6. LIN. DIFER. OPERÁTORY

6.1. Výrazy v samoadjungovaném tvaru

Mějme

$$\ell(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, y^{(k)} \qquad y \in C^n(a,b),\ y = y(x) \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty \qquad p_k \in C(a,b),\ p_n \neq 0 \text{ na } (a,b) \quad \Big\}\ y, p_k \text{ cplx. fce}$$

Nazveme jej lineární diferenciální výraz (LDV) n-tého řádu.

Pod pojmem lineární diferenciální operátor (LDO) n-tého řádu budeme rozumět LDV + definiční obor

$$L = \ell \ \ \& \ \ \mathcal{D}(L), \quad tj. \quad L = \ell / _{\mathcal{D}(L)}.$$

Budeme chtít, aby L byl hustě definovaný v H (Hilbertův), tj. $\mathcal{D}(L) \neq H$, $\overline{\mathcal{D}(L)} = H$.

Typicky budeme mít (viz předch. kapitola)

$$\mathcal{D}(L) = \left(H \ \cap C^n(a,b) \right) + \text{okrajové podm.}$$

Přitom víme, že symetrie operátoru je nutnou podmínkou samoadjungovanosti.

V dalším se budeme zabývat hledáním dalších nutných podmínek samoadjungovanosti resp. symetrie. Typicky budeme pracovat s prostorem

$$C^\infty_{cpt}(a,b) = \{ f \in C^\infty(a,b),\ \exists K \subset (a,b) \text{ kompakt},\ f \equiv 0 \text{ na } (a,b) \setminus K \}$$

výhodou tohoto přístupu je to, že při per partes pro funkce $f \in C^\infty_{cpt}(a,b)$ jsou hraniční členy nulové, a tedy se nemusíme zabývat okrajovými podmínkami.

① Definujme tzv. adjungovaný výraz k $\ell(y)$:

$$\ell^*(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\overline{p_k(y)}\, y \right)^{(k)}$$

$\boxed{\text{Lemma}}$ K danému ℓ je ℓ^* jediný lineární diferenciální výraz, pro který

$$(\ell(y), z) = (y, \ell^*(z)) \qquad \forall y, z \in C^\infty_{cpt}(a,b)$$

.

D. Rovnost = per partes:

$$(l(y), z) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x)\, y^{(k)}\, \overline{z(x)} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \int_a^b \left(p_k(x)\,\bar z\right)' y^{(k-1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_a^b \underbrace{\left(p_k(x)\,\bar z\right)^{(k)}}_{\overline{(\overline{p_k(x)}\, z)^{(k)}}} y(x) = (y, l^*(z))$$

• Jednoznačnost: nechť jsou dva, l^* a $\tilde l$; pak

$$(l(y), z) = (y, l^*(z)) = (y, \tilde l(z)) \quad \forall\, y, z \in C^\infty_{cpt}(a,b)$$

$$l^*(z) = \tilde l(z) \quad \forall\, z \in C^\infty_{cpt}(a,b) \qquad \boxed{\text{cbd}}.$$

② Další nutná podmínka samoadjungovanosti: $l = l^*$, tj.

$$\sum_{k=0}^{n} p_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\bar p_k y\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \bar p_k^{(k-j)} y^{(j)}$$

Srovnejme koef. u $y^{(n)}$: $\quad p_n = (-1)^n \bar p_n$

- n sudé: $p_n = \bar p_n \Rightarrow p_n$ reálný
- n liché: $p_n = -\bar p_n \Rightarrow \underbrace{p_n + \bar p_n}_{2\,\mathrm{Re}\, p_n} = 0 \Rightarrow p_n = i q_n$, $\quad q_n$ reálný

Atd... lze z toho odvodit tvar tzv. elem. diferenciálních výrazů

Def: Elementární dif. výrazy nazveme LDV tvaru

$$E_{2k} = (-1)^k \left(p\, y^{(k)}\right)^{(k)}$$
$$E_{2k-1} = \frac{i}{2}\left[\left(p\, y^{(k-1)}\right)^{(k)} + \left(p\, y^{(k-1)}\right)^{(k)}\right]$$

p reálná fce, $k = 1, 2, \dots$

Dále

Věta (Čihák, str. 210)

$l(y) = l^*(y)\ \forall y \in C^\infty_{cpt}(a,b) \iff l$ je konečnou lin. kombinací výrazů tvaru E_{2k} a E_{2k-1}.

D Čihák

Ø: $E_1 = \frac{i}{2}\left((py)' + py'\right) = \frac{i}{2}\left(p'y + 2py'\right) = ipy' + \frac{i}{2}p'y$. Pro $p \equiv 1$: $\underline{\underline{iy'}}$

$E_2 = (py')'$ ... tzv. <u>diferenciální výraz 2. řádu v samoadj. tvaru</u>

$\boxed{6.2}$ Ortogonální báze v L^2_ρ složené z polynomů

Uvažujme

$$H = L^2_\rho(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C};\ \int_a^b \rho|f|^2 < \infty,\ \text{kde } \rho : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ je tzv. } \underline{\text{váha}},\ \text{splňující } \rho > 0, \rho \in C, \rho \in L^1 \right\}$$

<u>Pozn:</u> $\rho \in C$ se někdy nevyžaduje.

Lze ukázat, že $L^2_\rho(a,b)$ je Hilbertův se skalárním součinem

$$(y,z)_{2,\rho} := \int_a^b \rho y \bar{z}$$

a normou

$$\|y\|^2_{2,\rho} = \int_a^b \rho|y|^2 .$$

<u>Pozn:</u> Proč uvažujeme L^2_ρ? Například proto, že chceme pracovat s polynomy na $\mathbb{R}$. Přitom <u>žádný</u> polynom P není prvkem $L^2(\mathbb{R})$. Ale <u>všechny</u> polynomy jsou prvkem $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$.

Uvažujme nyní $T : D(T) \to L^2_\rho$; $\overline{D(T)} = L^2_\rho$, symetrický na $D(T)$.

$$D(T) \subset L^2_\rho$$

Přitom $D(T)$ navíc je takové, že $D(T) \subset L^2_\rho \cap L^2$.

Definujme vlastní číslo λ a vl. fci y operátoru T, <u>s váhou ρ</u>: $Ty = \lambda \rho y$.

Úvaha

$$(Ty,y)_2 \overset{\text{vl. č. s váhou}}{=} (\lambda y \rho, y)_2 = \lambda(\rho y, y)_2 = \lambda \int_a^b \rho|y|^2 = \lambda \|y\|^2_{2,\rho}$$

sk. součin <u>bez váhy</u>, T samoadjungovaný <u>bez váhy</u>

$$(y, Ty)_2 = \dots \bar{\lambda}\|y\|^2_{2,\rho}$$

, ano, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pokud $y \in D(T)$.

Dále, pro $Ty_j = \lambda_j \rho y_j$ $\quad j=1,2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, máme

$$\lambda_1 (y_1,y_2)_{2,\rho} = \lambda_1 (y_1\rho, y_2)_2 = (Ty_1,y_2)_2 = (y_1,Ty_2) = \dots \lambda_2 (y_1,y_2)_{2,\rho}$$

$$\overset{\lambda_1\neq\lambda_2}{\Rightarrow} \quad (y_1,y_2)_{2,\rho} = 0 \Rightarrow \underline{\text{kolmé v } L^2_\rho}$$

Závěr: Uvažujeme vl. č. s vahou a „sk. součin bez váhy".
Dokážeme OG systém v L^2_ρ.
Obecně v tomto případě není k dispozici

- výsledek o úplnosti systému OG fcí
- výsledek o vlastních číslech (musí se dokazovat případ od případu).

Víme však, že generujeme OG množiny, a dále máme k dispozici Weierstrassovu větu o tom, že polynomy jsou husté v $C(K)$, (pokud K je kompakt), která je naše hustá v $L^2_\rho(K)$. Proto se zdá rozumné zabývat se OG systémy polynomů v L^2_ρ. Pro $L^2_\rho(K)$ pak plyne úplnost OG množiny z Weierstrassovy věty. Na nekompaktech se ovšem úplnost OG množiny dokazuje obtížně.

Následující věta může být trochu překvapivá.

Věta $L^2_\rho(a,b)$; $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, ρ taková váha, že $\|P\|_{2,\rho} < \infty$ $\forall P$ polynom.
Buď $\{\varphi_m\}$ systém reálných OG polynomů v L^2_ρ; st $\varphi_m = m$, $m=0,1,2,3\dots$
Potom $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists A_m, B_m, C_m \in \mathbb{R}$, že

$$\boxed{x\varphi_m = A_m\varphi_{m+1} + C_m\varphi_m + B_m\varphi_{m-1}}$$

Dk: $m=0 \Rightarrow \varphi_0 = \underset{\neq 0}{c}$, potom $x\varphi_0 = cx = \frac{c}{a}\underbrace{(ax+b)}_{\varphi_1} - \frac{b}{a}\cdot\underbrace{c}_{\varphi_0}$ $(a\neq 0)$ $\Rightarrow x\varphi_0 = \frac{c}{a}\varphi_1 - \frac{b}{a}\varphi_0$

(I) $m\in\mathbb{N}$: st$(x\varphi_m) = m+1 \Rightarrow \exists \gamma_{m,k} \in \mathbb{R}$

$$x\varphi_m = \sum_{k=0}^{m+1} \gamma_{m,k}\varphi_k \qquad (*)$$

(platí obecně pro jakékoli polynomy, st $\varphi_m = m$, nemusí být OG – rozmyslete si)

$/\cdot(\cdot,\varphi_j)_{2,\rho}$ $\quad \forall j=0,\dots$

$$(x\varphi_m,\varphi_j)_{2,\rho} = \sum_{k=0}^{m+1} \gamma_{mk} \underbrace{(\varphi_k,\varphi_j)_{2,\rho}}_{\delta_{kj}\|\varphi_k\|^2_{2,\rho}} = \gamma_{m,j}\|\varphi_j\|^2_{2,\rho} \qquad j\le m+1 \qquad (+)$$

$(=0$ pro $j>m+1)$

$\gamma_{m,j}=0$ pro $j>m+1$: suma uprostřed je rovna nule pro $j>m+1$, neb $\varphi_k\perp\varphi_j$ pro $k\in\{0,\dots,m+1\}$ a $j>m+1$. Ostatně sama definice oné sumy lze chápat tak, že $\gamma_{m,k}=0$ pro $k>m+1$ (a brát onu sumu formálně jako $\sum_0^\infty$)

Díky reálnosti φ_m je však

$$(x\varphi_m,\varphi_j)_{2,\rho} = (\varphi_m,x\varphi_j)_{2,\rho} = (\varphi_m,\sum_{p=0}^{j+1}\gamma_{j,p}\varphi_p) = \underbrace{\sum_{p=0}^{j+1}\gamma_{j,p}(\varphi_m,\varphi_p)_{2,\rho}}_{=0\ \forall m>j+1}$$

ze stejného důvodu

Tato suma je však dle (+) stále rovna $\gamma_{m,j}\|\varphi_j\|^2_{2,\rho} \Rightarrow \gamma_{m,j}=0\ \forall j<m-1$

Celkem $\gamma_{m,j}=0\quad \forall j\neq m-1,m,m+1 \Rightarrow$ (*) se redukuje na

$$x\varphi_m = \underbrace{\gamma_{m,m-1}}_{=:B_m}\varphi_{m-1} + \underbrace{\gamma_{m,m}}_{=:C_m}\varphi_m + \underbrace{\gamma_{m,m+1}}_{=:A_m}\varphi_{m+1}$$

$\boxed{\text{cbd}}$.

Pozn.: Může lze ukázat, že $\left.\begin{array}{l} a=-b \\ \rho \text{ sudá} \\ \text{na } (a,b)\end{array}\right\} \Rightarrow C_m=0\ \forall m$

Použití právě odvozeného rekur. vzorce – výpočet OG reálné polynomů
– výpočet jejich norem:

$$x\varphi_m = A_m\varphi_{m+1} + C_m\varphi_m + B_m\varphi_{m-1}, \qquad m=1,2,3,\dots$$

a) $A_m\neq 0$, jinak je stupeň polynomu vpravo $=m$.

b) Vynásob rekur. vztah $(\cdot,\varphi_{m+1})_{2,\rho}$: $\quad (x\varphi_m,\varphi_{m+1})_{2,\rho} = A_m\|\varphi_{m+1}\|^2_{2,\rho}$

c) Vynásob rekur. vztah $(\cdot,\varphi_{m-1})_{2,\rho}$: $\quad \underbrace{(x\varphi_m,\varphi_{m-1})_{2,\rho}}_{\|} = B_m\|\varphi_{m-1}\|^2_{2,\rho}$

$(x\varphi_{m-1},\varphi_m)_{2,\rho} = A_{m-1}\|\varphi_m\|^2_{2,\rho}$

$\Rightarrow \quad A_{n-1} \|\varphi_n\|^2_{2,\rho} = B_n \|\varphi_{n-1}\|^2_{2,\rho}$ $\qquad A_n \neq 0 \;\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow B_n \neq 0 \;\forall n = 2,3,4\ldots$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\|\varphi_{n+1}\|^2_{2,\rho} = \frac{B_{n+1}}{A_n} \|\varphi_n\|^2_{2,\rho} \qquad n = 1,2,\ldots}$$

Rekurz. vzorec pro normy.
$\|\varphi_0\|$, $\|\varphi_1\|$ je třeba znát, od φ_2 spočte.

Literatura pro neom. operátory
KREYSZIG: Introductory FA with applications.

Bonus: Důkaz tvrzení z poznámky na předchozí větou:
Z vlastností polynomů opět máme

$$\varphi_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k} \varphi_k(x) \qquad \Big/ \left(\cdot, \varphi_j(x)\right)_{2,\rho}$$

$j = 0, \ldots, n$
(jinak je součin $= 0$)

$$\left(\varphi_n(-x), \varphi_j(x)\right)_{2,\rho} = \beta_{n,j} \|\varphi_j\|^2_{2,\rho}$$

$$\int_{-a}^{a} \varphi_n(-x)\varphi_j(x)\rho(x)\,dx \underset{\begin{bmatrix} t = -x \\ dt = -dx \end{bmatrix}}{=} -\int_{a}^{-a} \varphi_n(t)\varphi_j(-t)\rho(t)\,dt = \left(\varphi_n(x), \varphi_j(-x)\right)_{2,\rho}$$

$$= \left(\varphi_n(x), \sum_{m=0}^{j} \beta_{j,m} \varphi_m(x)\right) = 0 \quad \text{pro } n > j.$$

$\Downarrow$

Vše nenulové jen pro $j = n$.

$$\Rightarrow \underline{\varphi_n(-x) = \beta_{n,n} \varphi_n(x)}$$

Srovnejme nyní koeficienty u x^n v polynomu φ:

$$a_n(-x)^n = \beta_{n,n} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad \beta_{n,n} = (-1)^n$$

Proto $\varphi_m(-x) = (-1)^m \varphi_m(x) \Rightarrow (\varphi_m(-x))^2 = (\varphi_m(x))^2$
tj $|\varphi_m|^2$ je <u>sudá</u>.

Závěrem,
$$x\varphi_m = A_m \varphi_{m+1} + C_m \varphi_m + B_m \varphi_{m-1} \quad / (\cdot, \varphi_m)_{2,\rho}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x\varphi_m, \varphi_m) = C_m \|\varphi_m\|^2_{2,\rho} \\ \quad \| \\ \displaystyle\int_{-a}^{a} x|\varphi_m|^2 \rho(x) = 0 \quad \text{neboť } x \text{ lichá}, |\varphi_m|^2 \rho \text{ sudá} \end{array}\right\} \Rightarrow C_m = 0$$
cbd.

$\boxtimes$

6.3 Gaussova redukovaná rovnice a ortogonální systémy polynomů

Uvažujme tzv. Gaussovu redukovanou rovnici

$$xy'' + (s+1-x)y' - \alpha y = 0, \quad x \neq 0. \qquad \text{(GRR)}$$
$s, \alpha \in \mathbb{C}$
$s \neq -1, -2, -3, \dots$ (uvidíme, proč)

(1) Nejprve ukážeme, že tuto rovnici lze psát ve tvaru „vlastní vektor a vlastní číslo s vahou", tj ve tvaru
$$Ty = \lambda \rho y \qquad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C} \text{ a vhodnou váhu } \rho,$$
přičemž Ty má tvar diferenciálního výrazu v samoadjungovaném tvaru, tj $Ty = (-py')'$.
Tedy
$$(-py')' = \lambda \rho y \qquad p \neq 0$$
$$-p'y' - py'' - \lambda \rho y = 0 \qquad /: (-p)$$
$$\underline{y'' + \frac{p'}{p} y' + \lambda \frac{\rho}{p} y = 0} \qquad \text{(ST)}$$

Porovnejme (ST) a (GRR), které upravíme pro $x \neq 0$:

$$y'' + \left(\frac{s+1}{x} - 1\right) y' - \frac{\alpha}{x} y = 0$$

Porovnáním lze psát například (nikoli jednoznačně, zajímá mě jedno z možných řešení); počítáme pro $x \neq 0$:

$$\frac{p'}{p} = \frac{s+1}{x} - 1 \qquad \lambda = -\alpha \qquad \frac{\rho}{p} = \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$(\ln|p|)' = (s+1)(\ln|x|)' - 1$$

$$|p| = |x|^{s+1} e^{-x} \cdot K \qquad\qquad \rho = \frac{p}{x}$$

$\underline{x>0}$: $\quad \underbrace{p = x^{s+1} e^{-x}}$ (jedna z voleb) $\qquad \underbrace{\rho = x^{s} e^{-x}}$

Pro jednoduchost uvažujeme $x > 0$, pak potřebujeme $\rho \in L^1(0,\infty)$, tedy nutně $\underline{s > -1}$.

Dostáváme

$$\text{(GRR)} \iff \underbrace{(-\underbrace{x^{s+1} e^{-x}}_{p} y')' = (-\alpha) \underbrace{x^{s} e^{-x}}_{\rho} y} \qquad \text{(SAT)}$$

na $(0,\infty)$

a pracujeme na $L^2_\rho(0,\infty) = L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, $s > -1$.

(2) Budeme hledat řešení (GRR) ve tvaru řady. K tomu však musíme učinit tyto úvahy:

- pro $x = 0$ rovnice (GRR) degeneruje, je potřeba ji vyšetřovat separátně na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$
- můžeme však předpokládat, že tato dvě separátní řešení lze možno „slepit" v bodě $x = 0$ tak, že vznikne řešení na nějakém $(-k,k)$. Pokud hledáme řešení (GRR) ve třídě takovýchto „slepitelných" řešení, lze je hledat i ve tvaru Taylorovy řady se středem v nule. S tím rizikem, že řešení v tomto tvaru nenajdeme, což by nás dovedlo k závěru, že úloha žádná „slepitelná" řešení ve tvaru řady nemá.

Za těchto podmínek položíme $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ a dosadíme do (GLR):

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} \cdot x + (s+1)\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1) n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (s+1) c_{n+1}(n+1)\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha\, x^n = 0$$

Srovnejme koeficienty:

$$x^0 : \quad (s+1)c_1 = c_0 \alpha \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_0 \frac{\alpha}{s+1}$$

$$(s \neq -1 \dots)$$

$$n \geq 1 : \quad x^n : \quad c_{n+1}\left[(n+1)n + (s+1)(n+1)\right] = c_n(n+\alpha)$$

$$\underbrace{c_{n+1} = c_n \frac{n+\alpha}{(n+1)(s+n+1)}} \qquad (s \neq -2, -3, \dots)$$

(toto v sobě zahrnuje i $c_1 = c_0 \frac{\alpha}{s+1}$ pro $n = 0$).

Protože každý násobek řešení (GLR) je zase jejím řešením, lze BÚNO volit základní řešení pro $c_0 = 1$. Dostáváme, že koeficienty řady, která definuje řešení, by musely mít tvar

$$\left.\begin{aligned} & c_0 = 1 \\ & c_{n+1} = \frac{n+\alpha}{n+s+1} \cdot \frac{c_n}{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \dots \\ & \qquad\qquad s \neq -1, -2, -3, \dots \end{aligned}\right\} \quad (\text{KŘ})$$

Ještě však musíme ukázat, že řada s koeficienty (KŘ) alespoň někde konverguje.

Protože řady s koeficienty typu (KŘ) tvoří jednu velmi důležitou třídu řad, budeme jim věnovat následující intermezzo.

INTERMEZZO: HYPERGEOMETRICKÉ ŘADY

Def: Hypergeometrickou řadou nazveme mocninnou řadu tvaru
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{, kde koeficienty splňují:}$$

a) existují polynomy P, Q s koeficienty u nejvyšší mocniny rovnými 1, st $P = p \geq 0$, st $Q = q \geq 0$, Q nemá kořeny mezi $\mathbb{N} \cup \{0\}$

b)
$$\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad n = 0,1,2,\dots \qquad c_0 = 1} \qquad \text{(PK)}$$

Pozn: Pro $P(n) = Q(n) \cdot n+1$ máme $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$, $\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x|$

geom. řada s kvoc. x

Ono $\frac{1}{n+1}$ je tam z historických důvodů.

Rozložme nyní P a Q na kořenové činitele v $\mathbb{C}$, a dostaneme
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(a_1+n)(a_2+n)\cdots(a_p+n)}{(b_1+n)(b_2+n)\cdots(b_q+n)} \cdot \frac{1}{n+1} \qquad (*)$$

Tuto situaci zachytíme následujícím zápisem:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = {}_pF_q\left[a_1,\dots,a_p; b_1,\dots,b_q\right](x) \qquad \text{(KHG)}$$

(KHG) se nazývá „klasický zápis hypergeometrické řady".

Z $(*)$ ihned vidíme:

(i) $p < q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow \sum c_n x^n$ definuje holomorfní (C^∞) fci na celém $\mathbb{C}$

(ii) $p = q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sum c_n x^n$ definuje holomorfní (C^∞) fci na $U^1(0)$

(iii) $p > q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \infty \Rightarrow R = 0$ nedefinuje žádnou diferencovatelnou funkci.

V našem intermezzu ještě budeme potřebovat úpravu (*). Za tím účelem definujme nejprve následující značení:

$$a \in \mathbb{C}, \quad \text{def}: \quad (a)_0 = 1$$

$$(a)_m = \underbrace{a(a+1)\cdots(a+m-1)}_{m \text{ členů}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Symbol $(a)_m$ je tzv. POCHHAMMERŮV SYMBOL, někdy též tzv. „RISING FACTORIAL". Někdy se značí i $\langle a \rangle_m$. Čteme „a Pochhammer m" nebo „a dole m".

Všimněte si, že máme: $(1)_m = m!$. Platí též $(a)_m = \dfrac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}$

S tímto značením upravme (*):

$$c_m = \frac{(a_1+m-1)(a_2+m-1)\cdots\cdots(a_p+m-1)}{(b_1+m-1)(b_2+m-1)\cdots(b_q+m-1)} \cdot \frac{1}{m}\, c_{m-1} =$$

$$= \frac{[(a_1+m-1)(a_1+m-2)]\cdots\cdots[(a_p+m-1)(a_p+m-2)]}{[\underbrace{(b_1+m-1)(b_1+m-2)}]\cdots\cdots[(b_q+m-1)(b_q+m-2)]} \cdot \underbrace{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m-1}}_{\text{půjde k } \frac{1}{m!}} \cdot c_{m-2} =$$

v dalších krocích vznikne

$$\underbrace{(b_1+m-1)(b_1+m-2)\cdots(b_1)}_{(b_1)_m}$$

$$= \frac{(a_1)_m \cdots\cdots (a_p)_m}{(b_1)_m \cdots\cdots (b_q)_m} \cdot \frac{1}{m!} \cdot \underbrace{c_0}_{=1} = \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_m}{\prod_{k=1}^{q} (b_k)_m} \cdot \frac{1}{m!}$$

Dostáváme tedy konečně explicitní vyjádření hypergeometrické řady

$$\boxed{{}_pF_q[a_1,\dots,a_p; b_1,\dots,b_q](x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_m}{\prod_{k=1}^{q} (b_k)_m} \cdot \frac{x^m}{m!}} \qquad \text{(Fin)}$$

Nyní vynikají ony historické důvody proč bylo v (Pk) na straně 70 ono $\frac{1}{n+1}$: nejjednodušší hypergeometrickou řadou je ${}_0F_0[;](x)$.

Podle (Fin) je
$$ {}_0F_0[;](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x . $$

(Př) Zkuste :

- ${}_0F_1[;\frac{1}{2}](-\frac{x^2}{4}) = \cos x$; Řada vlevo má $p=0, q=1 \Rightarrow p<q+1 \Rightarrow$ řada definuje hladkou (a holomorfní) fci v $\mathbb{C}$.

Řešení: $${}_0F_1[;\tfrac{1}{2}](-\tfrac{x^2}{4}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1}{2})_n} \cdot \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \underbrace{\frac{1}{n!\, 4^n\, \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ cbd.

$$\frac{2^n}{n!\, 4^n\, \underbrace{(1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1))}_{(2n)!/(2\cdot 4 \cdots 2n)}} = \frac{1}{(2n)!}$$

- $\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\, {}_1F_1[\frac{1}{2};\frac{3}{2}](-x^2) \underset{\text{pro } x\in\mathbb{R}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \mathrm{erf}(x)$; řada vlevo má ovšem smysl $\forall x \in \mathbb{C}$.

Velká třída funkcí (elementárních i neelementárních) se dá vyjádřit ve tvaru hypergeometrické řady.

——— KONEC INTERMEZZA O HYPERGEOMETRICKÝCH ŘADÁCH.

Zpět ke (GLR). Jejím řešením je řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, kde

$$c_0 = 1$$
$$c_{n+1} = \frac{n+\alpha}{(n+s+1)} \cdot \frac{1}{n+1} c_n \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Jde tedy o hypergeometrickou řadu pro $p=1$, $q=1$, tj. $p < q+1$

$$\underbrace{{}_1F_1[\alpha; s+1](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$\alpha \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$

Otázka: Kdy je řešení ${}_1F_1[\alpha, s+1](x)$ polynomem?
Odpověď: Právě tehdy, když má řada vpravo jen konečný počet členů
$\iff \exists m \in \mathbb{N}, \quad (\alpha)_k = 0 \quad \forall k > m.$
Potom řada vpravo dává polynom stupně m.

Ale $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$

Tj. pro $\boxed{\alpha = -m}$ dostanu to, co chci dostat: $(\alpha)_k = 0 \iff k > m$
$m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Definice: Laguerrův polynom řádu s a stupně m je polynom, definovaný pro $s \in \mathbb{R}$, $s > -1$ takto

$$\boxed{L_m^s(x) := \frac{(s+1)_m}{m!}\, {}_1F_1[-m, s+1](x) = \frac{(s+1)_m}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-m)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}}$$

$x \in \mathbb{R}$.

Poznámky:

a) $L_m^s(x)$ řeší (GLR) $\forall m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, pokud v ní položíme $\alpha = -m$.

b) S odvoláním na hran (SAT) provedeme následující restrikce:
- Uvažujeme $x > 0$, tj. $x \in (0,\infty)$
- Uvažujeme $s \in \mathbb{R}$, $s > -1$, a položíme $\rho(x) = x^s e^{-x}$

Pak $\rho > 0$ na $(0,\infty)$, $\rho \in C(0,\infty) \cap L^1(0,\infty)$
$\Rightarrow \rho$ je dobrá váha

- Uvažujme tedy prostor $L^2_{x^\alpha e^{-x}}(0,\infty)$ … Hilbertův.
- $\lambda = -n$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

Potom (GRR) lze psát v samoadjungovaném tvaru (viz (SAT), str. 68)

$$\underbrace{Ty = n\rho y,} \qquad \text{(SAT)}$$

kde $Ty = -(py')'$, $p(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$.

$$\boxed{\text{Potom } n = 0,1,2,\dots \text{ jsou vlastní čísla } T \text{ s vahou } \rho \text{ (na } L^2_\rho(0,\infty)) \text{ a jim odpovídající vlastní funkce jsou Laguerrovy polynomy } L^\alpha_n.}$$

c) Podle výsledku na str. 64 tvoří Laguerrovy polynomy (pro pevné $\alpha > -1$ a pro $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$) OG systém polynomů v $L^2_{x^\alpha e^{-x}}(0,\infty)$. Mj. tedy existuje rekurentní vzorec pro jejich vygenerování – ten odvodíme dále.

d) Otázkou v této chvíli zůstává jen to, zda jsou Laguerrovy polynomy úplným systémem, tj. zda každá funkce z $L^2_{x^\alpha e^{-x}}(0,\infty)$ lze napsat ve tvaru $\sum_0^\infty c_n L^\alpha_n(x)$. Odpověď je ANO. Důkaz je možno nalézt ve skriptech Čižák a kol.: MA pro fyziky V, Věta 41 (str. 196).

Na závěr ukážeme některé důležité vlastnosti Laguerr. polynomů

1. Tzv. explicitní vyjádření

Platí:

$$\boxed{L^\alpha_n(x) = \frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)^{(n)}} \qquad \text{(E)}$$

Pozn.: • Odtud: $L_0^{s}(x) = x^{-s} e^{x}\, x^{s} e^{x} = 1$

$$L_1^{s}(x) = x^{-s}e^{x}\left(x^{s+1}e^{-x}\right)' = x^{-s}e^{x}(s+1)x^{s}e^{-x} + x^{-s}e^{x}x^{s+1}(-e^{-x})$$

$$= (s+1) - x \qquad \text{atd...}$$

• Tvar (E) má velký význam při výpočtech integrálů typu $\int_0^\infty L_m^{s}(x) f(x)\,dx$, protože umožňuje použití per partes.

② Dokážeme (E). Upravíme rovnici (GRR):

$$x y'' + (s+1-x) y' - \alpha y = 0 \qquad (A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(x^{s+1} e^{-x} y'\right)' = \alpha x^{s} e^{-x} y$$

Tuto rovnost označíme jako GRR$(y, s+1, \alpha)$

nyní zderivujeme (A)

$$x y''' + y'' + (s+1-x) y'' - y' - \alpha y' = 0$$

$$x y''' + (s+2-x) y'' - (\alpha+1) y' = 0$$

to je GRR$(y', s+2, \alpha+1)$

Pokud tedy (A) zderivujeme $(m-1)$krát, dostaneme GRR$(y^{(m-1)}, s+m, \alpha+m-1)$ je ekvivalentní tvaru

$$\Big(\underbrace{x^{s+m} e^{-x} y^{(m)}}_{=:\,V_m}\Big)' = (\alpha+m-1)\underbrace{x^{s+m-1} e^{-x} y^{(m-1)}}_{\Rightarrow\, V_{m-1}}$$

Tedy
$$V_m' = (\alpha+m-1) V_{m-1} \qquad \Big/\ '$$

$$V_m'' = (\alpha+m-1) V_{m-1}' = (\alpha+m-1)(\alpha+m-2) V_{m-2}$$

Postupně:

$$V_m^{(m)} = (\alpha)_m V_0 = (\alpha)_m x^{s} e^{-x} y$$

Tedy
$$\left(x^{s+m} e^{-x} y^{(m)}\right)^{(m)} = (\alpha)_m x^{s} e^{-x} y$$
$$\Downarrow \quad \boxed{\text{pro } \alpha = -m}$$

$$\underbrace{y = \frac{1}{(-m)_m} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+m} e^{-x} y^{(m)}\right)^{(m)}} \qquad (B)$$

Pokud je $\alpha = -m$, je řešením L^{s}_{m}, což je polynom stupně m. Jeho m-tá derivace je tedy konstanta, $\left(L^{s}_{m}\right)^{(m)} = m! \cdot \underbrace{\text{koeficient u } x^m}_{a_m}$

Je ovšem $L^{s}_{m}(x) = \frac{(s+1)_m}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-m)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}$, tedy $a_m = \frac{\cancel{(s+1)_m}}{m!} \frac{(-m)_m}{\cancel{(s+1)_m}} \cdot \frac{1}{m!}$

Proto $\left(L^{s}_{m}\right)^{(m)} = \frac{(-m)_m}{m!}$

Tedy po dosazení do (B):

$$L^{s}_{m}(x) = \frac{1}{(-m)_m} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+m} e^{-x} \frac{(-m)_m}{m!}\right)^{(m)}$$

tedy
$$L^{s}_{m}(x) = \frac{1}{m!} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+m} e^{-x}\right)^{(m)} \qquad \text{cbd.} \qquad (C)$$

2 Rekurentní vzorec pro $L^{s}_{m}(x)$

Vyjdeme z (C):
$$L^{s}_{m}(x) = \frac{1}{m!} x^{-s} e^{x} \underbrace{\left(x^{s+m} e^{-x}\right)^{(m)}}_{=:E_m}$$

Pak
$$E_{m+1} = \left(\left(x^{s+m+1} e^{-x}\right)'\right)^{(m)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivuj} \\ \text{uvnitř}}}{=} (s+m+1)\underbrace{\left(x^{s+m} e^{-x}\right)^{(m)}}_{E_m} - \underbrace{\left(x^{s+m+1} e^{-x}\right)^{(m)}}_{=:I_m} \qquad (D)$$

Naším cílem je nyní vyjádřit I_n pomocí E_n.

$$I_n = (x \cdot x^{s+n} e^{-x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} (x^{s+n} e^{-x})^{(n-k)} =$$

$$= [\text{je nenulové jen pro } k=0,1] = x(x^{s+n}e^{-x})^{(n)} + n(x^{s+n}e^{-x})^{(n-1)}$$

$$= xE_n + n\underbrace{(x^{s+n}e^{-x})^{(n-1)}}_{I_{n-1}}.$$

tj.

$$\underline{I_n = xE_n + nI_{n-1}} \qquad (E)$$

Vezmeme nyní (D) pro $n-1$:

$$E_n = (s+n)E_{n-1} - I_{n-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{I_n = xE_n + n(s+n)E_{n-1} - nE_n}_{\text{dosaď do (D):}}$$

$$\Rightarrow E_{n+1} = (s+n+1)E_n - xE_n - n(s+n)E_{n-1} + nE_n$$

$$xE_n = (s+2n+1)E_n - E_{n+1} - n(s+n)E_{n-1} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{n!}x^{-s}e^{x}$$

$$\boxed{xL_n^s(x) = (s+2n+1)L_n^s(x) - (n+1)L_{n+1}^s(x) - (s+n)L_{n-1}^s(x)}$$

Hledaný rekurentní vzorec.
Protože mám $L_0^s = 1$, $L_1^s = (s+1) - x$,
mohu vygenerovat všechna L_n^s.

(3) Normy.

Víme (viz str. 66), že

$$\|\varphi_{n+1}\|^2_{2\rho} = \frac{B_{n+1}}{A_n}\|\varphi_n\|^2_{2\rho} \qquad n = 1,2,\dots$$

pokud

$$x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1}.$$

Zde tedy $A_n = -(n+1)$, $B_n = -(s+n)$, tedy

$$\|L^s_{n+1}\|^2_{2,\rho} = \frac{s+n+1}{n+1}\|L^s_n\|^2_{2,\rho} \qquad n = 1,2,3,\dots$$

Máme $\|L^s_0\|^2_{2,\rho} = \int_0^\infty 1 \cdot x^s e^{-x} = \Gamma(s+1)$

$$\begin{aligned}\|L^s_1\|^2_{2,\rho} = \int_0^\infty \left((s+1)-x\right)^2 x^s e^{-x} &= (s+1)^2\Gamma(s+1) - 2(s+1)\Gamma(s+2) + \Gamma(s+3)\\ &= (s+1)\Gamma(s+2) - 2(s+1)\Gamma(s+2) + \Gamma(s+3)\\ &= \Gamma(s+3) - (s+1)\Gamma(s+2)\\ &= (s+2)\Gamma(s+2) - (s+1)\Gamma(s+2) = \Gamma(s+2)\end{aligned}$$

a rekurencí

$$\|L^s_n\|^2_{2,\rho} = \frac{s+n}{n}\cdot\frac{s+n-1}{n-1}\cdot \dots \cdot \frac{s+2}{2}\cdot\underbrace{\|L^s_1\|^2_{2,\rho}}_{\Gamma(s+2)} = \frac{1}{n!}\Gamma(s+n+1)$$

platí i pro $n = 0,1$

$$\Rightarrow \boxed{\|L^s_n\|^2_{2,\rho} = \frac{1}{n!}\Gamma(s+n+1) \qquad \forall n = 0,1,2\dots}$$

(4) Tzv. vytvořující funkce

Def. Vytvořující funkcí pro daný systém $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$, $\varphi_n = \varphi_n(x)$, nazveme takovou funkci $F = F(x,t)$, která je analytická v okolí $t=0$ (pro všechna pevná x) a její rozvoj do Taylorovy řady podle t v $t \in U(0)$ generuje koeficienty $\varphi_n(x)$. Tedy:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^\infty \varphi_n(x)t^n .$$

Zde tedy hledáme takovou F, pro kterou $F(x,t) = \sum_{n=0}^\infty L^s_n(x)t^n$.

Budeme postupovat tak, že rozvineme vhodnou funkci $f \in L^2_\rho(0,\infty)$ s parametrem t do řady v Laguerrových polynomech. Tím dostaneme řadu typu $\sum_{n=0}^\infty c_n(t)L^s_n(x)$ a budeme směřovat k tomu, aby $c_n \approx t^n$.

Teorie říká, že pokud $f \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$ [a pokud $L_n^s(x)$ je úplný v $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$], tak $\exists c_n \in \mathbb{C}$ takové

$$c_n = \frac{1}{\|L_n^s\|^2_{2,\rho}} \left(f, L_n^s\right)_{2,\rho}, \qquad \text{že} \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{rovnost v } L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)}}{f = \sum c_n L_n^s}$$

(to plyne z obecné teorie Fourierových řad).

Budeme rozvíjet funkci e^{-ax} (poté budeme hledat $a = a(t)$).

(i) Ověření: pro jaká $a \in \mathbb{R}$ je $e^{-ax} \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$?

Tj. kdy
$$\int_0^\infty \left(e^{-ax}\right)^2 x^s e^{-x}\, dx < \infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\int_0^\infty x^s e^{-(2a+1)x}\, dx < \infty \quad \text{pro } s > -1, \text{ pokud}$$
$$2a+1 > 0$$
$$\underbrace{a > -\tfrac{1}{2}}$$

Pro tato a spočteme

$$c_n = \frac{1}{\|L_n^s\|^2_{2,\rho}} \int_0^\infty e^{-ax} x^s e^{-x} L_n^s(x)\, dx = \left[\begin{array}{l}\text{použij explicitní} \\ \text{vyjádření } L_n^s\end{array}\right]$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \cancel{x^s} \cancel{e^{-x}} \left(\frac{1}{\cancel{n!}} \cancel{x^{-s}} \cancel{e^{x}} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)} dx = \left[\begin{array}{l}n\times \text{ per partes} \\ \text{při každém přírůstku} \\ \text{faktor „}-(-a)\text{"}\end{array}\right]$$

$$\overset{\text{hraniční členy} = 0}{=}$$

$$= \frac{a^n}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} x^{s+n} \underbrace{e^{-x}\, dx}_{(a+1)x = y} =$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(s+m+1)} \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{y}{a+1}\right)^{s+m} \frac{1}{a+1}\, dy =$$

$$= \frac{a^m}{\Gamma(s+m+1)} \cdot \frac{1}{(a+1)^{s+m+1}}\, \Gamma(s+m+1) = \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \left(\frac{a}{a+1}\right)^m$$

Odtud tedy dostáváme:

$$\boxed{e^{-ax} \overset{s.v.}{=} \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^m L_m^s(x) \qquad a > -\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

Pozn. • Obecně platí rovnost ve smyslu prostoru, ve kterém byla odvozena, tj. ve $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, neboli s.v. Pokud jsou však na obou stranách spojité funkce (tj. například pokud řada vpravo konverguje alespoň lokálně stejnoměrně v $\mathbb{R}$), platí rovnost ve všech $x \in \mathbb{R}$.

• Dosazením $a = 0$ do $(*)$ vypadnou vpravo všechny členy pro $m \geq 1$ a dostaneme

$$1 = L_0^s(x),$$ což je milé.

• Pro $a = 1$ dá $(*)$

$$e^{-x} = \frac{1}{2^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L_m^s(x)}{2^m}$$

speciálně pro $s = 0$ máme $\displaystyle e^{-x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L_m^0(x)}{2^{m+1}}$.

(ii) <u>Druhý krok</u>: sestavení vytvořující funkce.

Položme $t = \frac{a}{a+1}$ v $(*)$. $\qquad \frac{dt}{da} = \frac{1}{(a+1)^2} > 0$ Prosté.

$\Updownarrow$

$a = \frac{t}{1-t}, \quad \frac{1}{a+1} = 1 - t$

Platí $a > -\frac{1}{2} \iff t \in (-1,1)$

Úpravou (*) máme

$$(a+1)^{s+1} e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) \left(\frac{a}{a+1}\right)^n$$

$$\Big\downarrow \; a \to t$$

$$\underbrace{\frac{1}{(1-t)^{s+1}}\, e^{-\frac{tx}{1-t}}}_{\text{Vytvořující fce pro Laguerrovy polynomy.}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x)\, t^n \qquad t \in (-1,1)$$

V tabulce „Ortogonální systémy polynomů" v dodatku uvádíme tyto systémy polynomů

Laguerrovy, Hermiteovy, Legendreovy, Čebyševovy, Gegenbauerovy.

Vždy uvádíme
- generující rovnici
- vyjádření řadou (4-6)
- explicitní tvar
- rekurentní vztah a velikosti norem
- vytvořující funkci

a zejména
- prostor, ve kterém tvoří bázi.

TO JE VŠE. [signature], 16.5.2017