5. NEOMEZENÉ OPERÁTORY

5.1. Symetrie a samoadjungovanost

- Připomenutí: X, Y Banachovy, $T: X \to Y$ lineární. Potom
  <u>T omezený $\Leftrightarrow \|T\| < \infty \Leftrightarrow$ T spojitý.</u> (viz str. 6)

- Půjde o stále ještě <u>lineární</u>, ale <u>neomezené</u>, tedy <u>nespojité</u> operátory.
  Nejsou to neobvyklé objekty, naopak – např. typický <u>diferenciální</u> operátor je nespojitý – viz příklad na str. 8 těchto poznámek.

Budeme pracovat v Hilbertových prostorech, s využitím vlastností $(\cdot,\cdot)$.
Ukazuje se, že již zde problémy se samotným definičním oborem příslušného adjungovaného operátoru, a dokonce i samotného operátoru T.

Buď H Hilbertův, $D(T) \subseteq H$ lin. podprostor. $T: D(T) \to H$ lineární (v principu jakýkoli, tj. omezený či neomezený).

<u>Pozn.</u>: Místo T' budeme v této kapitole používat T^*. Půjde často o funkce a značení $y' \in T'$ by mohlo být matoucí.

<u>Def.</u>: 1) $D(T^*) := \{ y \in H;\ \exists!\, h^* \in H,\ (Tx, y) = (x, h^*)\ \forall x \in D(T) \}$

2) Je-li $D(T^*) \neq \emptyset$, definujeme <u>adjungovaný operátor</u> T^* takto:

$$T^*: D(T^*) \to H$$
$$T^*: y \mapsto h^* \text{ (z definice 1) výše)}$$

<u>Pozn.</u>: • Pokud je $D(T^*) \neq \emptyset$, tak v důsledku definice máme ihned

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x \in D(T) \quad \forall y \in D(T^*) \qquad (*)$$

Zatímco pro omezené (spojité) operátory je vztah $(*)$ důsledkem Riesz-Fréchetovy věty, zde je potřeba $(*)$ postulovat – nemáme T spojité.

Přirozeně klademe:

Def: $T : \mathcal{D}(T) \to H$ nazveme <u>samoadjungovaný</u>, pokud

1) $\exists\, \mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset$, $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$
2) $T = T^*$ na $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$

Pozn: Rozdíl definičních oborů je zde velmi důležitý. Později uvidíme, že pro $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{D}(T^*)$ a $T = T^*$ na $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(T^*)$ dostáváme jiné spektrální vlastnosti.

Příjemný poznatek:

Lemma $\mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset \Rightarrow T^*$ je lineární.

(Jasné z definice)

Otázka č. 1 Kdy je $\mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset$?

Věta $\mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset \iff \overline{\mathcal{D}(T)} = H$

(D) Lukeš, 11.6. (těžší)

Otázka č. 2 Lze mít přímo $\mathcal{D}(T) = H$? To je přece nejjednodušší realizace požadavku $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$. Odpověď je překvapivá: ne. Než se k ní však dopracujeme, budeme potřebovat ještě jeden pojem.

Def: $T : \mathcal{D}(T) \to H$, $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$, T lineární,
Řekneme, že T je <u>symetrický</u>, pokud

$$(Tx, y) = (x, Ty) \qquad \forall x, y \in \mathcal{D}(T)$$

Není to totéž, co samoadjungovaný:

$\boxed{\text{Lemma}}$ T symetrický $\iff$ $\begin{cases} 1) & \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(T^*) \\ 2) & T = T^* \end{cases}$

Odtud: T samoadj $\Rightarrow$ T symetrický

speciálně:

T není symetrický $\Rightarrow$ T není samoadjungovaný

Používá se k tomu, abych ukázal, že T není samoadjungovaný, aniž bych musel hledat $\mathcal{D}(T^*)$

Nyní ono překvapení. Platí

$\boxed{\text{Věta}}$ $\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}(T) = H \\ T \text{ lineární, symetrický} \end{array}\right\} \Rightarrow$ T omezený Lukeš 11.10.

Odtud $\left.\begin{array}{l} T \text{ samoadj, lin.} \\ \mathcal{D}(T) = H \end{array}\right\} \Rightarrow$ T omezený. Tedy neomezený operátor, který je samoadjungovaný, má $\mathcal{D}(T) \neq H$.

Typická (a jediná možná) situace pro samoadjungované neomezené operátory: $\left\{\begin{array}{l} H \text{ Hilbert} \\ \mathcal{D}(T) \neq H, \ \overline{\mathcal{D}(T)} = H \\ \mathcal{D}(T) \text{ lin. podprostor} \end{array}\right\} \overset{\text{def}}{\equiv}$ T je hustě definován na H.

Terminologie:

	Lukeš, Formánek, aj.	Pokorný, Čihák, aj.
pro omezené lin. op. splývá	symetrický	hermitovský
	samoadjungovaný	samoadj.

(P) $H = L^2(0,1)$; $D(T) = \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle)$. Víme $\overline{\mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle)} = L^2(0,1)$.
def $Tf = f'$. Je lineární, neomezený.

Zkoumejme symetrii jako nutnou podmínku samoadjungovanosti.

$$(Tf,g) = (f',g) = \int_0^1 f'\bar g \quad ; \quad (f,Tg) = \int_0^1 f\bar g'$$

V touze získat rovnost zintegrujme per partes:

$$\int_0^1 f'\bar g = [f\bar g]_0^1 - \int_0^1 f\bar g' \overset{?}{=} \int_0^1 f\bar g'$$

Rovnost nenastane ani v případě, kdy se zbavíme hraničních členů: například modifikací $D(T)$, kam bychom přidali okrajové podmínky ($f = 0$ na hranici). Ale i tak se výsledné integrály liší o znaménko a operátor T tedy není symetrický. Pomocí toho je, že $Tf = f'$ nemůže být samoadjungovaný – žádná sestava okrajových podmínek nemůže změnit znaménko integrálu přes interval $(0,1)$.

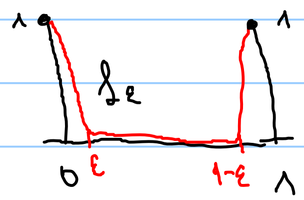
Spočtěme nyní z definice (jako procvičení) $D(T^*)$.
Vyjádřeme množinu

$$\{\, g \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle) \;\; \exists!\, h^* \in L^2(0,1),\; \underbrace{(Tf,g) = (f,h^*)}\;\; \forall f \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle) \,\}$$

$$[f\bar g]_0^1 - \int_0^1 f\bar g' = \int_0^1 f\bar h^* \qquad (*)$$

(*) má platit $\forall f \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle)$.

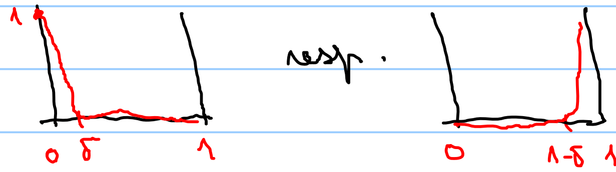
a) volbou f:



Při dosazení těchto f_ε do (*) a $\varepsilon \to 0+$ dostaneme

$$[\bar g]_0^1 = 0$$

b) dále volbou f_δ



dostaneme $g(0)=g(1)=0$. To je první zpřesnění $\Rightarrow$

$D(T^*) \subseteq \{g\in C^1(\langle 0,1\rangle),\ g(0)=g(1)=0\}$

c) (*) se teď redukuje na $-\int_0^1 f\overline{g'} = \int_0^1 f\overline{h^*}$

$$\int_0^1 f\overline{(g'+h^*)} = 0 \quad \forall f\in C^1(\langle 0,1\rangle)$$

Odtud (z Du Bois-Reymondova lemmatu) $\Rightarrow$ $h^* = \underbrace{-g'}_{\in C}$ (s.v.)

[protože h^* je s.v. rovno spojité fci, kterou je uvažoval jako spojité.]

Nalezli jsme h^*, teď není třeba dále modifikovat $D(T^*)$.

Máme:

$$\begin{cases} D(T^*) = \{g\in C^1(\langle 0,1\rangle),\ g(0)=g(1)=0\} \\ T^*g = -g' \end{cases}$$

Evidentně $T\neq T^*$, navíc i $D(T^*) \subsetneq D(T)$.

Pz Pro samoadjungovanost je potřeba modifikovat jak T (aby bylo $T^*=T$), tak $D(T)$ (aby bylo $D(T^*)=D(T)$).

Myšlenka pro modifikaci T vychází z porovnání

$$Tf=f' \Rightarrow T^*f=-f'$$

Ono přebývající znaménko je potřeba „rozpůlit mezi T a T^*".

Definujeme $\boxed{Tf = if'}$

Protože nutnou podmínkou samoadjungovanosti je symetrie, Tedy pro symetrii potřeba mít v $D(T)$ nějaké nadbytečné okrajové podmínky.

Budeme zkoumat 3 možnosti:

a) $D(T_1) = C^1(\langle 0,1\rangle)$ $\qquad T_1 = T|D(T_1)$

b) $D(T_2) = \{f \in C^1(\langle 0,1\rangle),\ f(0) = f(1)\}$ $\qquad T_2 = T|D(T_2)$

c) $D(T_3) = \{f \in C^1(\langle 0,1\rangle),\ f(0) = f(1) = 0\}$ $\qquad T_3 = T|D(T_3)$

Symetrie:

$$(Tf,g) = \int_0^1 i f' \bar{g} = \underbrace{[if\bar{g}]_0^1}_{\substack{= 0 \text{ pro } f,g \in D(T_2),\ f,g \in D(T_3) \\ \neq 0 \text{ pro } f,g \in D(T_1)}} - i\int_0^1 f\bar{g}' = \underbrace{[if\bar{g}]_0^1}_{\substack{= 0 \\ \neq 0}} + \underbrace{\int_0^1 f\,\overline{ig'}}_{(f,Tg)}$$

$$\Rightarrow (Tf,g) = (f,Tg) \quad \text{pro } T_2, T_3 \ \dots \text{ je symetrický}$$
$$\neq (f,Tg) \quad \text{pro } T_1 \ \dots \text{ není symetrický}$$

Nyní lze zkoumat (zkuste!) podobně jako v předch. příkladu

- $D(T_1^*) = D(T_3) \subsetneq D(T_1)$ (další potvrzení toho, že T_1 není symetrický)
- $D(T_2^*) = D(T_2)$ (T_2 může být samoadjungovaný)
- $D(T_3^*) = D(T_1) \supsetneq D(T_3)$ (T_3 potvrzení symetrie, ale zároveň důkaz, že T_3 není samoadj.)

Jediný kandidát na samoadjungovanost je T_2, který je symetrický a splňuje $D(T_2^*) = D(T_2)$. Zbývá ověřit, že $T = T^*$ na tomto společném def. oboru. To však plyne podobně jako v předchozím příkladu: symetrie dá $(Tf,g) = (f,Tg) = (f,h^*)$ $\forall f \in C^1(\langle 0,1\rangle)$ $\Rightarrow$ na $D(T_2^*)$ atd.

Závěr: T_1 není symetrický (ani samoadj.), T_3 je symetrický (ale není samoadj.), T_2 je samoadjungovaný.
Vidíme, že i v případě $D(T)$ se okrajové podmínky „rozdělily mezi" mezi $D(T_2)$ a $D(T_2^*)$.

Z pohledu spektra je mezi symetrickým a samoadjungovaným operátorem zásadní rozdíl, jak uvidíme v zápětí.

$\boxed{5.2.}$ Spektrum neomezených operátorů

Pro omezené operátory hrály zásadní roli pro charakter spektra tyto dva pojmy:

- samoadjungovanost : uvažujeme i zde
- kompaktnost : pro neomezené operátory nemá smysl, neboť kompaktní operátor musí být nutně omezený.

Roli kompaktnosti přebírá tzv. uzavřenost operátoru.

Def: $D(T) \subsetneq H$ lin. podprostor, $T : D(T) \to H$. Řekneme, že T je uzavřený, pokud:

$$\left.\begin{array}{r} x_n \in D(T),\ x_n \to x \in H \\ Tx_n \to g \in H \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in D(T) \\ Tx = g \end{array}$$

(jinak řečeno, T má uzavřený graf: $[x_n, Tx_n] \to [x, g]$
$\Rightarrow g = Tx$
a $[x, Tx] \in$ graf.

V případě omez. operátorů jsme dále studovali:

$$\underbrace{\text{PROSTOTA}, \ \text{NA}}_{\text{má smysl i zde}}, \quad \underbrace{\text{SPOJITOST INVERZE}}_{\text{překvapivě má taky smysl}}$$

Překvapivá zjištění: nespojité lineární operátory v nekonečné dimenzi a) mohou být uzavřené (ač jsou nespojité) b) mohou mít spojitou inverzi.

Následuje telegrafický přehled poznatků.

$\boxed{\text{Věta}}$ Buď T hustě definovaný lineární neomezený operátor na Hilbertově prostoru H. Potom:

1) $\overline{\mathcal{R}(T)} = H \Rightarrow T$ je prostý a na $\mathcal{R}(T)$

2) $\mathcal{R}(T) = H \Rightarrow T$ je prostý, na, samoadjungovaný a T^{-1} je spojitý.

3) T^{-1} je spojitý $\Leftrightarrow$ T prostý, na H, uzavřený.

[Viz např.: Rudin: Functional analysis, 13.11 a dále]

Def: Resolventa $T \equiv RES(T) := \{\lambda \in \mathbb{C},\ T_\lambda \text{ prostý, na } H,\ T_\lambda^{-1} \text{ spojitý}\}$
Spektrum $T \equiv \sigma(T) := \mathbb{C} \setminus RES(T)$

$\sigma(T) = $ bodové spektrum (vl. č.) ... $\{\lambda \in \mathbb{C},\ \exists x \neq 0,\ Tx = \lambda x\}$
zbytek

Pozn: Spektrum neomezeného operátoru může být jakákoli (neomezená) podmnožina $\mathbb{C}$, včetně celého $\mathbb{C}$.

Vlastnosti spektra neomezených operátorů

1) T uzavřený $\Rightarrow$ $\sigma(T)$ je uzavřená v $\mathbb{C}$

2) T uzavřený a symetrický, pak nastane právě jedna z následujících situací:

a) $\sigma(T) = \mathbb{C}$

b) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$

c) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$

$\Big\}\iff$ T symetrický, ale ne samoadj.

d) $\sigma(T) =$ uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$

$\Updownarrow$

T samoadjungovaný

Případ a) – c) a případ d) ukazují právě onen velký rozdíl mezi samoadjungovaným a pouze symetrickým operátorem.

3) Je-li T symetrický a má reálná vl. č. (neboť pokud je uzavřený a samoadjungovaný, což implikuje reálnost vl. č.), pak:

| Vlastní vektory, příslušné různým vlastním číslům, jsou kolmé.

Pozn: • Vl. čísel i vl. vektorů může být i nespočetně mnoho. Existuje tzv. spojitý funkcionální kalkulus, využívající integrálu místo sumy.

• V teorii neom. operátorů nemáme a priori nic o úplnosti báze. V konkrétních případech tam je potřeba jejich úplnost ukázat (případ od případu).