

4. Neurčitý integrál a primitivní funkce

Aplikovaná matematika I, NMAF071

M. Rokyta, KMA MFF UK

ZS 2016/17

Definice

Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu $I = (a, b)$. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na I** , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Definice

Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu $I = (a, b)$. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na I** , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Definice

Nechť funkce f je definována na konečném sjednocení neprázdných disjunktních otevřených intervalů $J = \cup_{j=1}^k (a_j, b_j)$. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na J** , jestliže pro každé $x \in J$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 4.1

- 1 Necht' F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 4.1

- 1 Necht' F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.
- 2 Necht' F a G jsou primitivní funkce k funkci f na konečném sjednocení neprázdných disjunktních otevřených intervalů $J = \cup_{j=1}^k (a_j, b_j)$. Pak existují konstanty $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c_j$ pro každé $x \in (a_j, b_j)$.

Poznámka

- Pro výše uvedené situace používáme rčení " F se rovná G až na konstantu" (v prvním případě), resp. " F se rovná G až na konstanty" (ve druhém případě).

Poznámka

- Pro výše uvedené situace používáme rčení " F se rovná G až na konstantu" (v prvním případě), resp. " F se rovná G až na konstanty" (ve druhém případě). V obou případech píšeme $F(x) \stackrel{c}{=} G(x)$.
- Pro primitivní funkci k funkci f používáme často symbol **neurčitého integrálu** $\int f(x) dx$,

Poznámka

- Pro výše uvedené situace používáme rčení " F se rovná G až na konstantu" (v prvním případě), resp. " F se rovná G až na konstanty" (ve druhém případě). V obou případech píšeme $F(x) \stackrel{c}{=} G(x)$.
- Pro primitivní funkci k funkci f používáme často symbol **neurčitého integrálu** $\int f(x) dx$, je-li tedy $F(x)$ jedna z primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na $I = (a, b)$, resp. na $J = \cup_{j=1}^k (a_j, b_j)$, píšeme

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x) \quad \text{na } I \text{ resp. } J.$$

Věta 4.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdňém intervalu I . Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 4.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdňém intervalu I . Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 4.3

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí $\alpha f + \beta g$ na I .

Věta 4.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdňém intervalu I . Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 4.3

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí $\alpha f + \beta g$ na I . Tedy

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx \stackrel{c}{=} \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx \quad \text{na } I,$$

pokud primitivní funkce vpravo existují.

Věta 4.4 (integrace per partes)

Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I . Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I . Pak platí

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx \quad \text{na } I.$$

Věta 4.5 (první věta o substituci)

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b) , která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \quad \text{na } (\alpha, \beta).$$

Věta 4.6 (druhá věta o substituci)

Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t) \quad \text{na } (\alpha, \beta).$$

Věta 4.6 (druhá věta o substituci)

Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t) \quad \text{na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \quad \text{na } (a, b).$$

Věta 4.6 (druhá věta o substituci)

Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t) \quad \text{na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \quad \text{na } (a, b).$$

Poznámka: Lze ukázat, že pokud $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$, potom φ je ryze monotónní v (α, β) .

Definice

Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 4.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P , Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) $\text{st } P < \text{st } Q$,

Věta 4.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P , Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

- (i) $\text{st } P < \text{st } Q$,
- (ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{q_l}$,

Věta 4.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P , Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

- (i) $\text{st } P < \text{st } Q$,
- (ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{q_l}$,
- (iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,

Věta 4.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P , Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

- (i) $\text{st } P < \text{st } Q$,
- (ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{q_l}$,
- (iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,
- (iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,

Věta 4.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P , Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

- (i) $\text{st } P < \text{st } Q$,
- (ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- (iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$,
- (iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,
- (v) *žádné dva z mnohočlenů*
 $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$
nemají společný kořen,

Věta 4.7 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P , Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

- (i) $\text{st } P < \text{st } Q$,
- (ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- (iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$,
- (iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,
- (v) *žádné dva z mnohočlenů $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,*
- (vi) *mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1,$
 $\dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_l^l,$
 $C_l^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{x - x_1} \\ &+ \dots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x - x_k} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \dots \\ &+ \frac{B_l^l x + C_l^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l}. \end{aligned}$$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

- $\int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=}$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

- $\int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=}$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

$$\blacksquare \int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

$$\blacksquare \int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x^2+b^2} \stackrel{c}{=}$$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

- $\int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|$, $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{x^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x}{b}$, pokud $b \neq 0$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

- $\int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{x^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x}{b}, \text{ pokud } b \neq 0$
- $\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} \stackrel{c}{=}$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

- $\int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|$, $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{x^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x}{b}$, pokud $b \neq 0$
- $\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x+a}{b}$, pokud $b \neq 0$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

- $\int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|$, $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{x^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x}{b}$, pokud $b \neq 0$
- $\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x+a}{b}$, pokud $b \neq 0$
- Pokud $ax^2 + bx + c$ nemá žádné reálné kořeny:
 $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx =$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

$$\blacksquare \int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x}{b}, \text{ pokud } b \neq 0$$

$$\blacksquare \int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x+a}{b}, \text{ pokud } b \neq 0$$

■ Pokud $ax^2 + bx + c$ nemá žádné reálné kořeny:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

$$\blacksquare \int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x}{b}, \text{ pokud } b \neq 0$$

$$\blacksquare \int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x+a}{b}, \text{ pokud } b \neq 0$$

■ Pokud $ax^2 + bx + c$ nemá žádné reálné kořeny:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$\frac{A}{2a} \ln(ax^2 + bx + c) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

Poznámka

Bud'te $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

- $\int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|$, $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{x^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x}{b}$, pokud $b \neq 0$
- $\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \arctg \frac{x+a}{b}$, pokud $b \neq 0$
- Pokud $ax^2 + bx + c$ nemá žádné reálné kořeny:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$\frac{A}{2a} \ln(ax^2 + bx + c) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$
 a ve jmenovateli posledního integrálu použijeme techniku doplnění na čtverec.

$$\text{Typ } \int R(\sin t, \cos t) dt$$

Typ $\int R(\sin t, \cos t) dt$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$

Typ $\int R(\sin t, \cos t) dt$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin t = x$

Typ $\int R(\sin t, \cos t) dt$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin t = x$
- je-li $R(-a, b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\cos t = x$

Typ $\int R(\sin t, \cos t) dt$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin t = x$
- je-li $R(-a, b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\cos t = x$
- je-li $R(-a, -b) = R(a, b)$, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$

$$\text{Typ } \int R(t, \left(\frac{at+b}{ct+f}\right)^{1/q}) dt$$

$$q \in \mathbb{N}, q > 1, a, b, c, f \in \mathbb{R}, af \neq bc$$

$$\text{Typ } \int R\left(t, \left(\frac{at+b}{ct+f}\right)^{1/q}\right) dt$$

$$q \in \mathbb{N}, q > 1, a, b, c, f \in \mathbb{R}, af \neq bc$$

■ substituce $\left(\frac{at+b}{ct+f}\right)^{1/q} = x$

$$\text{Typ } \int R\left(t, \left(\frac{at+b}{ct+f}\right)^{1/q}\right) dt$$

$$q \in \mathbb{N}, q > 1, a, b, c, f \in \mathbb{R}, af \neq bc$$

■ substituce $\left(\frac{at+b}{ct+f}\right)^{1/q} = x$

$$\text{Typ } \int R(e^{at}) dt$$

$$a \in \mathbb{R}$$

■ substituce $e^{at} = x$

$$\text{Typ } \int R\left(t, \left(\frac{at+b}{ct+f}\right)^{1/q}\right) dt$$

$q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $a, b, c, f \in \mathbb{R}$, $af \neq bc$

■ substituce $\left(\frac{at+b}{ct+f}\right)^{1/q} = x$

$$\text{Typ } \int R(e^{at}) dt$$

$a \in \mathbb{R}$

■ substituce $e^{at} = x$

$$\text{Typ } \int \frac{1}{t} R(\ln t) dt$$

■ substituce $\ln t = x$

$$\text{Typ } \int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt, a \neq 0$$

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt$, $a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt, a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1| \sqrt{a \frac{t - \alpha_2}{t - \alpha_1}}$

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt, a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1| \sqrt{a \frac{t - \alpha_2}{t - \alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0, c > 0$, a lze užít některou z **Eulerových substitucí**

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt, a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1| \sqrt{a \frac{t - \alpha_2}{t - \alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0, c > 0$, a lze užít některou z **Eulerových substitucí**
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = \pm \sqrt{at} + x$

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt, a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1| \sqrt{a \frac{t - \alpha_2}{t - \alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0, c > 0$, a lze užít některou z **Eulerových substitucí**
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = \pm \sqrt{at} + x$ nebo
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = tx + \sqrt{c}$

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c}) dt, a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1| \sqrt{a \frac{t - \alpha_2}{t - \alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0, c > 0$, a lze užít některou z **Eulerových substitucí**
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = \pm \sqrt{at} + x$ nebo
 $\sqrt{at^2 + bt + c} = tx + \sqrt{c}$ nebo užít **hyperbolických funkcí**.