5 Aplikace diferenciálního a integrálního počtu v jedné dimenzi

5.1 Funkce spojité na intervalu

Definice (funkce spojitá na intervalu - opakování)**.** Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

Věta 5.1 (Bolzano)**.** *Nechť funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.*

Věta 5.2 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť J je nedegenerovaný interval. Nechť funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval (nebo bod).*

Věta 5.3 (o inverzní funkci)**.** *Nechť f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

Věta 5.4. *Nechť f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je f na $\langle a, b\rangle$ omezená shora i zdola.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M ($M \subset D(f)$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (resp. **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M : \; f(y) \le f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M : \; f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (resp. **minima**) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Věta 5.5. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima), tj. existují body c, $d \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(c) = \max_{\langle a,b\rangle} f(x)$, $f(d) = \min_{\langle a,b\rangle} f(x)$.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D(f)$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- **lokální maximum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in \mathcal{P}^\delta(x) \cap M$: $f(y) \le f(x)$,
- **lokální minimum vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in \mathcal{P}^\delta(x) \cap M$: $f(y) \ge f(x)$.

Věta 5.6 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Budiž $a \in \mathbb{R}$ bodem lokálního maxima nebo lokálního minima funkce f. Potom $f'(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

5.2 Věty o střední hodnotě

Věta 5.7 (Rolleova)**.** *Nechť funkce f má následující vlastnosti:*

(i) je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,

(ii) má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),

(iii) platí, že $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ *takové, že platí* $f'(\xi) = 0$.

Věta 5.8 (Lagrangeova)**.** *Nechť funkce* f *je spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu* (a, b). *Potom existuje* $\xi \in (a, b)$ *takové, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 5.9 (Cauchyova)**.** *Nechť funkce* f, g *jsou spojité na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a takové, že* f *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu* (a, b) *a* g *má v každém bodě intervalu* (a, b) *vlastní a nenulovou derivaci. Potom existuje* $\xi \in (a, b)$ *takové, že platí*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Poznámka: L'Hospitalovo pravidlo a věta o jednostranné limitě derivací jsou (m.j.) důsledkem Cauchyovy věty o střední hodnotě.

Věta 5.10 (vztah derivace a monotonie)**.** *Nechť funkce* f *je spojitá a má derivaci na intervalu* (a, b), $a < b$.

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in (a, b)$, *pak* f *je rostoucí na* (a, b).

(ii) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in (a, b)$, *pak* f *je klesající na* (a, b).

(iii) *Je-li* $f'(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \in (a, b)$, *pak* f *je neklesající na* (a, b).

(iv) *Je-li* $f'(x) \leq 0$ *pro všechna* $x \in (a, b)$, *pak* f *je nerostoucí na* (a, b).

Důsledek: Je-li $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak f je konstantní na (a, b).

5.3 Taylorův polynom

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu** n **funkce** f **v bodě** a.

Definice (symbol "malé o")**.** Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé** o **od** g (píšeme $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Některá pravidla pro zacházení se symbolem "o":
Pro jednoduchost: $a = 0$, $g(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0}$

- $\boxed{c \cdot o(x^n) = o(x^n)}$ $\quad c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x \to 0$,
  $\boxed{o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)}$ $\quad n \in \mathbb{N}_0$, $x \to 0$,

- $\boxed{o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})}$ $\quad n, m \in \mathbb{N}_0,\ x \to 0,$
  $\boxed{x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})}$ $\quad n, n \in \mathbb{N}_0,\ x \to 0,$
- $\boxed{o(o(x^n)) = o(x^n)}$ $\quad n \in \mathbb{N}_0,\ x \to 0,$
- !! $\boxed{o(x^n) = o(x^m),\ m \le n}$ $\quad n, m \in \mathbb{N}_0,\ x \to 0,$
  Přesněji: $\boxed{f(x) = o(x^n) \implies f(x) = o(x^m),\ m \le n}$ **("rovnost" zde není symetrická!)**

Věta 5.11 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a $T_n^{f,a}$ je Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

neboli

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n),\ \ x \to a.$$

Věta 5.12 (Obecný tvar zbytku)**.** *Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že*

- *f je funkce, která má v každém bodě intervalu $\langle a, x\rangle$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci,*
- *φ je spojitá funkce na $\langle a, x\rangle$, která má v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci.*

Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Věta 5.13 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 5.12. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Věta 5.14 (Cauchyův tvar zbytku)**.** *Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 5.12. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a).$$

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in (-1, 1\rangle:\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in (-1, 1),\ \alpha \in \mathbb{R}:\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

5.4 Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží pod tečnou** T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ **leží nad tečnou** T_a.

Definice. Nechť $f'(a) \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je **inflexním bodem** funkce f, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) :\ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) :\ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a

nebo

(i) $\forall x \in (a - \delta, a) :\ [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \delta) :\ [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 5.15 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ je inflexní bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 5.16 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:*

- $\forall x \in (a, z) :\ f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b) :\ f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f.

Definice. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je **konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I\, \forall \lambda \in \langle 0, 1\rangle :\quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je **ryze konvexní na intervalu** I, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2\, \forall \lambda \in (0, 1) :\quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Lemma 5.17. *Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3 :\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 5.18. *Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f' je spojitá na (a, b).*

(i) *Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).*

(ii) *Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).*

(iii) *Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).*

(iv) *Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).*

5.5 Průběh funkce

Věta 5.19. *Nechť $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$). Potom f má v a lokální minimum (resp. lokální maximum).*

Definice. Řekneme, že funkce $x \mapsto ax+b,\ a, b \in \mathbb{R}$, je **asymptotou funkce** f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0).$$

Věta 5.20. *Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, právě když*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v "krajních bodech definičního oboru".
4. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde funkce f je konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Vypočteme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.

5.6 Základní typy obyčejných diferenciálních rovnic

Motivace: volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$
$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu, který závisí lineárně na rychlosti:

$$mv' = mg - bv$$

Obyčejné diferenciální rovnice (ODR): rovnice pro neznámou funkci jedné proměnné (zde $v = v(t)$), ve které se vyskytují derivace hledané funkce.

Definice. **(Obyčejnou) diferenciální rovnicí (ODR)** pro funkci $y = y(x)$ rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných. **Řádem ODR** (1) nazveme řád nejvyšší derivace funkce y, která se v rovnici (1) vyskytuje.

Definice.

- **Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \ldots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $D(y) \subsetneqq D(z)$ a které se na $D(y)$ shoduje s y.

Definice. **Rovnice se separovanými proměnnými** je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \tag{2}$$

Návod k řešení:

- Pokud $g(c) = 0$, je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice.
- Na intervalech, kde $g(y) \neq 0$ uvažte $\frac{y'}{g(y)} = h(x)$ s následným $\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,\mathrm{d}x$.
- Nutná je diskuse o možnostech navazování řešení předchozích dvou typů!

Definice. **Lineární ODR prvního řádu** je rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{3}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$

Návod k řešení:

- Násobte rovnici výrazem $e^{P(x)}$, kde P je primitivní funkce k p na (a, b).
- Upravte na levé straně do tvaru derivace součinu.
- Integrujte.

Definice. **Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru

$$Ay'' + By' + Cy = f(x), \tag{4}$$

kde A, B, $C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, a funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b). Pokud je f identicky nulová na (a, b), nazýváme rovnici (4) **homogenní**.

Případ I:

$\boxed{f \equiv 0\text{, rovnice: } Ay'' + By' + Cy = 0\text{, obecné řešení } y_h}$

Pokud **charakteristická** rovnice $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ má:

1. dva různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. jeden dvojnásobný reálný kořen λ:

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

3. dva komplexně sdružené kořeny $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$:

$$y_h(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

Případ II:

$\boxed{f \not\equiv 0, \text{ rovnice: } Ay'' + By' + Cy = f(x)}$

Pro řešení $y(x)$ platí:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

kde $y_h(x)$ je obecné řešení homogenní rovnice (viz předchozí případ) a $y_p(x)$ je **jedno** (jakékoliv), tzv. **partikulární** řešení rovnice $Ay'' + By' + Cy = f(x)$. Některá partikulární řešení lze "uhodnout" podle tvaru pravé strany.

- Je-li $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a P je polynom, potom existuje polynom Q, st $Q =$ st P, že
  1. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2 \implies y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x}$,
  2. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha = \lambda_2 \implies y_p(x) = xQ(x)e^{\alpha x}$,
  3. $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \implies y_p(x) = x^2 Q(x)e^{\alpha x}$.
- Je-li $f(x) = e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + R(x) \sin \beta x)$, ($P$, R polynomy), existují polynomy Q, S, stupně nejvýše $\max($st $P,$ st $R)$, takové, že
  1. $\alpha + i\beta \neq \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(x) = e^{\alpha x}(Q(x) \cos \beta x + S(x) \sin \beta x)$,
  2. $\alpha + i\beta = \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(x) = xe^{\alpha x}(Q(x) \cos \beta x + S(x) \sin \beta x)$,

Více se dozvíme ve speciální kapitole věnované ODR a systémům ODR, v některém z dalších semestrů.