2. Funkce jedné reálné proměnné

Aplikovaná matematika I, NMAF071

M. Rokyta, KMA MFF UK

ZS 2016/17

Definice

Reálná funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Reálná funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$.

Definice

Reálná funkce f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je **klesající** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) > f(x_2)$.

Definice

Reálná funkce f jedné reálné proměnné (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je **rostoucí** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je **klesající** na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) > f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci **neklesající** (**nerostoucí**) na intervalu J.

Definice

Monotónní funkcí (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice

Monotónní funkcí (resp. **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Poznámka

Je-li funkce ryze monotónní na množině $M \subset \mathbb{R}$, je na ní prostá, ale nikoli naopak.

Definice

Nechť f je funkce. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$,

Definice

Nechť f je funkce. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická s periodou** $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $x + a \in D(f),\ x - a \in D(f)$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Řekneme, že funkce f je

- **shora omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- **zdola omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- **omezená** na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- **konstantní** na M, jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** a jako $\mathcal{U}^{\varepsilon}(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** a jako $\mathcal{U}^\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$,
- **prstencové (redukované) okolí bodu** a jako $\mathcal{P}^\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$.

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** *a* jako $\mathcal{U}^\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$,
- **prstencové (redukované) okolí bodu** *a* jako $\mathcal{P}^\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$.

Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$\mathcal{P}^\varepsilon(+\infty) = \mathcal{U}^\varepsilon(+\infty) = (1/\varepsilon, +\infty),$$

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **okolí bodu** *a* jako $\mathcal{U}^\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$,
- **prstencové (redukované) okolí bodu** *a* jako $\mathcal{P}^\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$.

Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$\mathcal{P}^\varepsilon(+\infty) = \mathcal{U}^\varepsilon(+\infty) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$\mathcal{P}^\varepsilon(-\infty) = \mathcal{U}^\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^\star$**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : \; f(x) \in \mathcal{U}^\varepsilon(A).$$

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Definice

Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^\star$ je **limitou funkce f v bodě** $a \in \mathbb{R}^\star$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : \; f(x) \in \mathcal{U}^\varepsilon(A).$$

Píšeme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Poznámka

Limita je tzv. lokální pojem. Rozmyslete si následující vlastnosti:

- Pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{P}^{\delta}(a)$, potom $\lim_{x \to a} f(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{x \to a} g(x)$. V tom případě se obě limity rovnají.

Poznámka

Limita je tzv. lokální pojem. Rozmyslete si následující vlastnosti:

- Pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{P}^{\delta}(a)$, potom $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{x\to a} g(x)$. V tom případě se obě limity rovnají.
- Hodnota $f(a)$, dokonce ani to, jestli funkce f je vůbec v bodě a definována, nemá žádný vliv na existenci či velikost hodnoty $A := \lim_{x\to a} f(x)$. Rozhoduje pouze chování f na prstencovém okolí $\mathcal{P}^{\delta}(a)$ bodu a.

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** a jako $\mathcal{U}_+^\varepsilon(a) = \langle a, a + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** a jako $\mathcal{U}_+^\varepsilon(a) = \langle a, a + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** a jako $\mathcal{U}_-^\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a\rangle$,

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** a jako $\mathcal{U}_{+}^{\varepsilon}(a) = \langle a, a + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** a jako $\mathcal{U}_{-}^{\varepsilon}(a) = (a - \varepsilon, a\rangle$,
- **pravé prstencové okolí bodu** a jako $\mathcal{P}_{+}^{\varepsilon}(a) = (a, a + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- **pravé okolí bodu** a jako $\mathcal{U}_+^\varepsilon(a) = \langle a, a + \varepsilon)$,
- **levé okolí bodu** a jako $\mathcal{U}_-^\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a\rangle$,
- **pravé prstencové okolí bodu** a jako $\mathcal{P}_+^\varepsilon(a) = (a, a + \varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** a jako $\mathcal{P}_-^\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a)$.

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $\mathcal{U}_-^\varepsilon(+\infty) = (1/\varepsilon, +\infty)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $\mathcal{U}_-^\varepsilon(+\infty) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $\mathcal{U}_+^\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $\mathcal{U}_{-}^{\varepsilon}(+\infty) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $\mathcal{U}_{+}^{\varepsilon}(-\infty) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $\mathcal{P}_{-}^{\varepsilon}(+\infty) = \mathcal{U}_{-}^{\varepsilon}(+\infty)$,

Definice

Dále definujeme

- **levé okolí bodu** $+\infty$ jako $\mathcal{U}^{\varepsilon}_{-}(+\infty) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- **pravé okolí bodu** $-\infty$ jako $\mathcal{U}^{\varepsilon}_{+}(-\infty) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- **levé prstencové okolí bodu** $+\infty$ jako $\mathcal{P}^{\varepsilon}_{-}(+\infty) = \mathcal{U}^{\varepsilon}_{-}(+\infty)$,
- **pravé prstencové okolí bodu** $-\infty$ jako $\mathcal{P}^{\varepsilon}_{+}(-\infty) = \mathcal{U}^{\varepsilon}_{+}(-\infty)$.

Definice

Nechť $A \in \mathbb{R}^\star$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in \mathcal{P}_+^\delta(a) : \; f(x) \in \mathcal{U}^\varepsilon(A).$$

Píšeme $\lim_{x \to a+} f(x) = A$.

Definice

Nechť $A \in \mathbb{R}^\star$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}^\delta_+(a) : \; f(x) \in \mathcal{U}^\varepsilon(A).$$

Píšeme $\lim_{x\to a+} f(x) = A$.
Analogicky definujeme pojem **limity zleva** v bodě $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ a píšeme $\lim_{x\to a-} f(x) = A$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $a \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $a \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$.

Definice

Řekneme, že funkce f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ **spojitá zprava** (resp. **zleva**), jestliže $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ (resp. $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$).

Věta 2.2

- *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^\star$. *Pak* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, *právě když* $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$.

Věta 2.2

- *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^\star$. *Pak* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, *právě když* $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$.
- *Funkce f je v bodě a spojitá, právě když je spojitá v bodě a zprava i zleva zároveň.*

Věta 2.3

Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^\star$. Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že f je na $\mathcal{P}^\delta(a)$ omezená.

Věta 2.3

Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^\star$. *Pak existuje* $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ *takové, že f je na* $\mathcal{P}^\delta(a)$ *omezená.*

Věta 2.4

Nechť funkce f má vlastní limitu $A \neq 0$ *v bodě* $a \in \mathbb{R}^\star$. *Pak existuje* $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ *a konstanta* $c > 0$ *takové, že* $|f(x)| > c$ *pro všechna* $x \in \mathcal{P}^\delta(a)$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^\star$ *a* $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$. Nechť $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^\star$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^\star$. Potom platí:

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 2.6

Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, *a nechť existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce g je omezená na* $\mathcal{P}^\eta(a)$.

Věta 2.6

Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$. *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, *a nechť existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je omezená na* $\mathcal{P}^\eta(a)$. *Pak* $\lim_{x\to a}(f(x)\,g(x)) = 0$.

Věta 2.6

Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, a nechť existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je omezená na $\mathcal{P}^\eta(a)$. Pak $\lim_{x\to a}(f(x)\,g(x)) = 0$.

Věta 2.7

Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$. Nechť $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^\star$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $\mathcal{P}^\eta(a)$, pak $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = +\infty$.

Věta 2.6

Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$*. Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$*, a nechť existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je omezená na* $\mathcal{P}^\eta(a)$*. Pak* $\lim_{x\to a}(f(x)\,g(x)) = 0$*.*

Věta 2.7

Nechť $a \in \mathbb{R}^\star$*. Nechť* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$*,* $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^\star$ *a* $A > 0$*. Jestliže existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je kladná na* $\mathcal{P}^\eta(a)$*, pak* $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = +\infty$*. (A obdobně pro* $A < 0$*,* g *zápornou atd.)*

Věta 2.8 ("o záměně 0 a ∞")

Platí:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}^\star \iff \lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = A \in \mathbb{R}^\star ,$$

Věta 2.8 ("o záměně 0 a ∞")

Platí:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}^\star \iff \lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = A \in \mathbb{R}^\star\,,$$

a podobně

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = B \in \mathbb{R}^\star \iff \lim_{x\to 0-} f\left(\frac{1}{x}\right) = B \in \mathbb{R}^\star\,.$$

Věta 2.9 (o srovnání)

Mějme $a \in \mathbb{R}^\star$.

(i) Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x).$$

Pak existuje prstencové okolí $\mathcal{P}^\delta(a)$ *takové, že platí*

$$\forall x \in \mathcal{P}^\delta(a): \ f(x) > g(x).$$

(ii) Nechť existuje prstencové okolí $\mathcal{P}^{\delta}(a)$ takové, že platí

$$\forall x \in \mathcal{P}^{\delta}(a): \; f(x) \leq g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

(iii) (o dvou strážnících) Nechť na nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}^{\delta}(a)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Potom existuje rovněž $\lim_{x\to a} h(x)$ a všechny tři limity jsou si rovny.

Věta 2.10 (limita složené funkce)

Nechť $a, D, A \in \mathbb{R}^\star$, $\lim_{x\to a} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

Věta 2.10 (limita složené funkce)

Nechť $a, D, A \in \mathbb{R}^\star$, $\lim_{x\to a} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}^\eta(a): \; g(x) \neq D$,

Věta 2.10 (limita složené funkce)

Nechť $a, D, A \in \mathbb{R}^\star$, $\lim_{x\to a} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}^\eta(a): \; g(x) \neq D$,

(P2) *f je spojitá v D.*

Věta 2.10 (limita složené funkce)

Nechť $a, D, A \in \mathbb{R}^\star$, $\lim_{x\to a} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}^\eta(a): \ g(x) \neq D$,

(P2) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to a} f(g(x)) = A$.

Věta 2.10 (limita složené funkce)

Nechť $a, D, A \in \mathbb{R}^\star$, $\lim_{x\to a} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\, \forall x \in \mathcal{P}^\eta(a): \; g(x) \neq D$,

(P2) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to a} f(g(x)) = A$.

Věta 2.10 (limita složené funkce)

Nechť $a, D, A \in \mathbb{R}^\star$, $\lim_{x\to a} g(x) = D$, $\lim_{y\to D} f(y) = A$ *a je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P1) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in \mathcal{P}^\eta(a):\ g(x) \neq D$,

(P2) *f je spojitá v D.*

Potom $\lim_{x\to a} f(g(x)) = A$.

Poznámka

- Jsou-li funkce f, g spojité (případně spojité zleva, zprava) v bodě $a \in \mathbb{R}$, jsou v bodě a spojité (případně spojité zleva, zprava) i funkce $f \pm g$, fg, a pokud je $g(a) \neq 0$, pak i funkce f/g.

Poznámka

- Jsou-li funkce f, g spojité (případně spojité zleva, zprava) v bodě $a \in \mathbb{R}$, jsou v bodě a spojité (případně spojité zleva, zprava) i funkce $f \pm g$, fg, a pokud je $g(a) \neq 0$, pak i funkce f/g.
- Nechť $a \in \mathbb{R}$, funkce g je spojitá v a, funkce f je spojitá v $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je spojitá v a.

Věta 2.11 (limita monotónní funkce)

Nechť funkce f je monotónní na (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^\star$. Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.

Poznámka (komplexní funkce)

- **Komplexní funkce** f **jedné reálné proměnné** (dále jen **komplexní funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel. Evidentně $f : M \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce právě tehdy, když existují reálné funkce $g, h : M \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + ih(x)$ pro všechna $x \in M$.

Poznámka (komplexní funkce)

- **Komplexní funkce** f **jedné reálné proměnné** (dále jen **komplexní funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel. Evidentně $f : M \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce právě tehdy, když existují reálné funkce $g, h : M \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + ih(x)$ pro všechna $x \in M$.
- Pro komplexní funkci nedefinujeme (nemají smysl) pojmy jako "rostoucí", "klesající", apod., ale také pojem "shora resp. zdola omezená" funkce.

Poznámka (komplexní funkce)

- **Komplexní funkce** f **jedné reálné proměnné** (dále jen **komplexní funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel. Evidentně $f : M \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce právě tehdy, když existují reálné funkce $g, h : M \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + ih(x)$ pro všechna $x \in M$.
- Pro komplexní funkci nedefinujeme (nemají smysl) pojmy jako "rostoucí", "klesající", apod., ale také pojem "shora resp. zdola omezená" funkce. Řekneme, že komplexní funkce f je **omezená na** $M \subset \mathbb{R}^\star$, pokud existuje $K > 0$ taková, že $|f(x)| \leq K$ pro všechna $x \in M$.

Poznámka (komplexní limita, spojitost)

- Je-li $f(x) = g(x) + ih(x)$, $f : M \to \mathbb{C}$ komplexní funkce, $a \in M$, a existují $\lim_{x\to a} g(x)$, $\lim_{x\to a} h(x)$ **vlastní**, klademe $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) + i \lim_{x\to a} h(x)$.

Poznámka (komplexní limita, spojitost)

- Je-li $f(x) = g(x) + ih(x)$, $f : M \to \mathbb{C}$ komplexní funkce, $a \in M$, a existují $\lim_{x\to a} g(x)$, $\lim_{x\to a} h(x)$ **vlastní**, klademe $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) + i \lim_{x\to a} h(x)$. Podobně pro jednostranné limity.

Poznámka (komplexní limita, spojitost)

- Je-li $f(x) = g(x) + ih(x)$, $f : M \to \mathbb{C}$ komplexní funkce, $a \in M$, a existují $\lim_{x\to a} g(x)$, $\lim_{x\to a} h(x)$ **vlastní**, klademe $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) + i \lim_{x\to a} h(x)$. Podobně pro jednostranné limity. Výrazy tvaru "$a \pm i\infty$", "$\pm\infty \pm ib$", resp. "$\pm\infty \pm i\infty$" nedefinujeme.

Poznámka (komplexní limita, spojitost)

- Je-li $f(x) = g(x) + ih(x)$, $f : M \to \mathbb{C}$ komplexní funkce, $a \in M$, a existují $\lim_{x\to a} g(x)$, $\lim_{x\to a} h(x)$ **vlastní**, klademe $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) + i \lim_{x\to a} h(x)$. Podobně pro jednostranné limity. Výrazy tvaru "$a \pm i\infty$", "$\pm\infty \pm ib$", resp. "$\pm\infty \pm i\infty$" nedefinujeme.
- Je-li $f(x) = g(x) + ih(x)$, $f : M \to \mathbb{C}$ komplexní funkce, $a \in M$, a jsou-li g, h spojité v a (resp. spojité v a zprava, zleva), řekneme, že f je spojitá v a (resp. spojité v a zprava, zleva).

Věta 2.12 (Heineho o limitě)

Nechť $C \in \mathbb{R}^\star$ (resp. $C \in \mathbb{C}$) a reálná (resp. komplexní) funkce f je definována (alespoň) na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^\star$. Pak výroky (i) a (ii) jsou ekvivalentní:

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = C$

(ii) *Pro každou posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *splňující*

- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,
- $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n \neq a$,

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = C$.

Věta 2.13 (Heineho o spojitosti)

Nechť reálná (resp. komplexní) funkce f je definována (alespoň) na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^\star$. Pak výroky (i) a (ii) jsou ekvivalentní:

(i) *f je spojitá v a*

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující*

- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Definice (funkce spojitá na intervalu)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (tj. obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice (funkce spojitá na intervalu)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (tj. obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,

Definice (funkce spojitá na intervalu)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (tj. obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

Věta 2.14 (zavedení logaritmu)

Existuje právě jedna funkce (značíme ji ln *a nazýváme ji* **přirozeným logaritmem**), *která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D(\ln) = (0, +\infty)$ *a na tomto intervalu je* ln *rostoucí,*

(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty): \ \ln xy = \ln x + \ln y,$

(L3) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Věta 2.14 (zavedení logaritmu)

Existuje právě jedna funkce (značíme ji ln *a nazýváme ji* **přirozeným logaritmem**), *která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D(\ln) = (0, +\infty)$ *a na tomto intervalu je* ln *rostoucí,*

(L2) $\forall x, y \in (0, +\infty): \ \ln xy = \ln x + \ln y,$

(L3) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Poznámka: vztahu (L3) se někdy říká "základní limita pro logaritmus".

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci ln. Budeme ji značit symbolem $\exp(x)$.

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci ln. Budeme ji značit symbolem $\exp(x)$.

Základní limita pro exponenciální funkci (lze odvodit z (L3)):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1 \,.$$

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci ln. Budeme ji značit symbolem $\exp(x)$.

Základní limita pro exponenciální funkci (lze odvodit z (L3)):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1\,.$$

Lze postupovat i tak, že se nejprve definuje exponenciální funkce (zformuluje se věta o existenci a jednoznačnosti exponencální funkce), a poté se funkce ln definuje jako její inverzní funkce.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. **Obecnou mocninu** a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. **Obecnou mocninu** a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

Poznámka

Tedy pro číslo $e \in \mathbb{R}$ takové, že $\ln e = 1$, platí

$$e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)\,.$$

Věta 2.15 (zavedení funkcí sinus a kosinus)

Existuje právě jedno kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a právě jedna dvojice funkcí **sinus** (sin) *a* **kosinus** (cos)*, které mají následující vlastnosti:*

G1) $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$,

G2) *pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$$
$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x,$$

G3) sin *je rostoucí na* $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$, $\sin 0 = 0$, $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$,

G4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Poznámka

Základní limity (shrnutí):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,,$$

Poznámka

Základní limity (shrnutí):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Definice

Funkci **tangens** značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D(\operatorname{tg}) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci **kotangens**, která je definována na množině $D(\operatorname{cotg}) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Definice (zavedení cyklometrických funkcí)

Cyklometrickými funkcemi budeme rozumět funkce **arkussinus** (arcsin), **arkuskosinus** (arccos), **arkustangens** (arctg), **arkuskotangens** (arccotg), které jsou definovány takto

$$\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1},\\
\arccos &= \left(\cos\big|_{\langle 0, \pi\rangle}\right)^{-1},\\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1},\\
\operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}\big|_{(0, \pi)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Tvrzení 2.16 (vlastnosti cyklometrických funkcí)

Funkce arcsin, arccos, arctg, arccotg *jsou ryze monotónní (tedy prosté) funkce na svých definičních oborech a platí:*

$$\begin{aligned}
&\text{arcsin } \textit{roste na } \langle -1, 1\rangle\,, && \arcsin(\langle -1,1\rangle) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle\,,\\
&\text{arccos } \textit{klesá na } \langle -1, 1\rangle\,, && \arccos(\langle -1,1\rangle) = \langle 0, \pi\rangle\,,\\
&\text{arctg } \textit{roste na } \mathbb{R}\,, && \operatorname{arctg}(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\,,\\
&\text{arccotg } \textit{klesá na } \mathbb{R}\,, && \operatorname{arccotg}(\mathbb{R}) = (0, \pi)\,.
\end{aligned}$$

Definice (hyperbolické funkce)

Hyperbolickými funkcemi budeme rozumět funkce hyperblický sinus (sinh), hyperbolický kosinus (cosh), hyperbolický tangens (tgh) a hyperbolický kotangens (cotgh), které jsou definovány takto

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad D(\sinh) = \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad D(\cosh) = \mathbb{R},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad D(\operatorname{tgh}) = \mathbb{R},$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad D(\operatorname{cotgh}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Definice (inverzní hyperbolické funkce)

Inverzními hyperbolickými funkcemi (někdy též **hyperbolometrickými funkcemi**) budeme rozumět funkce argument hyperbolického sinu (argsinh), argument hyperbolického kosinu (argcosh), argument hyperbolické tangenty (argsinh), argument hyperbolické kotangenty (argcotgh), které jsou definovány takto

$$\begin{aligned}
\operatorname{argsinh} &= (\sinh)^{-1}, \\
\operatorname{argcosh} &= (\cosh|_{\langle 0,\infty)})^{-1}, \\
\operatorname{argtgh} &= (\operatorname{tgh})^{-1}, \\
\operatorname{argcotgh} &= (\operatorname{cotgh})^{-1}.
\end{aligned}$$

Tvrzení 2.17 (vlastnosti hyperbolometrických funkcí I)

Hyperbolometrické (inverzní hyperbolické) funkce jsou prosté na svých definičních oborech, přičemž

- argsinh *roste na* $D(\mathrm{argsinh}) = \mathbb{R}$, *a* $\mathrm{argsinh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
- argcosh *roste na* $D(\mathrm{argcosh}) = \langle 1, +\infty)$, *a* $\mathrm{argcosh}(\langle 1, +\infty)) = \langle 0, +\infty)$,
- argtgh *roste na* $D(\mathrm{argtgh}) = (-1, 1)$, *a* $\mathrm{argtgh}((-1, 1)) = \mathbb{R}$,
- argcotgh *klesá na* $(-\infty, -1)$ *a na* $(1, +\infty)$ *(ale nikoli na celém* $D(\mathrm{argcotgh}) = \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle$*), a* $\mathrm{argcotgh}(\mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle) = \mathbb{R}$.

Poznámka (vlastnosti hyperbolometrických funkcí II)

Existuje vyjádření hyperbolometrických funkcí pomocí funkce ln (srovnejte to se skutečností, že hyperbolické funkce jsou definovány pomocí funkce exp). Platí:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{argsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}), && x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{argcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), && x \in \langle 1, +\infty),\\
\operatorname{argtgh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, && x \in (-1, 1),\\
\operatorname{argcotgh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, && x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle.
\end{aligned}
$$

Věta 2.18

Funkce log, exp, sin, cos, tg, cotg, arcsin, arccos, arctg, arccotg, sinh, cosh, tgh, cotgh, argsinh, argcosh, argtgh, argcotgh *jsou spojité na svých definičních oborech.*

Věta 2.18

Funkce log, exp, sin, cos, tg, cotg, arcsin, arccos, arctg, arccotg, sinh, cosh, tgh, cotgh, argsinh, argcosh, argtgh, argcotgh *jsou spojité na svých definičních oborech.*

Poznámka

Termínem **elementární funkce** budeme označovat funkce 1, x, $\exp(x)$, $\sin x$, a všechny funkce, které lze z těchto funkcí obdržet aplikováním konečného počtu následujících operací:

- sčítání, odčítání, násobení, dělení,
- skládání funkcí,
- zúžení (restrikce) funkce a vytvoření inverzní funkce.

Poznámka (komplexní exponenciála)

- Lze dokázat (například z teorie mocninných řad), že platí

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Poznámka (komplexní exponenciála)

- Lze dokázat (například z teorie mocninných řad), že platí

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

tedy

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- V tomto smyslu (tj. uvažujeme-li komplexní funkce) je tedy exponenciála základní elementární funkcí, neboť všechny goniometrické (i hyperbolické) funkce lze vyjádřit jejím prostřednictvím.

Poznámka (nedefinované výrazy v obecné mocnině)

Protože máme $a^b = \exp(b \ln a)$ (pro a>0), je výraz a^b nedefinován (i ve smyslu aritmetiky rozšířené reálné osy) právě tehdy, když je nedefinován výraz $b \ln a$,

Poznámka (nedefinované výrazy v obecné mocnině)

Protože máme $a^b = \exp(b \ln a)$ (pro a>0), je výraz a^b nedefinován (i ve smyslu aritmetiky rozšířené reálné osy) právě tehdy, když je nedefinován výraz $b \ln a$, tj. když

$$b \ln a = \text{"}0 \cdot \pm\infty\text{"} \quad \text{nebo} \quad b \ln a = \text{"} \pm \infty \cdot 0\text{"}.$$

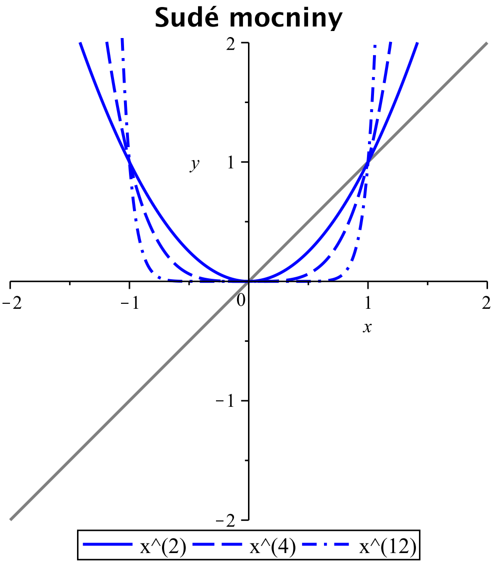
Poznámka (nedefinované výrazy v obecné mocnině)

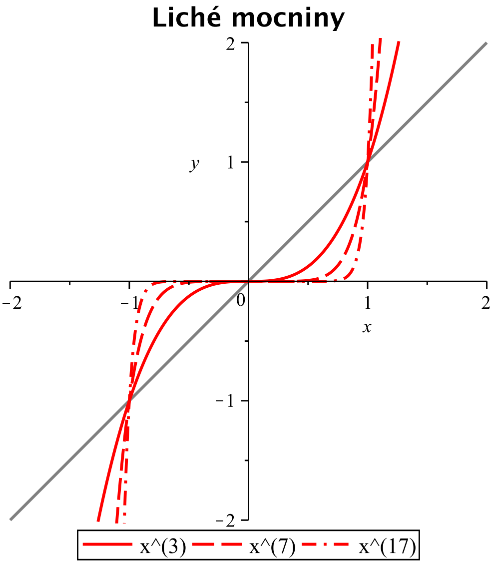
Protože máme $a^b = \exp(b \ln a)$ (pro a>0), je výraz a^b nedefinován (i ve smyslu aritmetiky rozšířené reálné osy) právě tehdy, když je nedefinován výraz $b \ln a$, tj. když

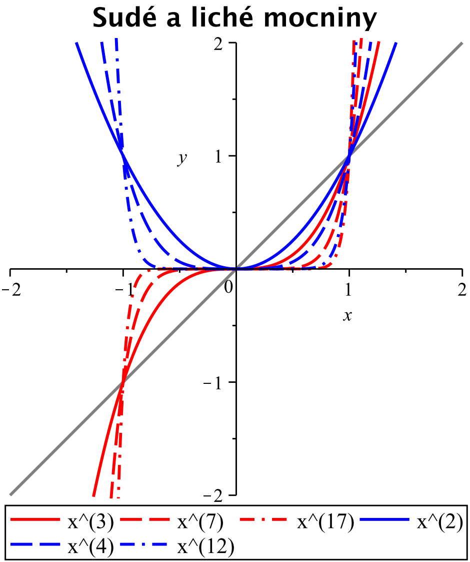
$$b \ln a = \text{"}0 \cdot \pm\infty\text{"} \quad \text{nebo} \quad b \ln a = \text{"} \pm \infty \cdot 0\text{"}.$$

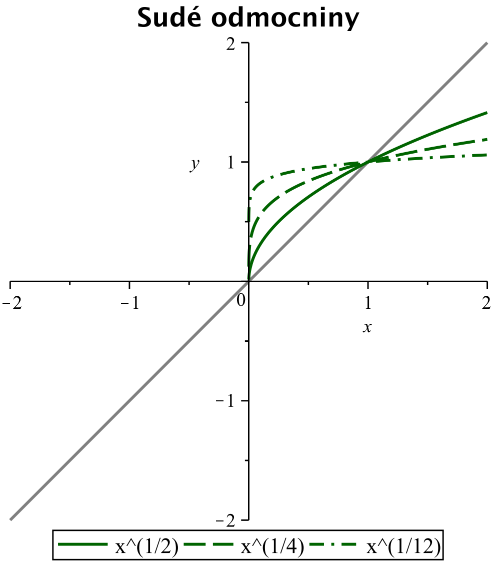
Odtud dostáváme následující výrazy v obecné mocnině, které nejsou definovány (ani ve smyslu aritmetiky rozšířené reálné osy):

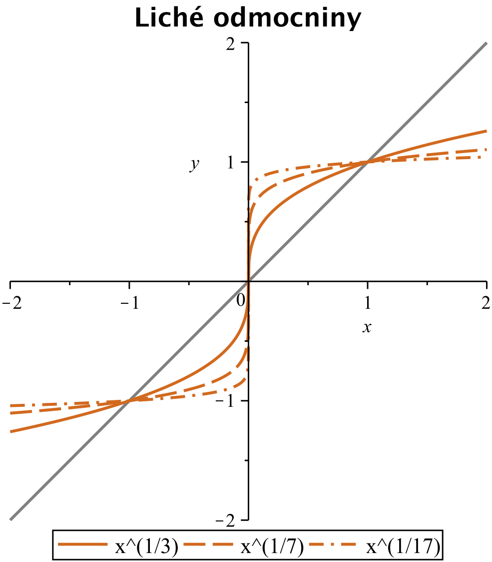
$$0^0, \qquad (\pm\infty)^0, \qquad 1^{(\pm\infty)}.$$

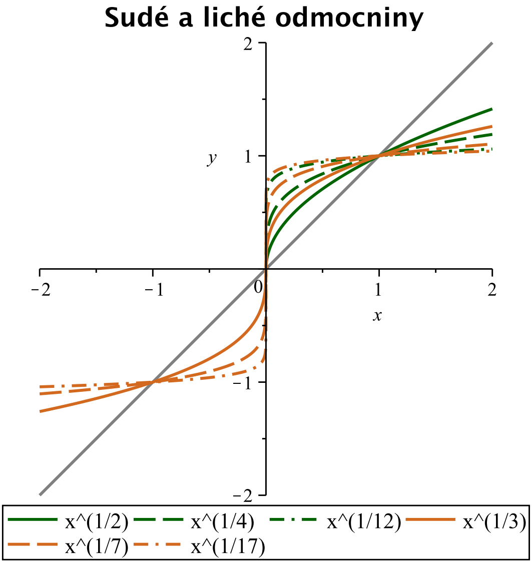

Sudé mocniny
y
x
2
1
−1
−2
−2
−1
0
1
2
x^(2)
x^(4)
x^(12)

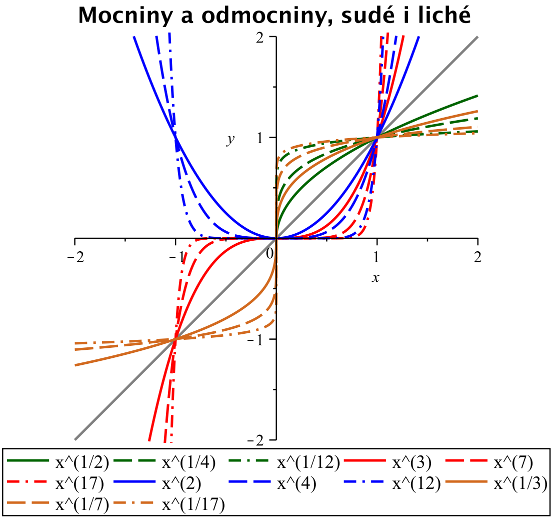

Liché mocniny
2
1
y
−1
−2
−2
−1
0
1
2
x
x^(3)
x^(7)
x^(17)


Sudé a liché mocniny
2
1
y
−1
−2
−2
−1
0
1
2
x
x^(3)
x^(7)
x^(17)
x^(2)
x^(4)
x^(12)

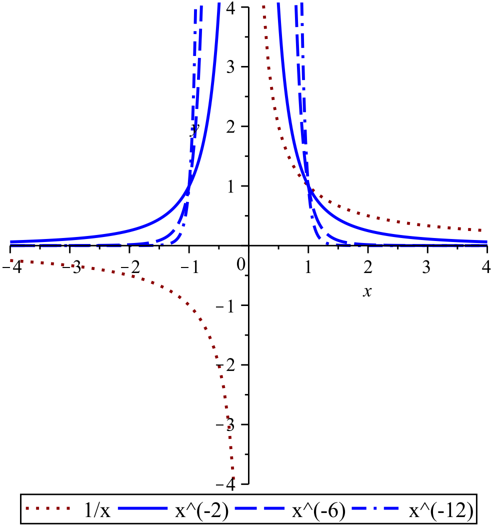

Sudé odmocniny
2
1
y
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2
x^(1/2)
x^(1/4)
x^(1/12)

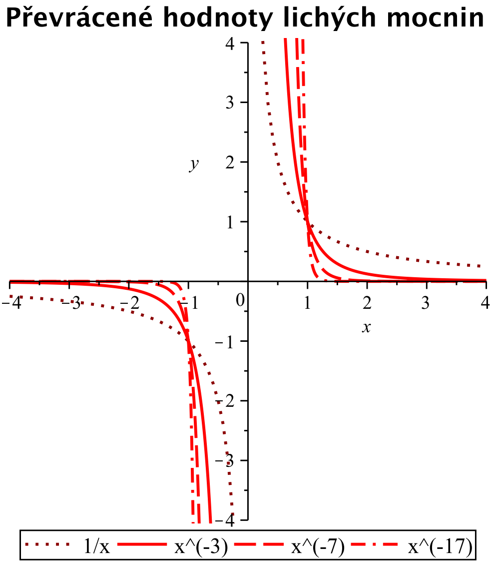

Liché odmocniny
2
1
y
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2
x^(1/3)
x^(1/7)
x^(1/17)


Sudé a liché odmocniny
2
1
y
−1
−2
−2
−1
0
1
2
x
x^(1/2)
x^(1/4)
x^(1/12)
x^(1/3)
x^(1/7)
x^(1/17)

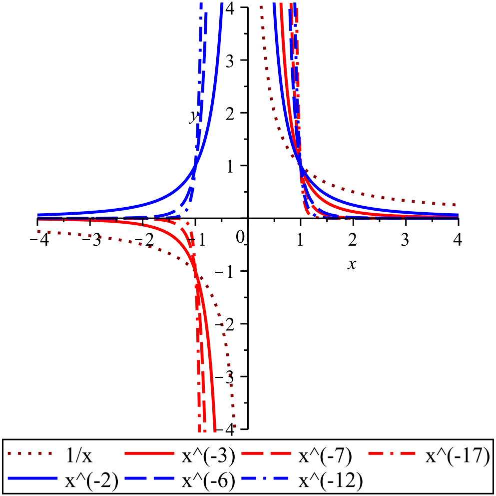

Mocniny a odmocniny, sudé i liché
2
1
y
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2
x^(1/2)
x^(1/4)
x^(1/12)
x^(3)
x^(7)
x^(17)
x^(2)
x^(4)
x^(12)
x^(1/3)
x^(1/7)
x^(1/17)

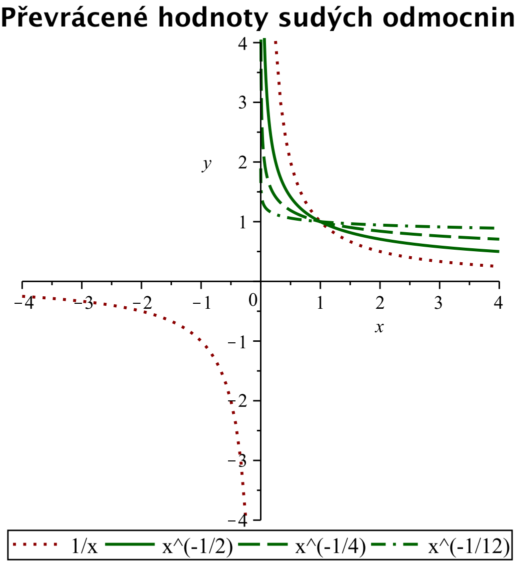
Převrácené hodnoty sudých mocnin

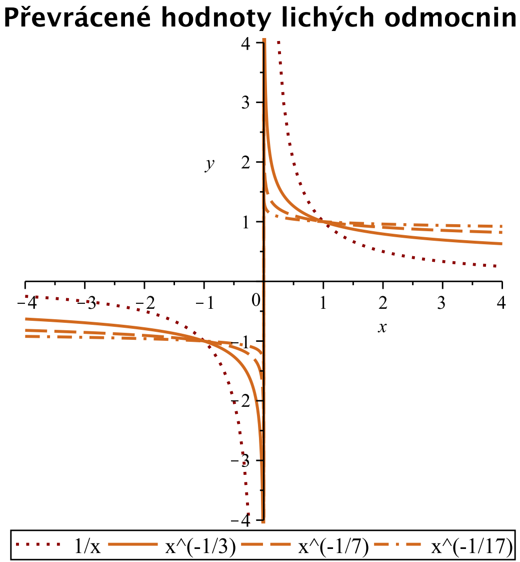


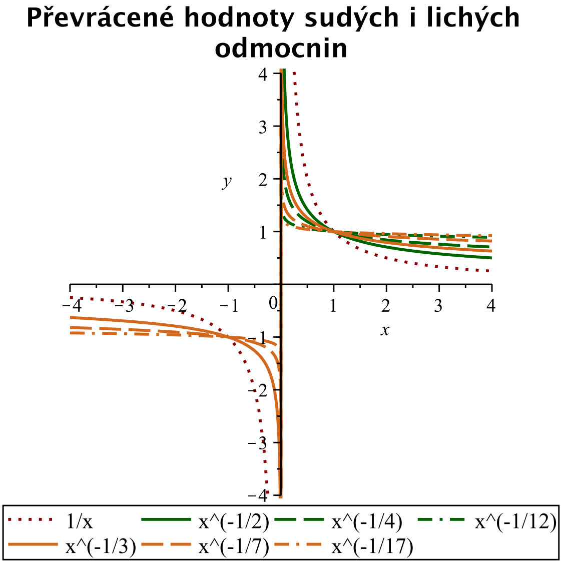

Převrácené hodnoty lichých mocnin
y
x
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
0
1/x
x^(-3)
x^(-7)
x^(-17)

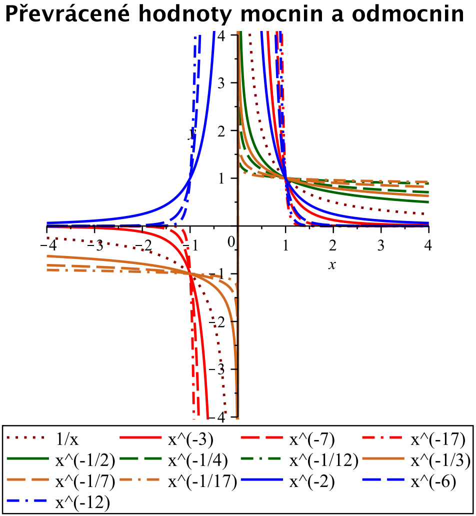
Převrácené hodnoty sudých i lichých mocnin



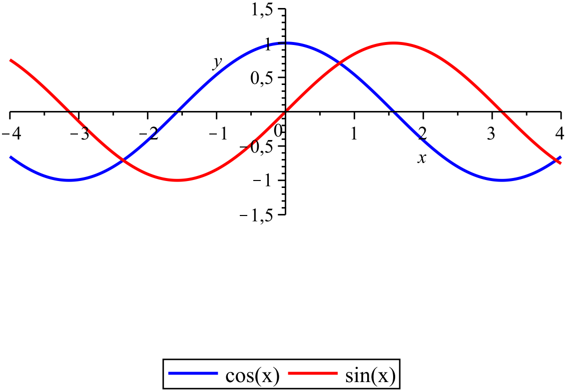

Převrácené hodnoty sudých odmocnin
y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
1/x
x^(-1/2)
x^(-1/4)
x^(-1/12)

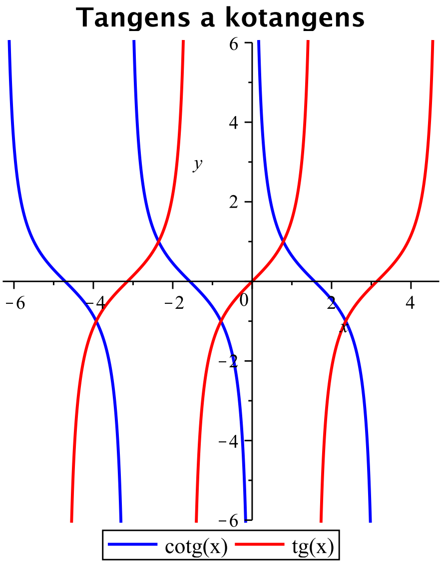

Převrácené hodnoty lichých odmocnin
y
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
x
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
1/x
x^(-1/3)
x^(-1/7)
x^(-1/17)

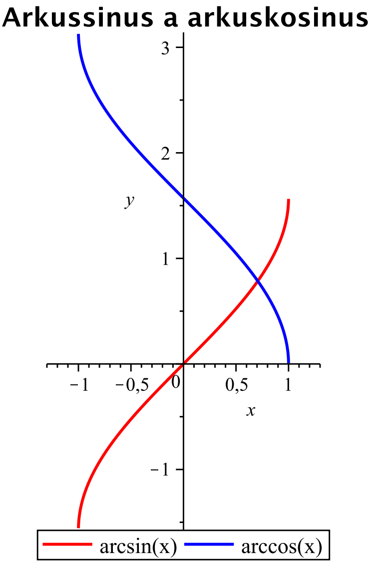

Převrácené hodnoty sudých i lichých odmocnin
y
x
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
0
1/x
x^(-1/2)
x^(-1/4)
x^(-1/12)
x^(-1/3)
x^(-1/7)
x^(-1/17)


Převrácené hodnoty mocnin a odmocnin
y
x
1/x
x^(-3)
x^(-7)
x^(-17)
x^(-1/2)
x^(-1/4)
x^(-1/12)
x^(-1/3)
x^(-1/7)
x^(-1/17)
x^(-2)
x^(-6)
x^(-12)

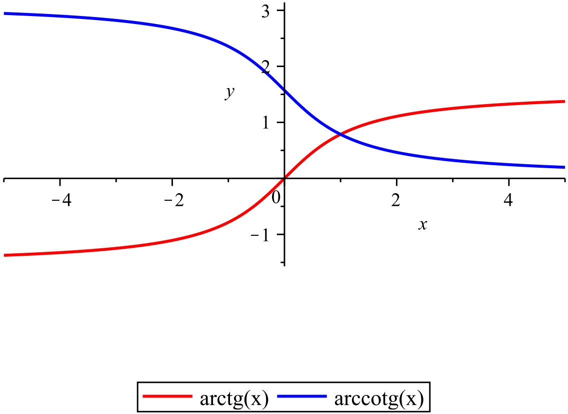
Sinus a kosinus



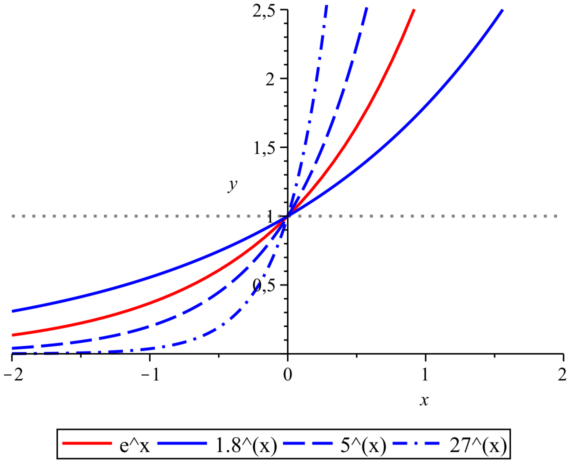

Tangens a kotangens
y
x
6
4
2
−2
−4
−6
−6
−4
−2
0
2
4
cotg(x)
tg(x)


Arkussinus a arkuskosinus
3
2
1
−1
y
−1
−0,5
0
0,5
1
x
arcsin(x)
arccos(x)

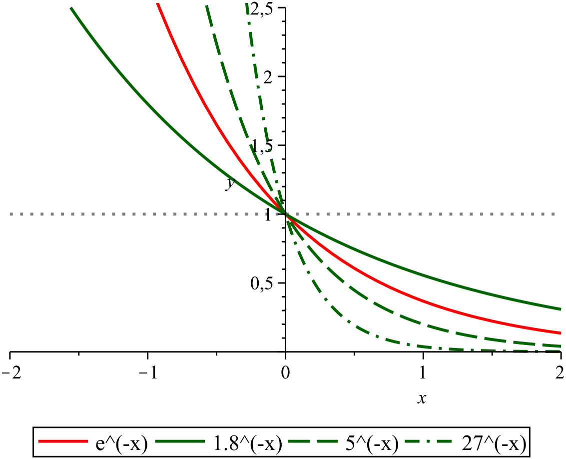
Arkustangens a arkuskotangens



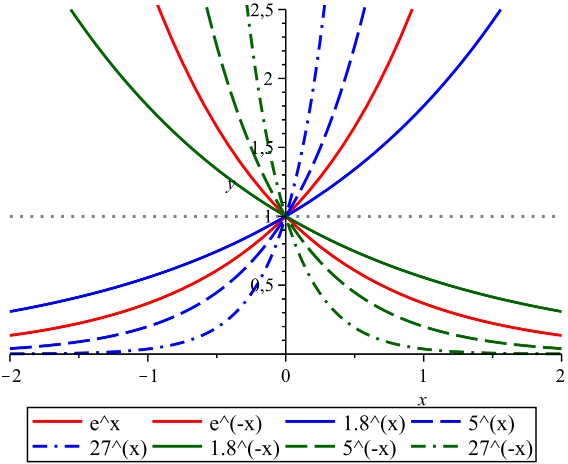
Exponenciály s kladnou mocninou

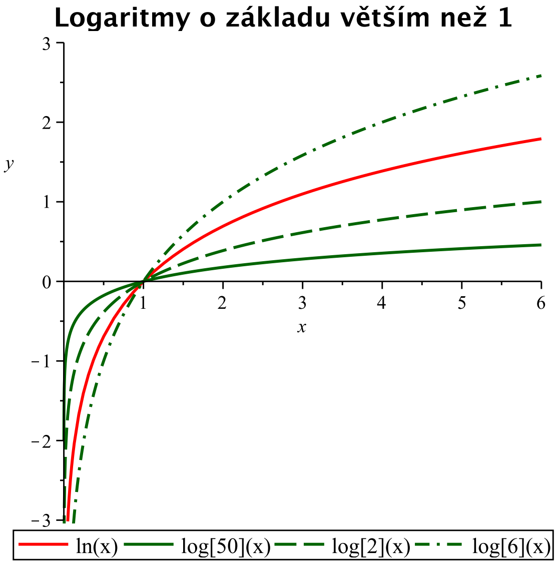


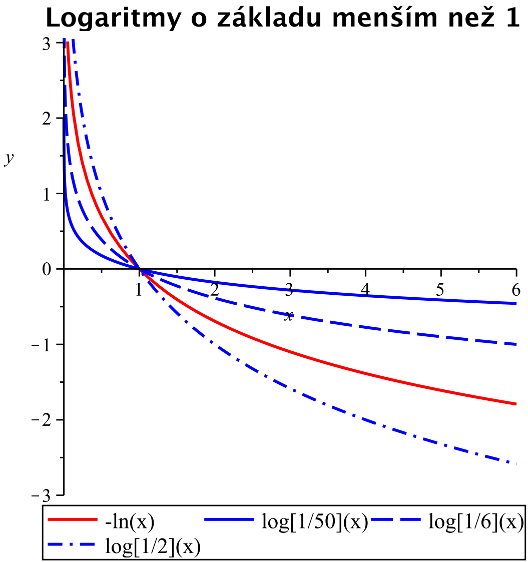
Exponenciály se zápornou mocninou

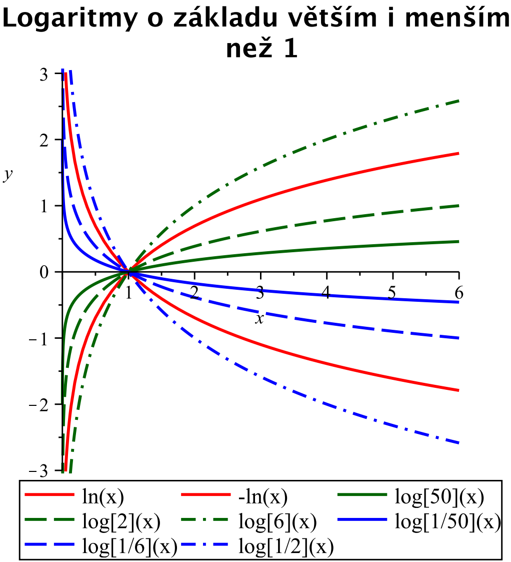


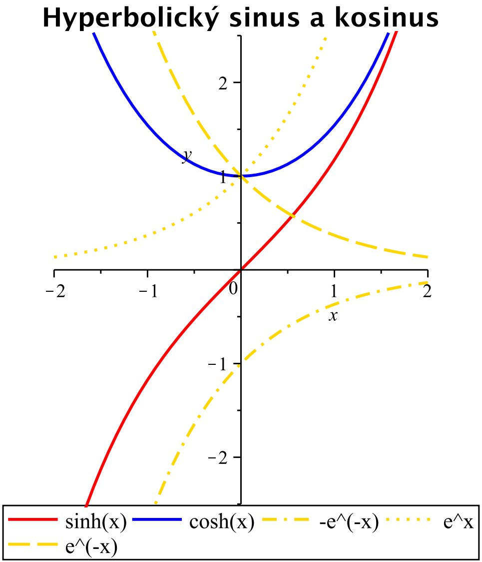
Exponenciály s kladnou i zápornou mocninou

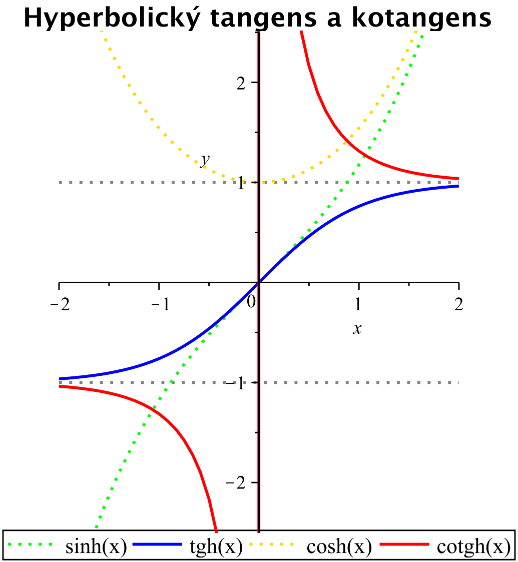



Logaritmy o základu větším než 1
3
2
1
0
−1
−2
−3
y
1
2
3
4
5
6
x
ln(x)
log[50](x)
log[2](x)
log[6](x)

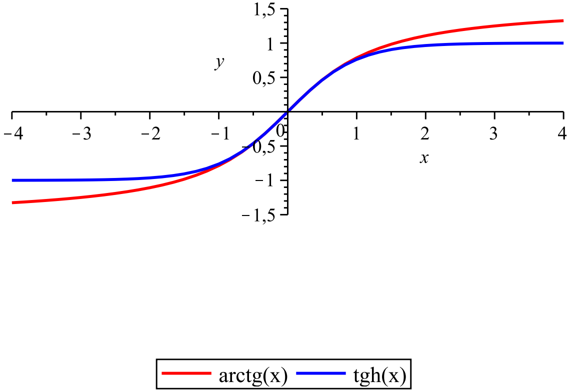

Logaritmy o základu menším než 1
y
x
3
2
1
0
−1
−2
−3
1
2
3
4
5
6
-ln(x)
log[1/50](x)
log[1/6](x)
log[1/2](x)


Logaritmy o základu větším i menším než 1
y
x
3
2
1
0
−1
−2
−3
1
2
3
4
5
6
ln(x)
-ln(x)
log[50](x)
log[2](x)
log[6](x)
log[1/50](x)
log[1/6](x)
log[1/2](x)

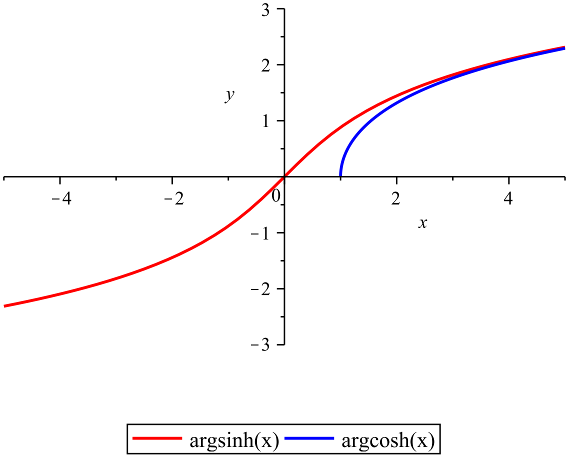

Hyperbolický sinus a kosinus
y
2
1
0
−1
−2
−2
−1
1
2
x
sinh(x)
cosh(x)
-e^(-x)
e^x
e^(-x)

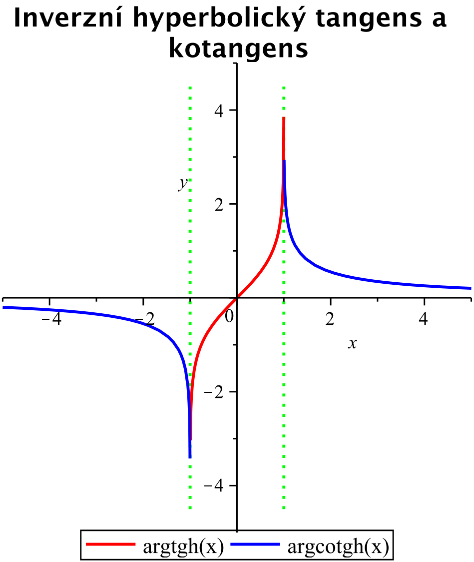

Hyperbolický tangens a kotangens
y
2
1
−1
−2
−2
−1
0
1
2
x
sinh(x)
tgh(x)
cosh(x)
cotgh(x)

Arkustangens a hyperbolický tangens

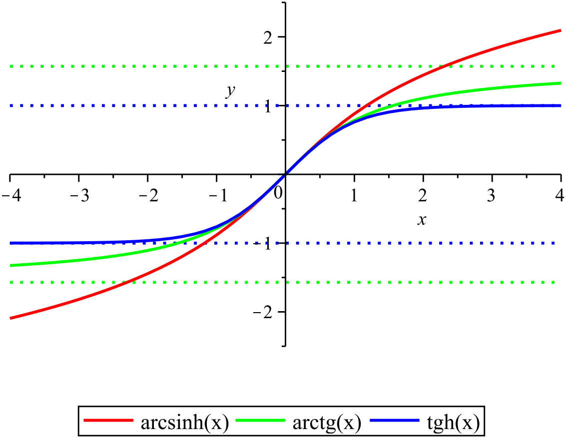


Inverzní hyperbolický sinus a kosinus




Inverzní hyperbolický tangens a kotangens
4
2
y
−2
−4
−4
−2
0
2
4
x
argtgh(x)
argcotgh(x)

Arkustangens, hyperbolický tangens, inverzní hyperbolický sinus – srovnání



Bonus: Řecká abeceda

$A,\ \alpha$	alfa	$N,\ \nu$	ný
$B,\ \beta$	béta	$\Xi,\ \xi$	ksí
$\Gamma,\ \gamma$	gamma	$O,\ o$	omikron
$\Delta,\ \delta$	delta	$\Pi,\ \pi$	pí
$E,\ \epsilon, \varepsilon$	epsílon	$P,\ \rho$	ró
$Z,\ \zeta$	(d)zéta	$\Sigma,\ \sigma$	sígma
$H,\ \eta$	éta	$T,\ \tau$	tau
$\Theta,\ \theta, \vartheta$	théta	$Y,\ \upsilon$	ypsilon
$I,\ \iota$	ióta	$\Phi,\ \varphi$	fí
$K,\ \kappa, \varkappa$	kappa	$X,\ \chi$	chí
$\Lambda,\ \lambda$	lambda	$\Psi,\ \psi$	psí
$M,\ \mu$	mý	$\Omega,\ \omega$	ómega