4 Neurčitý integrál a primitivní funkce

4.1 Základní vlastnosti

Definice. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu $I = (a, b)$. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Definice. Nechť funkce f je definována na konečném sjednocení neprázdných disjunktních otevřených intervalů $J = \cup_{j=1}^{k}(a_j, b_j)$. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na** J, jestliže pro každé $x \in J$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 4.1. 1. *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

2. *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na konečném sjednocení neprázdných disjunktních otevřených intervalů $J = \cup_{j=1}^{k}(a_j, b_j)$. Pak existují konstanty $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c_j$ pro každé $x \in (a_j, b_j)$.*

Poznámka. • Pro výše uvedené situace používáme rčení "F se rovná G až na konstantu" (v prvním případě), resp. "F se rovná G až na konstanty" (ve druhém případě). V obou případech píšeme $F(x) \stackrel{c}{=} G(x)$.

• Pro primitivní funkci k funkci f používáme často symbol **neurčitého integrálu** $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, je-li tedy $F(x)$ jedna z primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na $I = (a, b)$, resp. na $J = \cup_{j=1}^{k}(a_j, b_j)$, píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x) \quad \text{na } I \text{ resp. } J.$$

Věta 4.2. *Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Věta 4.3. *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I. Tedy*

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx \stackrel{c}{=} \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx \quad \text{na } I\,,$$

pokud primitivní funkce vpravo existují.

Věta 4.4 (integrace per partes). *Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\, dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\, dx \quad \text{na } I.$$

Věta 4.5 (první věta o substituci). *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \quad \text{na } (\alpha, \beta).$$

Věta 4.6 (druhá věta o substituci). *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \stackrel{c}{=} G(t) \quad \text{na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\, dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \quad \text{na } (a, b).$$

Poznámka: Lze ukázat, že pokud $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$, potom φ je ryze monotónní v (α, β).

4.2 Integrace racionálních funkcí

Definice. **Racionální funkcí** budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 4.7 (o rozkladu na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1, \dots x_k,\ \alpha_1, \dots, \alpha_l,\ \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k,\ q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,

(v) *žádné dva z mnohočlenů* $x-x_1,\ x-x_2, \dots, x-x_k,\ x^2+\alpha_1 x+\beta_1,\ \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemají společný kořen,*

(vi) *mnohočleny* $x^2+\alpha_1 x+\beta_1,\ \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1,\ \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k,\ B_1^1,\ C_1^1, \dots,\ B_{q_1}^1,\ C_{q_1}^1, \dots,\ B_1^l,\ C_1^l, \dots, B_{q_l}^l,\ C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x-x_k} +$$
$$+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.$$

Poznámka. Buďte $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, potom platí tato pravidla (hodná zapamatování):

- $\int \frac{dx}{x-a} \stackrel{c}{=} \ln|x-a|, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{(x-a)^n} \stackrel{c}{=} \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}, \quad x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$
- $\int \frac{dx}{x^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}$, pokud $b \neq 0$
- $\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x+a}{b}$, pokud $b \neq 0$
- Pokud ax^2+bx+c nemá žádné reálné kořeny, pak používáme rovnost $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\ln(ax^2+bx+c) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, a ve jmenovateli posledního integrálu použijeme techniku doplnění na čtverec.

4.3 Některé užitečné substituce

$\boxed{\text{Typ } \int R(\sin t, \cos t)\ \mathrm{d}t}$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin t = x$
- je-li $R(-a, b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\cos t = x$
- je-li $R(-a, -b) = R(a, b)$, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$

$\boxed{\text{Typ } \int R(t, (\frac{at+b}{ct+f})^{1/q})\ \mathrm{d}t}$ $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $a, b, c, f \in \mathbb{R}$, $af \neq bc \implies$ substituce $(\frac{at+b}{ct+f})^{1/q} = x$.

$\boxed{\text{Typ } \int R(e^{at})\ \mathrm{d}t}$ $a \in \mathbb{R} \implies$ substituce $e^{at} = x$.

$\boxed{\text{Typ } \int \frac{1}{t} R(\ln t)\ \mathrm{d}t}$ $\implies$ substituce $\ln t = x$.

$\boxed{\text{Typ } \int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})\ \mathrm{d}t,\ a \neq 0}$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$: $\sqrt{at^2+bt+c} = \sqrt{a}|t-\alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$: $\sqrt{at^2+bt+c} = |t-\alpha_1|\sqrt{a\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0$, $c > 0$, a lze užít některou z **Eulerových substitucí** $\sqrt{at^2+bt+c} = \pm\sqrt{a}t + x$ nebo $\sqrt{at^2+bt+c} = tx + \sqrt{c}$ nebo užít **hyperbolických funkcí**.

Tabulka základních primitivních funkcí

f	$\int f \overset{c}{=}$	Pozn.	Kde
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$	$x \in \mathbb{R}$ pro $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro $n < 0$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$x \in (0, +\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$		$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	e^x		$x \in \mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$		$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$		$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$		$x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\operatorname{cotg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$		$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\sinh x$	$\cosh x$		$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$		$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tgh} x$	$\ln(\cosh x)$		$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{cotgh} x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert$		$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Tabulka dalších primitivních funkcí

f	$\int f \stackrel{C}{=}$	Pozn.	Kde
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$		$x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$		$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$		$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$		$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$		$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg} x$	$x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$		$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x$		$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$		$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-\operatorname{arccotg} x$		$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{argsinh} x$		$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{sign} x \cdot \operatorname{argcosh} \lvert x \rvert$		$\lvert x \rvert > 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argtgh} x$	Def. obor!	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argcotgh} x$	Def. obor!	$\lvert x \rvert > 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert$	Def. obor!	$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$