

3. Derivace funkce jedné reálné proměnné

Aplikovaná matematika I, NMAF071

M. Rokyta, KMA MFF UK

ZS 2016/17

Definice

Nechť f je reálná funkce, nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak

■ **derivací funkce f v bodě a** budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

Definice

Nechť f je reálná funkce, nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak

- **derivací funkce f v bodě a** budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce f v bodě a zprava** budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

analogicky definujeme **derivaci funkce f v bodě a zleva**.

Věta 3.1

Necht' funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 3.1

Necht' funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Poznámka: podobně pro derivaci zprava, zleva.

Věta 3.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace. Potom platí

$$(i) \quad (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

Věta 3.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace. Potom platí

- (i) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$
- (ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$

Věta 3.2 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace. Potom platí

- (i) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$
- (ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$
- (iii) *je-li $g(a) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 3.3 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 3.4 (derivace inverzní funkce)

Necht' funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Bud' $x_0 \in (a, b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.

Věta 3.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Bud' $x_0 \in (a, b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.

- (i) Pokud existuje (vlastní nebo nevlastní) $f'(x_0) \neq 0$, má funkce f^{-1} derivaci v bodě y_0 a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

(kde klademe $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

Věta 3.4 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Bud' $x_0 \in (a, b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.

- (i) *Pokud existuje (vlastní nebo nevlastní) $f'(x_0) \neq 0$, má funkce f^{-1} derivaci v bodě y_0 a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

(kde klademe $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

- (ii) *Je-li $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající) na (a, b) , je $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Věta 3.5 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 3.5 (l'Hospitalovo pravidlo)

(i) *Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = +\infty$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo platí i pro limitu zleva, resp. pro oboustrannou limitu.

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo platí i pro limitu zleva, resp. pro oboustrannou limitu.
- Pokud neexistuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, nelze podle l'Hospitalova pravidla nic tvrdit pro existenci nebo hodnotu limity $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Věta 3.6

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x).$$

Definice (diferenciál)

Bud' $a \in \mathbb{R}$ necht' existuje $f'(a)$ vlastní. **Diferenciálem funkce f v bodě a** nazvu lineární zobrazení

$$df(a) : h \mapsto f'(a) \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Definice (diferenciál)

Bud' $a \in \mathbb{R}$ necht' existuje $f'(a)$ vlastní. **Diferenciálem funkce f v bodě a** nazvu lineární zobrazení

$$df(a) : h \mapsto f'(a) \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Diferenciál identické funkce, tedy funkce $I(x) = x$, je proto zobrazení $dI(x) = dx$, s vlastností $dx(h) = h$.

Definice (diferenciál)

Bud' $a \in \mathbb{R}$ necht' existuje $f'(a)$ vlastní. **Diferenciálem funkce f v bodě a** nazvu lineární zobrazení

$$df(a) : h \mapsto f'(a) \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Diferenciál identické funkce, tedy funkce $I(x) = x$, je proto zobrazení $dI(x) = dx$, s vlastností $dx(h) = h$.

Podíl diferenciálů obecné funkce f a identické funkce je potom lineární zobrazení s vlastností

$$\frac{df(x)}{dx}(h) = \frac{f'(x) \cdot h}{h} = f'(x).$$

3.1 Definice a základní vztahy, diferenciál (pokrač.)

Podíl diferenciálů $\frac{df(x)}{dx}$ tedy nezávisí na proměnné h , a lze psát

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \text{resp.} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

kde zlomek vpravo chápeme jako podíl dvou diferenciálů.

3.1 Definice a základní vztahy, diferenciál (pokrač.)

Podíl diferenciálů $\frac{df(x)}{dx}$ tedy nezávisí na proměnné h , a lze psát

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \text{resp.} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

kde zlomek vpravo chápeme jako podíl dvou diferenciálů. Vztah, který dostaneme z tohoto výrazu "rozšířením dx ", tj.

$$df(x) = f'(x) dx$$

pak chápeme jako vztah mezi dvěma diferenciály: diferenciál funkce f v bodě x je $f'(x)$ -násobkem diferenciálu identity.

3.1 Definice a základní vztahy, diferenciál (pokrač.)

Podíl diferenciálů $\frac{df(x)}{dx}$ tedy nezávisí na proměnné h , a lze psát

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \text{resp.} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

kde zlomek vpravo chápeme jako podíl dvou diferenciálů. Vztah, který dostaneme z tohoto výrazu "rozšířením dx ", tj.

$$df(x) = f'(x) dx$$

pak chápeme jako vztah mezi dvěma diferenciály: diferenciál funkce f v bodě x je $f'(x)$ -násobkem diferenciálu identity.

Při označení $y = f(x)$ lze pak tento proces (proces **diferencování**) zachytit takto:

$$y = f(x) \quad \implies \quad dy = f'(x) dx.$$

Poznámka (parciální derivace)

Je-li f funkce, závislá na více než jedné proměnné, například $f = f(x, y, z)$, lze uvažovat její derivace jen podle některé z jejích proměnných, například x .

Poznámka (parciální derivace)

Je-li f funkce, závislá na více než jedné proměnné, například $f = f(x, y, z)$, lze uvažovat její derivace jen podle některé z jejích proměnných, například x . Tuto derivaci pak nazýváme **parciální derivací f podle x** a značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$.

Poznámka (parciální derivace)

Je-li f funkce, závislá na více než jedné proměnné, například $f = f(x, y, z)$, lze uvažovat její derivace jen podle některé z jejích proměnných, například x . Tuto derivaci pak nazýváme **parciální derivací f podle x** a značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$. Například

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y^2 + z} \right) =$$

Poznámka (parciální derivace)

Je-li f funkce, závislá na více než jedné proměnné, například $f = f(x, y, z)$, lze uvažovat její derivace jen podle některé z jejích proměnných, například x . Tuto derivaci pak nazýváme **parciální derivací f podle x** a značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$. Například

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y^2 + z} \right) = \frac{1}{y^2 + z},$$

Poznámka (parciální derivace)

Je-li f funkce, závislá na více než jedné proměnné, například $f = f(x, y, z)$, lze uvažovat její derivace jen podle některé z jejích proměnných, například x . Tuto derivaci pak nazýváme **parciální derivací f podle x** a značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$. Například

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y^2 + z} \right) = \frac{1}{y^2 + z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y^2 + z} \right) =$$

Poznámka (parciální derivace)

Je-li f funkce, závislá na více než jedné proměnné, například $f = f(x, y, z)$, lze uvažovat její derivace jen podle některé z jejích proměnných, například x . Tuto derivaci pak nazýváme **parciální derivací f podle x** a značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$. Například

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y^2 + z} \right) = \frac{1}{y^2 + z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y^2 + z} \right) = -\frac{2xy}{(y^2 + z)^2}.$$

3.2 Derivace vyššího řádu

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, a f má vlastní n -tou derivaci na okolí bodu a . Pak $(n+1)$ -ní **derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Věta 3.7 (Leibnizův vzorec)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a nechť existují vlastní derivace $f^{(n)}(a)$, $g^{(n)}(a)$.

Věta 3.7 (Leibnizův vzorec)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a necht' existují vlastní derivace $f^{(n)}(a)$, $g^{(n)}(a)$. Potom existuje vlastní derivace $(fg)^{(n)}(a)$, a platí

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a) g^{(k)}(a).$$