dispozici

- výsledek o úplnosti systému OG fcí
- výsledek o úplnosti báze (musí se dokazovat případ od případu).

Víme však, že generujeme OG množinu, a dále máme k dispozici Weierstrassovu větu o tom, že polynomy jsou husté v $C(K)$, která je naše hustá v $L^2_\rho(K)$. Proto se zdá rozumné zabývat se OG systémy polynomů v L^2_ρ.

Následující věta může být trochu překvapivá.

Věta $L^2_\rho(a,b)$; $-\infty \le a < b \le +\infty$, ρ taková váha, že $\|P\|_{2,\rho} < \infty$ $\forall P$ polynom. Buď $\{\varphi_n\}$ systém reálných OG polynomů v L^2_ρ; st $\varphi_n = n$, $n=0,1,2,3,\dots$ Potom $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists A_n, B_n, C_n \in \mathbb{R}$, že

$$\boxed{x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1}}$$

Dk: $n=0 \Rightarrow \varphi_0 = c_{\neq 0}$, potom $x\varphi_0 = cx = \frac{c}{a}\underbrace{(ax+b)}_{\varphi_1} - \frac{b}{a}\cdot\underbrace{c}_{\varphi_0} \Rightarrow x\varphi_0 = \frac{c}{a}\varphi_1 - \frac{b}{a}\varphi_0$

(1) $n\in\mathbb{N}$: st $(x\varphi_n) = n+1 \Rightarrow \exists\ \gamma_{n,k}\in\mathbb{R}$

$$x\varphi_n = \sum_{k=0}^{n+1}\gamma_{n,k}\varphi_k \qquad (*)$$

(platí obecně pro jakékoli polynomy, st $\varphi_n = n$, nemusí být OG – rozmyslete si)

$$/\cdot(\cdot,\varphi_j)_{2,\rho} \quad \forall j$$

$$(x\varphi_m, \varphi_j)_{2,\rho} = \sum_{k=0}^{m+1} \gamma_{mk} \underbrace{(\varphi_k, \varphi_j)_{2,\rho}}_{\delta_{kj} \|\varphi_k\|^2_{2,\rho}} = \gamma_{m,j} \|\varphi_j\|^2_{2,\rho} \qquad (+)$$

Ale suma uprostřed je rovna nule pro $j > m+1$, neb $\varphi_k \perp \varphi_j$ pro $k \in \{0, \dots, m+1\}$ a $j > m+1$. Z (+) tedy plyne $\underline{\gamma_{m,j} = 0 \ \forall j > m+1}$

Díky reálnosti φ_m je však

$$(x\varphi_m, \varphi_j)_{2,\rho} = (\varphi_m, x\varphi_j)_{2,\rho} = (\varphi_m, \sum_{p=0}^{j+1} \gamma_{j,p} \varphi_p) = \sum_{p=0}^{j+1} \gamma_{j,p} \underbrace{(\varphi_m, \varphi_p)_{2,\rho}}_{=0 \ \forall m > j+1}$$

ze stejného důvodu

Tato suma je však dle (+) stále rovna $\gamma_{m,j} \|\varphi_j\|^2_{2,\rho} \Rightarrow \underline{\gamma_{m,j} = 0 \ \forall j < m-1}$

Celkem $\gamma_{m,j} = 0 \quad \forall j \neq m-1, m, m+1 \Rightarrow$ (*) se redukuje na

$$x\varphi_m = \underbrace{\gamma_{m,m-1}}_{=:A_m} \varphi_{m-1} + \underbrace{\gamma_{m,m}}_{=:C_m} \varphi_m + \underbrace{\gamma_{m,m+1}}_{=:B_m} \varphi_{m+1}$$

$\boxed{\text{cbd}}$.

<u>Pozn.</u>: Může se ukázat, že $\left.\begin{array}{l} a = -b \\ \rho \text{ sudá} \end{array}\right\} \Rightarrow C_m = 0 \ \forall m$

Použití právě odvozeného rekur. vzorce – výpočet OG polynomů; výpočet jejich norem:

$$x\varphi_m = A_m \varphi_{m+1} + C_m \varphi_m + B_m \varphi_{m-1}, \qquad m = 1, 2, 3, \dots$$

a) $A_m \neq 0$, jinak je stupeň polynomu vpravo $= m$.

b) Vynásobit rekur. vztah $(\cdot, \varphi_{m+1})_{2,\rho}$: $\quad (x\varphi_m, \varphi_{m+1}) = A_m \|\varphi_{m+1}\|^2$

c) Vynásobit rekur. vztah $(\cdot, \varphi_{m-1})_{2,\rho}$: $\quad \left.\begin{array}{l} \underbrace{(x\varphi_m, \varphi_{m-1})}_{\|} = B_m \|\varphi_{m-1}\|^2 \\ (x\varphi_{m-1}, \varphi_m) = A_{m-1} \|\varphi_m\|^2 \end{array}\right\}$

$$\Rightarrow \quad A_{n-1}\|\varphi_n\|^2 = B_n\|\varphi_{n-1}\|^2 \qquad A_n \neq 0\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow B_n\neq 0\ \forall n=2,3,4\dots$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\|\varphi_{n+1}\|^2_{2,\rho} = \frac{B_{n+1}}{A_n}\|\varphi_n\|^2_{2,\rho} \qquad n=1,2,\dots}$$

Rekur. vzorec pro normy.
$\|\varphi_0\|$, $\|\varphi_1\|$ je třeba znát, od φ_2 rekurze.

<u>Literatura</u> pro neomez. operátory

KREYSZIG: Introductory FA with applications.

<u>Pozn.</u>: Důkaz tvrzení z poznámky na předchozí straně:

Z vlastností polynomů opět máme

$$\varphi_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k}\varphi_k(x) \qquad \Big/ (\cdot, \varphi_j(x))_{2,\rho}$$

$j=0,\dots,n$

(jinak je součin $=0$)

$$(\varphi_n(-x), \varphi_j(x))_{2,\rho} = \beta_{n,j}\|\varphi_j\|^2_{2,\rho}$$

$$\| $$

$$\int_{-a}^{a}\varphi_n(-x)\varphi_j(x)\rho(x)\,dx = -\int_{a}^{-a}\varphi_n(t)\varphi_j(-t)\rho(t)\,dt = (\varphi_n(x), \varphi_j(-x))_{2,\rho}$$

$$\begin{bmatrix} t=-x \\ dt=-dx \end{bmatrix}$$

$$= \left(\varphi_n(x), \sum_{m=0}^{j}\beta_{j,m}\varphi_m(x)\right) = 0 \quad \text{pro } n>j.$$

$\Downarrow$

Vše nenulové

jen pro $j=n$.

$$\Rightarrow \underline{\varphi_n(-x) = \beta_{n,n}\varphi_n(x)}$$

Srovnejme nyní koeficienty u x^n v polynomu φ:

$$a_n(-x)^n = \beta_{n,n}a_nx^n \quad \Rightarrow \quad \beta_{n,n} = (-1)^n$$

Proto $\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x) \quad \Rightarrow \quad (\varphi_n(-x))^2 = (\varphi_n(x))^2$

tj. $|\varphi_n|^2$ je <u>sudá</u>.

Závěrem, $\quad x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1} \qquad / (\cdot, \varphi_n)_{2,\rho}$

$$\left.\begin{aligned} (x\varphi_n, \varphi_n) &= C_n \|\varphi_n\|^2_{2,\rho} \\ &\parallel \\ \int_{-a}^{a} x|\varphi_n|^2 \rho(x) &= 0 \quad \text{neboť } x \text{ lichá}, \ |\varphi_n|^2\rho \text{ sudá} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_n = 0$$

cbd.

$\boxed{X}$

6.3 Gaussova redukovaná rovnice a ortogonální systémy polynomů

Uvažujme tzv. Gaussovu redukovanou rovnici

$$xy'' + (s+1-x)y' - \alpha y = 0, \qquad x \neq 0. \qquad \text{(GRR)}$$

$s, \alpha \in \mathbb{C}$

$s \neq -1, -2, -3, \dots$ (uvidíme, proč)

(1) Nejprve ukážeme, že tuto rovnici lze psát ve tvaru „vlastní vektor a vlastní číslo s vahou", tj. ve tvaru

$$Ty = \lambda \rho y \qquad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C} \text{ a vhodnou váhu } \rho,$$

přičemž Ty má tvar diferenciálního výrazu v samoadjungovaném tvaru, tj. $Ty = (-py')'$.

Tedy

$$(-py')' = \lambda \rho y \qquad p \neq 0$$

$$-p'y' - py'' - \lambda\rho y = 0 \qquad / : (-p)$$

$$\underline{y'' + \frac{p'}{p} y + \lambda \frac{\rho}{p} y = 0} \qquad \text{(ST)}$$

Porovnejme (ST) a (GRR), kterou upravíme pro $x \neq 0$:

$$y'' + \left(\frac{s+1}{x} - 1\right) y' - \frac{\alpha}{x} y = 0$$

Porovnáním lze psát například (nikoli jednoznačně, nás stačí jedno z možných řešení):

$$\frac{p'}{p} = \frac{s+1}{x} - 1 \qquad \lambda = -\alpha \qquad \frac{\rho}{p} = \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$(\ln|p|)' = (s+1)(\ln|x|)' - 1$$

$$|p| = |x|^{s+1} e^{-x} \cdot K \qquad\qquad \rho = \frac{p}{x}$$

$$\underbrace{p = x^{s+1} e^{-x}}_{} \text{ (jedna z voleb)} \qquad\qquad \underbrace{\rho = x^{s} e^{-x}}_{}$$

Pro jednoduchost uvažujeme $x > 0$, pak potřebujeme $\rho \in L^1(0,\infty)$, tedy nutně $s > -1$.

Dostáváme

(GRR) $\iff$ $\underbrace{(-\underbrace{x^{s+1} e^{-x}}_{p} y')' = (-\alpha) \underbrace{x^{s} e^{-x}}_{\rho} y}_{}$ (SAT)

na $(0,\infty)$

a pracujeme na $L^2_\rho(0,\infty) = L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, $s > -1$.

② Budeme hledat řešení (GRR) ve tvaru řady. K tomu však musíme učinit tyto úvahy:

- pro $x = 0$ rovnice (GRR) degeneruje, je potřeba ji vyšetřovat separátně na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$
- můžeme však předpokládat, že tato dvě separátní řešení lze možno „slepit" v bodě $x = 0$ tak, že vznikne řešení na nějakém $(-k, k)$. Pokud hledáme řešení (GRR) ve třídě takovýchto „slepitelných" řešení, lze je hledat i ve tvaru Taylorovy řady se středem v nule. S tím rizikem, že řešení v tomto tvaru nenajdeme, což by nás dovedlo k závěru, že úloha žádná „slepitelná" řešení ve tvaru řady nemá.

Za těchto podmínek položíme $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ a dosadíme do (GLR):

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} \cdot x + (s+1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} (n+1) n \, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (s+1) c_{n+1} (n+1) \, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n \, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha \, x^n = 0$$

Srovnejme koeficienty:

$$x^0 : \quad (s+1) c_1 = c_0 \alpha \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_0 \frac{\alpha}{s+1}$$

$$(s \neq -1 \; \ldots)$$

$$n \geq 1 : \quad x^n : \quad c_{n+1} \left[(n+1) n + (s+1)(n+1) \right] = c_n (n + \alpha)$$

$$\underbrace{c_{n+1} = c_n \frac{n+\alpha}{(n+1)(s+n+1)}} \qquad (s \neq -2, -3, \ldots)$$

(toto v sobě zahrnuje i $c_1 = c_0 \frac{\alpha}{s+1}$ pro $n = 0$).

Protože každý násobek řešení (GLR) je zase jejím řešením, lze BÚNO volit základní řešení pro $c_0 = 1$. Dostáváme, že koeficienty řady, která definuje řešení, by musely mít tvar

$$\left.\begin{aligned} & c_0 = 1 \\ & c_{n+1} = \frac{n+\alpha}{n+s+1} \cdot \frac{c_n}{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ & \qquad s \neq -1, -2, -3, \ldots \end{aligned}\right\} \text{(KŘ)}$$

Ještě však musíme ukázat, že řada s koeficienty (KŘ) alespoň někde konverguje.

Protože řady s koeficienty typu (KŘ) tvoří jednu velmi důležitou třídu řad, budeme jim věnovat následující intermezzo.

INTERMEZZO : HYPERGEOMETRICKÉ ŘADY

Def: Hypergeometrickou řadou nazveme mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{kde koeficienty splňují:}$$

a) existují polynomy P, Q s koeficienty u nejvyšší mocniny rovnými 1, $\operatorname{st} P = p \geq 0$, $\operatorname{st} Q = q \geq 0$, Q nemá kořeny mezi $\mathbb{N} \cup \{0\}$

b)

$$\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad n = 0,1,2,\dots \qquad c_0 = 1} \tag{PK}$$

Pozn: Pro $P(n) = Q(n) \cdot n+1$ máme $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$, $\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x|$ geom. řada s kvoc. x

Ono $\frac{1}{n+1}$ je tam z historických důvodů.

Rozložme nyní P a Q na kořenové činitele v $\mathbb{C}$, a dostaneme

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(a_1+n)(a_2+n)\cdots(a_p+n)}{(b_1+n)(b_2+n)\cdots(b_q+n)} \cdot \frac{1}{n+1} \tag{*}$$

Tuto situaci značíme následujícím zápisem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = {}_pF_q\left[a_1,\dots,a_p; b_1,\dots,b_q\right](x) \tag{KHG}$$

(KHG) se nazývá „klasický zápis hypergeometrické řady".

Z (*) ihned vidíme:

(i) $p < q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow \sum c_n x^n$ definuje holomorfní (C^∞) fci na celém $\mathbb{C}$

(ii) $p = q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sum c_n x^n$ definuje holomorfní (C^∞) fci na $U^1(0)$

(iii) $p > q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \infty \Rightarrow R = 0$ nedefinuje žádnou diferencovatelnou funkci.

V našem intermezzu ještě budeme potřebovat úpravu (*). Za tím účelem definujme nejprve následující značení:

$$a \in \mathbb{C}\,, \text{ def}: \quad (a)_0 = 1$$
$$(a)_n = \underbrace{a(a+1)\cdots(a+n-1)}_{n \text{ členů}}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Symbol $(a)_n$ je tzv. POCHHAMMERŮV SYMBOL, někdy též tzv. „RISING FACTORIAL". Někdy se značí i $\langle a \rangle_n$. Čteme „a Pochhammer n"
nebo „a dole n".

Všimněte si, že máme: $(1)_n = n!$. Platí též $(a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$

S tímto značením upravme (*):

$$c_n = \frac{(a_1+n-1)(a_2+n-1)\cdots\cdots(a_p+n-1)}{(b_1+n-1)(b_2+n-1)\cdots(b_q+n-1)} \cdot \frac{1}{n}\, c_n =$$

$$= \frac{[(a_1+n-1)(a_1+n-2)]\cdots\cdots[(a_p+n-1)(a_p+n-2)]}{[\underbrace{(b_1+n-1)(b_1+n-2)}]\cdots\cdots[(b_q+n-1)(b_q+n-2)]} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}}_{\text{půjde k } \frac{1}{n!}} \cdot c_{n-1} =$$

v dalších krocích vznikne

$$\underbrace{(b_1+n-1)(b_1+n-2)\cdots(b_1)}_{(b_1)_n}$$

$$= \frac{(a_1)_n \cdots\cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots\cdots (b_q)_n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{c_0}_{=1} = \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_n}{\prod_{k=1}^{q} (b_k)_n} \cdot \frac{1}{n!}$$

Dostáváme tedy konečně explicitní vyjádření hypergeometrické řady

$$\boxed{\; {}_pF_q[a_1,\dots,a_p;\, b_1,\dots,b_q](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_n}{\prod_{k=1}^{q} (b_k)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad \text{(Fin)} \;}$$

Nyní vynikají ony historické důvody proč bylo v (PK) na straně 70 ono $\frac{1}{n+1}$: nejjednodušší hypergeometrickou řadou je ${}_0F_0[;](x)$.

Podle (Fin) je

$$ {}_0F_0[;](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x . $$

(Ř) Zkuste :

- ${}_0F_1[;\tfrac{1}{2}]\left(-\tfrac{x^2}{4}\right) = \cos x$; Řada vlevo má $p=0, q=1 \Rightarrow p<q+1 \Rightarrow$ řada definuje hladkou (a holomorfní) fci v $\mathbb{C}$.

Řešení: ${}_0F_1[;\tfrac{1}{2}]\left(-\tfrac{x^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} \cdot \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \underbrace{\frac{1}{n!\, 4^n\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} $$

ctd.

$$ \frac{2^n}{n!\, 4^n\, \underbrace{(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1))}_{(2n)!/(2\cdot 4\cdots 2n)}} = \frac{1}{(2n)!} $$

- $\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\, {}_1F_1[\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}](-x^2) \underset{\text{pro } x\in\mathbb{R}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \operatorname{erf}(x)$; řada vlevo má ovšem smysl $\forall x \in \mathbb{C}$.

Velká třída funkcí (elementárních i neelementárních) se dá vyjádřit ve tvaru hypergeometrické řady.

——— KONEC INTERMEZZA O HYPERGEOMETRICKÝCH ŘADÁCH.

Zpět ke (GLR). Jejím řešením je řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, kde

$$c_0 = 1$$

$$c_{n+1} = \frac{n+\alpha}{(n+s+1)} \cdot \frac{1}{n+1} c_n \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Jde tedy o hypergeometrickou řadu pro $p=1$, $q=1$, tj. $p < q+1$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{{}_1F_1[\alpha; s+1](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}}_{} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$\alpha \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$

Otázka: Kdy je řešení ${}_1F_1[\alpha, s+1](x)$ polynomem?

Odpověď: Právě tehdy, když má řada vpravo jen konečný počet členů

$\iff \exists m \in \mathbb{N}, \quad (\alpha)_k = 0 \quad \forall k > m.$

Potom řada vpravo dává polynom stupně m.

Ale $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+k-1)$

Tj. pro $\boxed{\alpha = -m}$ dostanu to, co chci dostat: $(\alpha)_k = 0 \iff k > m$

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definice: Laguerrův polynom řádu s a stupně m je polynom, definovaný pro $s \in \mathbb{R}$, $s > -1$ takto

$$\boxed{L_m^s(x) := \frac{(s+1)_m}{m!} \, {}_1F_1[-m, s+1](x) = \frac{(s+1)_m}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-m)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}}$$

$x \in \mathbb{R}$.

Poznámky:

a) $L_m^s(x)$ řeší (GLR) $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pokud v ní položíme $\alpha = -m$.

b) S odvoláním na konec (SAT) provedeme následující restrikce:

- Uvažujme $x > 0$, tj. $x \in (0,\infty)$
- Uvažujme $s \in \mathbb{R}$, $s > -1$, a položme $\rho(x) = x^s e^{-x}$

Pak $\rho > 0$ na $(0,\infty)$, $\rho \in C(0,\infty) \cap L^1(0,\infty)$

$\Rightarrow \rho$ je dobrá váha

- uvažujeme tedy prostor $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$ ... Hilbertův.
- $\alpha = -m, \quad m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

Potom (GRR) lze psát v samoadjungovaném tvaru (viz (SAT), str. 68)

$$\underbrace{Ty = m\rho y,}_{} \qquad \text{(SAT)}$$

kde $Ty = -(py')'$, $\quad p(x) = x^{s+1}e^{-x}$.

Potom $m = 0,1,2,\dots$ jsou vlastní čísla T s vahou ρ (na $L^2_\rho(0,\infty)$) a jim odpovídající vlastní funkce jsou Laguerrovy polynomy L^s_m.

c) Podle výpočtu na str. 64 navíc tvoří Laguerrovy polynomy (pro pevné $s > -1$ a pro $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$) OG systém polynomů v $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$. Mj. tedy existuje rekurentní vzorec pro jejich vygenerování – ten odvodíme dále.

d) Otázkou v této chvíli zůstává jen to, zda jsou Laguerrovy polynomy úplným systémem, tj. zda každá funkce z $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$ lze napsat ve tvaru $\sum_0^\infty c_m L^s_m(x)$. Odpověď je ANO. Důkaz je možno nalézt ve skriptech Čížek a kol.: MA pro fyziky V, Věta 41 (str. 136).

Na závěr ukážeme některé důležité vlastnosti Laguerr. polynomů

(1) Tzv. explicitní vyjádření

Platí:

$$\boxed{L^s_m(x) = \frac{1}{m!}\, x^{-s} e^{x} \left(x^{s+m} e^{-x}\right)^{(m)}} \qquad \text{(E)}$$

Pozn.: • Odtud: $L_0^{s}(x) = x^{-s} e^{x}\, x^{s} e^{x} = 1$

$$L_1^{s}(x) = x^{-s} e^{x} \left(x^{s+1} e^{-x}\right)' = x^{-s} e^{x} (s+1) x^{s} e^{-x} + x^{-s} e^{x} x^{s+1}\left(-e^{-x}\right)$$

$$= (s+1) - x \qquad \text{atd...}$$

• Tvar (E) má velký význam při výpočtech integrálů typu
$$\int_0^\infty L_m^{s}(x) f(x)\,dx \quad ,$$
protože umožňuje použití per partes.

② Dokážeme (E). Upravíme rovnici (GLR):

$$x y'' + (s+1-x) y' - \alpha y = 0 \qquad (A)$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x^{s+1} e^{-x} y'\right)' = \alpha x^{s} e^{-x} y$$

Tuto rovnost označíme jako $GLR(y, s+1, \alpha)$

nyní zderivujeme (A)

$$x y''' + y'' + (s+1-x) y'' - y' - \alpha y' = 0$$

$$x y''' + (s+2-x) y'' - (\alpha+1) y' = 0$$

to je $GLR(y', s+2, \alpha+1)$

Pokud tedy (A) zderivujeme $(m-1)$ krát, dostaneme $GLR(y^{(m-1)}, s+m, \alpha+m-1)$
je ekvivalentní tvaru

$$\Big(\underbrace{x^{s+m} e^{-x} y^{(m)}}_{=:\,V_m}\Big)' = (\alpha+m-1)\underbrace{x^{s+m-1} e^{-x} y^{(m-1)}}_{\Rightarrow\, V_{m-1}}$$

Tedy $\quad V_m' = (\alpha+m-1) V_{m-1} \quad \Big|\, '$

$$V_m'' = (\alpha+m-1) V_{m-1}' = (\alpha+m-1)(\alpha+m-2) V_{m-2}$$

Postupně:

$$V_m^{(m)} = (\alpha)_m V_0 = (\alpha)_m x^{s} e^{-x} y$$

Tedy
$$\left(x^{s+n} e^{-x} y^{(n)}\right)^{(n)} = (\alpha)_n x^{s} e^{-x} y$$
$$\Downarrow \quad \boxed{\text{pro } \alpha = -n}$$

$$y = \frac{1}{(-n)_n} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n} e^{-x} y^{(n)}\right)^{(n)} \qquad (B)$$

Pokud je $\alpha = -n$, je řešením L_n^s, což je polynom stupně n. Jeho n-tá derivace je tedy konstanta, $\left(L_n^s\right)^{(n)} = n! \cdot \underbrace{\text{koeficient u } x^n}_{a_n}$

Je ovšem $L_n^s(x) = \frac{(s+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}$, tedy $a_n = \frac{\cancel{(s+1)_n}}{n!} \frac{(-n)_n}{\cancel{(s+1)_n}} \cdot \frac{1}{n!}$

Proto $\left(L_n^s\right)^{(n)} = \frac{(-n)_n}{n!}$

Tedy po dosazení do (B):

$$L_n^s(x) = \frac{1}{(-n)_n} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n} e^{-x} \frac{(-n)_n}{n!}\right)^{(n)}$$

tedy
$$L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)} \qquad \text{cbd.} \qquad (C)$$

2 Rekurentní vzorec pro $L_n^s(x)$

Vyjdeme z (C):
$$L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^{x} \underbrace{\left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}}_{=:E_n}$$

Pak
$$E_{n+1} = \left(\left(x^{s+n+1} e^{-x}\right)'\right)^{(n)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivuj} \\ \text{vnitř}}}{=} (s+n+1)\underbrace{\left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}}_{E_n} - \underbrace{\left(x^{s+n+1} e^{-x}\right)^{(n)}}_{=:I_n} \qquad (D)$$

Naším cílem je nyní vyjádřit I_n pomocí E_n.

$$I_n = \left(x \cdot x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n-k)} =$$

$$= [\text{je nenulové jen pro } k=0,1] = x\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n)} + n\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n-1)}$$

$$= xE_n + n\underbrace{\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n-1)}}_{I_{n-1}}.$$

Tj.

$$\underline{I_n = xE_n + nI_{n-1}} \qquad (E)$$

Vezmeme nyní (D) pro $n-1$:

$$E_n = (s+n)E_{n-1} - I_{n-1}$$

$\Rightarrow \underbrace{I_n = xE_n + n(s+n)E_{n-1} - nE_n}_{\text{dosadí do (D):}}$

$$\Rightarrow \quad E_{n+1} = (s+n+1)E_n - xE_n - n(s+n)E_{n-1} + nE_n$$

$$xE_n = (s+2n+1)E_n - E_{n+1} - n(s+n)E_{n-1} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{n!}x^{-s}e^{x}$$

$$\boxed{xL_n^s(x) = (s+2n+1)L_n^s(x) - (n+1)L_{n+1}^s(x) - (s+n)L_{n-1}^s(x)}$$

Hledaný rekurentní vzorec.
Protože mám $L_0^s = 1$, $L_1^s = (s+1) - x$,
mohu vygenerovat všechna L_n^s.

③ Normy.

Vím (viz str. 66), že

$$\|\varphi_{n+1}\|^2_{2\varphi} = \frac{B_{n+1}}{A_n}\|\varphi_n\|^2_{2\varphi} \qquad n = 1,2,\dots$$

pokud

$$x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1}.$$

Zde tedy $A_m = -(m+1)$, $B_n = -(s+n)$, tedy

$$\|L^s_{m+1}\|^2_{2,\rho} = \frac{s+m+1}{m+1}\|L^s_m\|^2_{2,\rho} \qquad m=1,2,3,\dots$$

Máme $\|L^s_0\|^2_{2,\rho} = \int_0^\infty 1 . x^s e^{-x} = \Gamma(s+1)$

$$\begin{aligned}\|L^s_1\|^2_{2,\rho} = \int_0^\infty ((s+1)-x)^2 x^s e^{-x} &= (s+1)^2\Gamma(s+1) - 2(s+1)\Gamma(s+2) + \Gamma(s+3) \\ &= (s+1)\Gamma(s+2) - 2(s+1)\Gamma(s+2) + \Gamma(s+3) \\ &= \Gamma(s+3) - (s+1)\Gamma(s+2) \\ &= (s+2)\Gamma(s+2) - (s+1)\Gamma(s+2) = \Gamma(s+2)\end{aligned}$$

a rekurencí

$$\|L^s_m\|^2_{2,\rho} = \frac{s+m}{m}\cdot\frac{s+m-1}{m-1}\cdot \dots \cdot \frac{s+2}{2}\cdot \underbrace{\|L^s_1\|^2_{2,\rho}}_{\Gamma(s+2)} = \frac{1}{m!}\Gamma(s+m+1)$$

platí i pro $m=0,1$

$$\Rightarrow \boxed{\|L^s_m\|^2_{2,\rho} = \frac{1}{m!}\Gamma(s+m+1) \qquad \forall m=0,1,2\dots}$$

(4) Tzv. vytvořující funkce

Def. Vytvořující funkcí pro daný systém $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$, $\varphi_m = \varphi_m(x)$, nazveme takovou funkci $F = F(x,t)$, která je analytická v okolí $t=0$ (pro všechna pevná x) a její rozvoj do Taylorovy řady podle t v $t \in U(0)$ generuje koeficienty $\varphi_m(x)$. Tedy:

$$F(x,t) = \sum_{m=0}^\infty \varphi_m(x) t^n .$$

Zde tedy hledáme takovou F, pro kterou $F(x,t) = \sum_{m=0}^\infty L^s_m(x) t^n$.

Budeme postupovat tak, že rozvineme vhodnou funkci $f \in L^2_\rho(0,\infty)$ s parametrem t do řady v Laguerrových polynomech. Tím dostaneme řadu typu $\sum_{m=0}^\infty c_m(t) L^s_m(x)$ a budeme směřovat k tomu, aby $c_m \simeq t^n$.

Teorie říká, že pokud $f \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$ [a pokud $L^s_n(x)$ je úplný v $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$], tak $\exists c_n \in \mathbb{C}$ tvaru

$$c_n = \frac{1}{\|L^s_n\|^2_{2,\rho}} \left(f, L^s_n\right)_{2,\rho}, \qquad \text{že} \qquad f \underset{\substack{\downarrow \\ \text{rovnost v } L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)}}{=} \sum c_n L^s_n$$

(to plyne z obecné teorie Fourierových řad).

Budeme rozvíjet funkci e^{-ax} (poté budeme hledat $a = a(t)$).

(i) <u>První krok:</u> pro jaká $a \in \mathbb{R}$ je $e^{-ax} \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$?

$$\text{Tj. když} \quad \int_0^\infty \left(e^{-ax}\right)^2 x^s e^{-x}\,dx < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^\infty x^s e^{-(2a+1)x}\,dx < \infty \qquad \text{pro } s > -1, \text{ pokud } 2a+1 > 0$$

$$\underbrace{a > -\tfrac{1}{2}}$$

Pro tato a spočteme

$$c_n = \frac{1}{\|L^s_n\|^2_{2,\rho}} \int_0^\infty e^{-ax} x^s e^{-x} L^s_n(x)\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{použij explicitní} \\ \text{vyjádření } L^s_n\end{array}\right]$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \cancel{x^s} \cancel{e^{-x}} \left(\frac{1}{\cancel{n!}} \cancel{x^{-s}} \cancel{e^{x}} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)} dx = \left[\begin{array}{l}n \times \text{ per partes} \\ \text{při každém přírůstku} \\ \text{faktor „}-(-a)\text{"}\end{array}\right]$$

hraniční členy $= 0$

$$= \frac{a^n}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty \underbrace{e^{-ax} x^{s+n} e^{-x}\,dx}_{(a+1)x = y} =$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(s+m+1)} \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{y}{a+1}\right)^{s+m} \frac{1}{a+1}\, dy =$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(s+m+1)} \cdot \frac{1}{(a+1)^{s+m+1}}\, \Gamma(s+m+1) = \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \left(\frac{a}{a+1}\right)^m$$

Odtud tedy dostáváme:

$$\boxed{e^{-ax} \overset{\text{s.v.}}{=} \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{a}{a+1}\right)^m L_m^s(x) \qquad a > -\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

Pozn. • Obecně platí rovnost ve smyslu prostoru, ve kterém byla odvozena, tj. ve $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, neboli s.v. Pokud jsou však na obou stranách spojité funkce (tj. například pokud řada vpravo konverguje alespoň lokálně stejnoměrně v $\mathbb{R}$), platí rovnost ve všech $x \in \mathbb{R}$.

• Dosazením $a = 0$ do $(*)$ vypadnou vpravo všechny členy pro $m \geq 1$ a dostaneme

$$1 = L_0^s(x), \text{ což je milé.}$$

• Pro $a = 1$ dá $(*)$

$$e^{-x} = \frac{1}{2^{s+1}} \sum_{m=0}^\infty \frac{L_m^s(x)}{2^m}$$

speciálně pro $s = 0$ máme $\quad e^{-x} = \sum_{m=0}^\infty \frac{L_m^0(x)}{2^{m+1}}$.

(ii) Druhý krok: sestavení vytvořující funkce.

Položme $t = \frac{a}{a+1}$ v $(*)$. $\qquad \frac{dt}{da} = \frac{1}{(a+1)^2} > 0$ Prosté.

$\Updownarrow$

$a = \frac{t}{1-t}, \quad \frac{1}{a+1} = 1 - t$

Platí $a > -\frac{1}{2} \iff t \in (-1,1)$

Úpravou (*) máme

$$(a+1)^{s+1} e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) \left(\frac{a}{a+1}\right)^n$$

$$\Big\downarrow \; a \to t$$

$$\underbrace{\frac{1}{(1-t)^{s+1}} e^{-\frac{tx}{1-t}}}_{\text{Vytvořující fce pro Laguerrovy polynomy.}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x)\, t^n \qquad t \in (-1,1)$$

V tabulce „Ortogonální systémy polynomů" v dodatku uvádíme tyto systémy polynomů

Laguerrovy, Hermiteovy, Legendreovy,
Čebyševovy, Gegenbauerovy.

Vždy uvádíme
- generující rovnici
- vyjádření řadou (4-6)
- explicitní tvar
- rekurentní vztah a velikosti norem
- vytvořující funkci

a zejména
- prostor, ve kterém tvoří bázi.

TO JE VŠE. [signature], 16.5.2016

Ortogonální systémy polynomů

1 Laguerrovy polynomy, $L_n^s(x)$

Generující rovnice:	$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$	$\alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ (polynom pro $\alpha = -n$, $\gamma = s+1$)
Vyjádření řadou:	$L_n^s = \frac{(s+1)_n}{n!}\, {}_1F_1(-n; s+1; x)$	Laguerrovy zobecněné pol. (klasické pro $s = 0$)
Explicitní vyjádření:	$L_n^s = \frac{1}{n!}\, x^{-s} e^x \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}$	
Rekurentní vztah:	$xL_n^s = -(n+1)L_{n+1}^s + (s+2n+1)L_n^s - (s+n)L_{n-1}^s$	
Vytvořující funkce:	$\frac{1}{(1-t)^{s+1}}\, e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) t^n$	
Báze v prostoru:	$L_\rho^2(0, +\infty)$, kde $\rho = x^s\, e^{-x}$	
Norma:	$\lVert L_n^s \rVert_\rho^2 = \Gamma(s+n+1)/n!$	

2 Hermiteovy polynomy, $H_n(x)$

Generující rovnice:	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$
Vyjádření řadou:	$H_{2k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!}\, {}_1F_1(-k; 1/2; x^2)$
	$H_{2k+1} = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{k!} x\, {}_1F_1(-k; 3/2; x^2)$
Explicitní vyjádření:	$H_n = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$
Vytvořující funkce:	$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$
Báze v prostoru:	$L_\rho^2(-\infty, +\infty)$, kde $\rho = e^{-x^2}$
Norma:	$\lVert H_n \rVert_\rho^2 = 2^n\, n! \sqrt{\pi}$

3 Legendreovy polynomy, $P_n(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
Vyjádření řadou:	$P_n = {}_2F_1(-n, n+1; 1; 1/2(1-x))$
Explicitní vyjádření:	$P_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left((1-x^2)^n\right)^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$
Vytvořující funkce:	$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$
Báze v prostoru:	$L^2(-1, 1)$, tj. $\rho = 1$
Norma:	$\lVert P_n \rVert_\rho^2 = 2/(2n+1)$

4 Čebyševovy polynomy 1. druhu, $T_n(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$
Vyjádření řadou:	$T_n = {}_2F_1(-n, n; 1/2; 1/2(1-x))$
Explicitní vyjádření:	$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
Rekurentní vztah:	$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$
Vytvořující funkce:	$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n$
Báze v prostoru:	$L^2_\rho(-1,1)$, kde $\rho = (1-x^2)^{-1/2}$
Norma:	$\|T_n\|^2_\rho = \pi/2$ pro $n > 0$, $= \pi$ pro $n = 0$

5 Gegenbauerovy (=ultrasférické) λ-polynomy, $C_n^{(\lambda)}(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0\,,$ $\lambda > -1/2$
Vyjádření řadou:	$C_n^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} n+2\lambda-1 \\ n \end{pmatrix} {}_2F_1(-n, n+2\lambda; \lambda+1/2; 1/2(1-x))$
Explicitní vyjádření:	$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{1/2-\lambda} \left((1-x^2)^{\lambda+n-1/2}\right)^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$(n+1)C_{n+1}^{(\lambda)} = 2(n+\lambda)xC_n^{(\lambda)} - (n+2\lambda-1)C_{n-1}^{(\lambda)}$
Vytvořující funkce:	$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) t^n$
Báze v prostoru:	$L^2_\rho(-1,1)$, kde $\rho = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$
Norma:	$\|C_n^\lambda\|^2_\rho = \frac{\lambda\,(2\lambda)_n}{n!(p+n)} \frac{\Gamma(\lambda+1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda+1)}$