Aplikovaná matematika I, NMAF071

M. Rokyta, KMA MFF UK

ZS 2016/17

Sylabus = obsah (plán) přednášky [a orientační počet přednášek věnovaných kapitole]

1. Úvod, čísla, zobrazení, posloupnosti [2]
2. Funkce jedné reálné proměnné [2]
3. Derivace funkce jedné reálné proměnné [1.5]
4. Neurčitý integrál a primitivní funkce [2]
5. Aplikace diferenciálního a integrálního počtu [2.5]
6. Určitý integrál a jeho výpočet, aplikace [2]

- podrobněji postupně na webu přednášejícího

http://www.karlin.mff.cuni.cz/˜rokyta/vyuka/

Literatura

1. J. Kopáček: *Matematika (nejen) pro fyziky I.,II.* Skripta MFF UK, Matfyzpress.
2. J. Kopáček a kol.: *Příklady z matematiky (nejen) pro fyziky I., II.* Skripta MFF UK, Matfyzpress.
3. J. Kvasnica: *Matematický aparát fyziky*. Academia, Praha, 1989.
4. I. Černý: *Úvod do inteligentního kalkulu*, Academia, Praha, 2002.
5. B. P. Děmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment, Praha, 2003.
6. **... web přednášejícího: poznámky a prezentace.**

1 Úvod, čísla, zobrazení, posloupnosti

1.1 Výroky a množiny

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé, má pravdivostní hodnotu 1) nebo že neplatí (je nepravdivé, má pravdivostní hodnotu 0).

Definice. **Negací** $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

Definice. **Konjunkcí** $A \& B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B (A a zároveň B).

Definice. **Disjunkcí** $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

Definice. **Implikací** $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**.

Pokud je výrok $A \Rightarrow B$ pravdivý, pak říkáme, že "A je **postačující podmínkou** pro platnost B" a "B je **nutnou podmínkou** pro platnost A".

Definice. **Ekvivalencí** $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B.
Vše je možno shrnout do následující tabulky:

A	B	$\neg A$	A & B	A $\vee$ B	A $\Rightarrow$ B	A $\Leftrightarrow$ B
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Intuitivně (bez přesné definice) budeme přijímat pojmy **množina** (jako soubor objektů), **být prvkem množiny** ("x je prvkem množiny M" píšeme: $x \in M$) a **nebýt prvkem množiny** ("x není prvkem množiny M" píšeme: $x \notin M$).

Poznámka. Symboly $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ budou vyhrazeny pro množiny (po řadě) přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel.

Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \dots x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, \dots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \dots, M_m$.

Definice. Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ *platí* $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M:\ A(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným (velkým) kvantifikátorem**.

Definice. Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$*, pro které platí* $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M:\ A(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním (malým) kvantifikátorem**.

Pro obrat

"Existuje právě jeden ..." často používáme symbol $\exists$!

Poznámka. Pokud výrok obsahuje několik po sobě jdoucích kvantifikátorů stejného typu, lze jejich pořadí libovolně měnit, například následující dva výroky jsou ekvivalentní pro jakoukoli výrokovou formu $V(x,y)$, $x \in M$, $y \in N$:

$$\forall x \in M\ \forall y \in N:\ V(x,y)\,,$$
$$\forall y \in N\ \forall x \in M:\ V(x,y)\,.$$

Příklad:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}:\ x^2 + y^4 \geq 0\,,$$
$$\forall y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ x^2 + y^4 \geq 0\,.$$

Poznámka. Při záměně pořadí kvantifikátorů různého typu však nový výrok nemusí být ekvivalentní s výrokem původním:

$$\exists x \in M\ \forall y \in N:\ V(x,y)\,,$$
$$\forall y \in N\ \exists x \in M:\ V(x,y)\,,$$

nejsou ekvivalentní výroky.

Příklad:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{R}:\ y > x\,,$$
$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{N}:\ y > x\,.$$

Tvrzení 1.1 (Negace složených výroků)**.** *Platí:*

$$\begin{aligned}
\neg(A \,\&\, B) &= \neg A \vee \neg B \\
\neg(A \vee B) &= \neg A \,\&\, \neg B \\
\neg(A \Rightarrow B) &= A \,\&\, \neg B \\
\neg(A \Leftrightarrow B) &= (\neg A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, \neg B) \\
\neg(\forall x \in M:\ A(x)) &= \exists x \in M:\ \neg A(x) \\
\neg(\exists x \in M:\ A(x)) &= \forall x \in M:\ \neg A(x)
\end{aligned}$$

Příklad: Určete, který z výroků je pravdivý:

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \forall z \in R:\ y^2 + z^2 > x\,,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \exists z \in R:\ y^2 + z^2 \le x\,.$$

Definice.

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.
- Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.
- **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Poznámka. Pro libovolné dvě množiny A, B platí:

$$A = B \iff (A \subset B)\ \&\ (B \subset A)\,.$$

Definice (množinové operace)**.** Nechť I je neprázdná množina a A_α je množina pro každé $\alpha \in I$.

- Definujeme **sjednocení** $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ jako množinu všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A_α.
- Definujeme **průnik** $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ jako množinu prvků, které náleží do každé z množin A_α.

Definice.

- Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.
- **Rozdílem množin** A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.
- **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.2 (de Morganova pravidla)**.** *Nechť I je neprázdná množina, X, A_α ($\alpha \in I$) jsou množiny. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} (X \setminus A_\alpha),$$
$$X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (X \setminus A_\alpha).$$

1.2 Zobrazení

Definice. Nechť X a Y jsou množiny. Je-li každému prvku $x \in X$ přiřazen nejvýše jeden prvek z Y, řekneme, že je definováno **zobrazení z** X **do** Y. Píšeme $f : X \to Y$ a $f(x) = y$, případně $f : x \mapsto y$. Množinu $D(f) := \{x \in X, \exists y \in Y, f(x) = y\}$ nazýváme **definičním oborem zobrazení** f.

Definice. Nechť X, Y jsou neprázdné množiny a $f : X \to Y$.

- **Obrazem** množiny $A \subset X$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\}.$$

- Je-li $A = D(f)$ definičním oborem zobrazení $f : X \to Y$, nazýváme množinu $f(A)$ **oborem hodnot** zobrazení f. (Značíme $R(f)$ nebo $H(f)$.)

- **Vzorem** množiny $B \subset Y$ při zobrazení f nazveme množinu
$$f_{-1}(B) = \{x \in X;\ f(x) \in B\}.$$

Definice. Nechť $X,\ Y$ jsou množiny a $f : X \to Y$.

- Zobrazení f je **prosté (injektivní) na** $A \subset X$, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in A:\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$
- Zobrazení f je zobrazením množiny $A \subset X$ **"na" množinu** Y **(f je surjektivní)**, jestliže $f(A) = Y$.
- Řekneme, že f je bijekce A na Y, jestliže f je prosté a na Y.

Definice. Nechť $f : A \to Y$ je prosté, $f(A) = B$. Pak zobrazení $f^{-1} : B \to A$ definované předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $y \in f(A)$ a $f(x) = y$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f.

Definice. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, $A \subset X$. Zobrazení $f|_A : A \to Y$ takové že $f|_A(x) = f(x)$ $\forall x \in A$ nazýváme **zúžením (restrikcí) zobrazení** f **na množinu** A.

Definice. Nechť $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení z množiny X do množiny Z definované předpisem
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá **složeným zobrazením** zobrazení f a g, přičemž f je **vnitřní zobrazení** a g je **vnější zobrazení.**

1.3 Reálná čísla

Vybudování číselných množin - několik možností:
Možnost I:
$$\mathbb{N} \text{ (intuitivně nebo z teorie množin)} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$
Možnost II:
$$\mathbb{R} \text{ (axiomaticky)} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
Ad I: Krok $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ obtížný (např. tzv. Dedekindovy řezy)
Ad II: Krok $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ např. pomocí pojmu tzv. induktivní množiny.
V obou možnostech na závěr následuje krok $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Ad II: Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze definovat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah
II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení
III. Axiom o supremu

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}:\ x + (y + z) = (x + y) + z$ **(asociativita sčítání)**,

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: \ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}: \ x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme ho $-x$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in \mathbb{R}: \ v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}: \ x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \&\ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \&\ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (0 \leq x \ \&\ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Označení.

- Označení $x \geq y$ znamená totéž co $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**).
- Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat **kladnými** (resp. **zápornými**).
- Reálná čísla, pro něž $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$), budeme nazývat **nezápornými** (resp. **nekladnými**).

Definice.

- Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.

  Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M.
- Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**.
- Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Označení (Omezené intervaly)**.** Pro $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, píšeme:

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}\,; a < x < b\}$,
- $\langle a, b) := \{x \in \mathbb{R}\,; a \leq x < b\}$,
- $(a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R}\,; a < x \leq b\}$,
- $\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R}\,; a \leq x \leq b\}$.

Uvedené množiny nazýváme po řadě **otevřený interval**, **zleva uzavřený interval**, **zprava uzavřený interval** a **uzavřený interval**. Všechny tyto intervaly jsou **omezené**. Někdy používáme také značení $(a, a) = \emptyset$, $\langle a, b\rangle = \{a\}$.

Označení (Neomezené intervaly)**.** Pro $a \in \mathbb{R}$, píšeme:

- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R}\,; x < a\}$,
- $(-\infty, a\rangle := \{x \in \mathbb{R}\,; x \leq a\}$,
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}\,; x > a\}$,
- $\langle a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R}\,; x \geq a\}$.
- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$

Všechny tyto intervaly jsou **neomezené**.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže a je horní závorou množiny M a přitom $a \in M$. Analogicky definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M. Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max M$ a $\min M$.

Minimum a maximum dané množiny reálných čísel nemusí existovat: $(0, 1)$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in M :\ x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G\, \exists x \in M :\ x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M.

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Má-li množina M supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\sup M$.

III. Axiom suprema

- Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $g \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in M :\ x \geq g$,
- $\forall g' \in \mathbb{R},\ g' > g\, \exists x \in M :\ x < g'$,

nazýváme **infimem** množiny M.

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Má-li množina M infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\inf M$.

Věta 1.3. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M.*

Poznámka.
- Klademe $\sup M := +\infty$ pro shora neomezenou množinu, a $\inf M := -\infty$ pro zdola neomezenou množinu.
- Klademe $\sup \emptyset := -\infty$ a $\inf \emptyset := +\infty$.

Věta 1.4 (Základní nerovnosti mezi reálnými čísly)**.** *1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -2$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí tzv.* ***Bernoulliho nerovnost***

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx\,.$$

2. *Pro všechna reálná čísla $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ platí tzv.* ***Cauchy-Schwarzova nerovnost***

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big)^2 \le \sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} {b_j}^2 \,.$$

3. *Pro všechna* ***nezáporná*** *reálná čísla $a_1, \dots, a_n$ platí tzv.* ***A-G (aritmeticko-geometrická) nerovnost***

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \,.$$

1.4 Komplexní čísla

Množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ definujeme takto:

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\} \text{ kde } i^2 = -1 \,.$$

Nechť $x = a + bi \in \mathbb{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x.

Absolutní hodnotou komplexního čísla $x = a + bi$ rozumíme číslo$|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Na $\mathbb{C}$ definujeme obvyklým způsobem sčítání, odčítání a násobení komplexních čísel:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + i(c \pm d)$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Komplexně sdruženým číslem k $x = a+bi$ rozumíme číslo $\overline{x} = a-bi$; Platí $x\,\overline{x} = |x|^2 \in \mathbb{R}$, s pomocí čehož lze dělení komplexních čísel převést na násobení:

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{1}{c^2 + d^2}(a + bi)(c - di)\\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \,.\end{aligned}$$

1.5 Mohutnost množin

Definice.

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.
- Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B.
- Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy $A \preceq B$ a neplatí $A \approx B$.

Definice. Řekneme, že množina A je **konečná**, jestliže je buď $A = \emptyset$ nebo existuje $n \in N$ takové, že platí $A \approx \{1, \dots, n\}$.

Řekneme, že množina A je **spočetná**, jestliže platí $A \approx \mathbb{N}$.

Řekneme, že množina A je **nespočetná**, jestliže A není ani konečná ani spočetná.

Tvrzení 1.5. *Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ jsou spočetné, množiny $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ jsou nespočetné.*

1.6 Posloupnosti a jejich limity

Definice. Nechť A je neprázdná množina. Zobrazení přiřazující každému přirozenému číslu n prvek a_n z množiny A nazýváme **posloupnost prvků množiny** A. Prvek a_n nazveme n**-tým členem** této posloupnosti. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Příklad. Posloupnosti zadané

- explicitně: $a_n := (1 + 1/n)^n$;
- popisem: $a_n :=$ n-té prvočíslo;
- rekurentně: $a_1 = a_2 := 1$, $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n \ \forall n \in N$.
- $\ldots$

Poznámka. Posloupností budeme nadále až do odvolání rozumět (nekonečnou) posloupnost reálných čísel.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \le a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \ge a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

Definice. Řekneme, že posloupnost (reálných čísel) $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Poznámka. Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, $A \in \mathbb{R}$. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 : \ |a_n - A| < K\varepsilon,$$

potom $\lim a_n = A$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty \equiv \infty$, jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 : \ a_n \ge L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0 : \ a_n \le K.$$

Věta 1.6 (jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Definice. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbb{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.Podobně píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim a_n = \infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim a_n = -\infty$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Není-li posloupnost konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Věta 1.7. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 1.8. *Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, pak také $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ nazýváme **hromadnou hodnotou** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Rozšířená reálná osa: $\mathbb{R}^\star := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

Uspořádání:

- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: $\quad -\infty < a$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$: $\quad a < +\infty$

Absolutní hodnota:

- $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$

Sčítání a odčítání:

- $-(+\infty) = -\infty, \qquad +(-\infty) = -\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R}$: $\quad -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R}$: $\quad +\infty + a = a + (+\infty) = +\infty$,
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \qquad (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

Násobení a dělení:

- $\forall a \in \mathbb{R}^\star$, $a > 0$: $\quad a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R}^\star$, $a < 0$: $\quad a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$,
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$

NEDEFINUJEME:

- $(-\infty) + (+\infty)$,
- $0 \cdot (\pm\infty)$,
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,
- $\frac{\text{cokoli}}{0}$

Věta 1.9 (aritmetika limit). *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^\star$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^\star$. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 1.10. *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 1.11. *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^\star$. *Potom* $\lim |a_n| = |A|$.

Věta 1.12 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^\star$.

(i) Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) Nechť $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 1.13 (o dvou strážnících)**.** *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti splňující:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq b_n$,

(ii) existují $\lim a_n$, $\lim b_n$, *a navíc* $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

Poznámka. Pokud existuje $\lim a_n = \infty$, není nutné uvažovat žádnou posloupnost $\{b_n\}$ a tvrzení věty zůstává v platnosti. Podobně je tomu v případě $\lim b_n = -\infty$, kdy "nepotřebujeme" posloupnost $\{a_n\}$.

Věta 1.14 (Limita monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Tvrzení 1.15.

- *Pro* $a > 0$ *je* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.
- *Platí* $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.
- *Posloupnost* $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *je neklesající a shora omezená; posloupnost* $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *je nerostoucí a zdola omezená, přičemž existují* $\lim a_n = \lim b_n$. *Tuto společnou limitní hodnotu označujeme* $e \approx 2.718\,281\,828\ldots$.

Věta 1.16. *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^\star$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *že pro každé* $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim a_n/b_n = \infty$.

1.7 Hlubší vlastnosti posloupností

Poznámka (Komplexní případ).

- Zobrazení přiřazující každému přirozenému číslu n prvek $a_n \in \mathbb{C}$ nazveme komplexní posloupností. Evidentně $\{a_n\}$ je komplexní posloupnost právě tehdy, když existují reálné posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ takové, že $a_n = x_n + iy_n$ pro všechna přirozená n.
- Pro komplexní posloupnost nedefinujeme (nemají smysl) pojmy jako "rostoucí", "klesající", apod., ale také pojem "shora resp. zdola omezená" posloupnost. Řekneme, že komplexní posloupnost $\{a_n\}$ je **omezená**, pokud existuje $K > 0$ taková, že $|a_n| \leq K$ pro všechna přirozená n.

Poznámka (Komplexní limita).

- Je-li $a_n = x_n + iy_n$ komplexní posloupnost, a existují $\lim x_n$, $\lim y_n$ **vlastní**, klademe $\lim a_n = \lim x_n + i \lim y_n$. Výrazy tvaru "$a \pm i\infty$", "$\pm\infty \pm ib$", resp. "$\pm\infty \pm i\infty$" nedefinujeme.

Věta 1.17 (Bolzano-Weierstrassova věta)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Věta 1.18. *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje* ***Bolzano-Cauchyovu podmínku****, tj.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\ \forall m \in \mathbb{N}, m \geq n_0 :\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$