3 Derivace funkce jedné reálné proměnné

3.1 Definice a základní vztahy, diferenciál

Definice. Nechť f je reálná funkce, nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak

- **derivací funkce f v bodě a** budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- **derivací funkce f v bodě a zprava** budeme rozumět

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

  analogicky definujeme **derivaci funkce f v bodě a zleva**.

Věta 3.1. *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Poznámka: podobně pro derivaci zprava, zleva.

Věta 3.2 (aritmetika derivací)**.** *Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace. Potom platí*

(i) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) je-li $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 3.3 (derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 3.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní. Buď $x_0 \in (a, b)$ a označme $y_0 = f(x_0)$.*

(i) Pokud existuje (vlastní nebo nevlastní) $f'(x_0) \neq 0$, má funkce f^{-1} derivaci v bodě y_0 a platí rovnost

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

(kde klademe $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

(ii) Je-li $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající) na (a, b), je $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Věta 3.5 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *(i) Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \to a+} |g(x)| = +\infty$, f a g mají na jistém pravém prstencovém okolí bodu a vlastní derivaci a existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka. • L'Hospitalovo pravidlo platí i pro limitu zleva, resp. pro oboustrannou limitu.

• Pokud neexistuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, nelze podle l'Hospitalova pravidla nic tvrdit pro existenci nebo hodnotu limity $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Věta 3.6. *Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x\to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x).$$

Definice (diferenciál)**.** Buď $a \in \mathbb{R}$ nechť existuje $f'(a)$ vlastní. **Diferenciálem funkce** f **v bodě** a nazvu lineární zobrazení

$$\mathrm{d}f(a) : h \mapsto f'(a) \cdot h\,, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Diferenciál identické funkce, tedy funkce $I(x) = x$, je proto zobrazení $\mathrm{d}I(x) = \mathrm{d}x$, s vlastností $\mathrm{d}x(h) = h$.

Podíl diferenciálů obecné funkce f a identické funkce je potom lineární zobrazení s vlastností

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}(h) = \frac{f'(x)\cdot h}{h} = f'(x)\,.$$

Podíl diferenciálů $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ tedy nezávisí na proměnné h, a lze psát

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x), \quad \text{resp.} \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,,$$

kde zlomek vpravo chápeme jako podíl dvou diferenciálů.

Vztah, který dostaneme z tohoto výrazu "rozšířením $\mathrm{d}x$", tj.

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\ \mathrm{d}x$$

pak chápeme jako vztah mezi dvěma diferenciály: diferenciál funkce f v bodě x je $f'(x)$-násobkem diferenciálu identity.

Při označení $y = f(x)$ lze pak tento proces (proces **diferencování**) zachytit takto:

$$y = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}y = f'(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Poznámka (parciální derivace). Je-li f funkce, závislá na více než jedné proměnné, například $f = f(x,y,z)$, lze uvažovat její derivace jen podle některé z jejích proměnných, například x. Tuto derivaci pak naýváme **parciální derivací** f **podle** x a značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$. Například

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y^2+z}\right) = \frac{1}{y^2+z}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y^2+z}\right) = -\frac{2xy}{(y^2+z)^2}\,.$$

3.2 Derivace vyššího řádu

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, a f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Věta 3.7 (Leibnizův vzorec)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a nechť existují vlastní derivace $f^{(n)}(a)$, $g^{(n)}(a)$. Potom existuje vlastní derivace $(fg)^{(n)}(a)$, a platí*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a)\, g^{(k)}(a)\,.$$

Tabulka derivací některých elementárních funkcí

f	f'	$D(f)$	$D(f')$	Pozn.
const.	0	$\mathbb{R}$	• (tj.: "jako $D(f)$")	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	•	$n \in \mathbb{N}$
x^a	ax^{a-1}	$x > 0$	•	$a \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	•	
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	•	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	•	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$	•	$a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	•	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	•	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	•	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$	•	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	v ± 1: jen jednostranné derivace
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	v ± 1: jen jednostranné derivace
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	•	
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	•	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	•	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	•	
$\operatorname{tgh} x$	$1 - \operatorname{tgh}^2 x$	$\mathbb{R}$	•	
$\operatorname{cotgh} x$	$1 - \operatorname{cotgh}^2 x$	$x \neq 0$	•	
$\operatorname{argsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	•	
$\operatorname{argcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$	•	
$\operatorname{argtgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$-1 < x < 1$	•	
$\operatorname{argcotgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\|x\| > 1$	•	