6 Určitý integrál a jeho výpočet, aplikace

6.1 Newtonův integrál

Definice. Řekneme, že **Newtonův integrál** funkce f na intervalu (a,b), $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}^\star$, existuje, jestliže f má na (a,b) primitivní funkci (označme ji F), limity $\lim_{x\to a+}F(x)$, $\lim_{x\to b-}F(x)$ existují a jejich rozdíl je definován.

Hodnotou Newtonova integrálu funkce f přes interval (a,b) pak rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to b-}F(x)-\lim_{x\to a+}F(x).$$

Pokud $(N)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je **konvergentní**. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Označení.
- Množinu všech funkcí $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, které mají konvergentní Newtonův integrál od a do b, značíme $\mathcal{N}(a,b)$.
- Je-li $f\in\mathcal{N}(a,b)$ a F je primitivní k f na (a,b), označujeme (je-li výraz vpravo definován)

$$[F]_a^b:=\lim_{x\to b-}F(x)-\lim_{x\to a+}F(x).$$

- Tam, kde nehrozí nedorozumění, vynecháváme někdy pro úsporu času označení proměnné:

$$\int_a^b f(t)\,dt\equiv\int_a^b f\,.$$

Věta 6.1 (vlastnosti Newtonova integrálu)**.**

(a) Nechť $f,g\in\mathcal{N}(a,b)$ a $\alpha\in\mathbb{R}$. Potom $f+g\in\mathcal{N}(a,b)$, $\alpha f\in\mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g,\qquad\int_a^b\alpha f=\alpha\int_a^b f.$$

(b) Nechť $f,g\in\mathcal{N}(a,b)$ a $f\le g$. Pak $\int_a^b f\le\int_a^b g$.

(c) Nechť $-\infty\le a<b<c\le+\infty$ a $f\in\mathcal{N}(a,c)$. Potom $f\in\mathcal{N}(a,b)$, $f\in\mathcal{N}(b,c)$ a platí $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$.

(d) Nechť $-\infty\le a<b<c\le+\infty$, $f\in\mathcal{N}(a,b)$, $f\in\mathcal{N}(b,c)$ a f je spojitá v b. Potom $f\in\mathcal{N}(a,c)$.

Věta 6.2. *Nechť funkce F je primitivní k f na (a,b), G je primitivní ke g na (a,b). Potom*

$$\int_a^b gF=[GF]_a^b-\int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 6.3 (substituce pro určitý integrál)**.** *Nechť $\omega:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ splňuje $\omega((\alpha,\beta))=(a,b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α,β). Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)}(f\circ\omega)(t)\,\omega'(t)\,dt,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Věta 6.4 (první věta o střední hodnotě). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je nezáporná, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ takové, že*

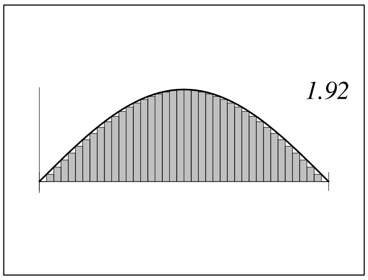
$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

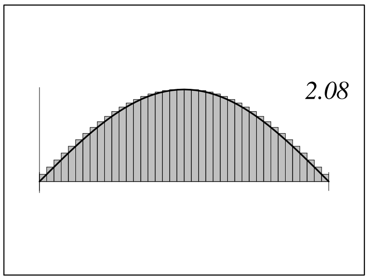
Věta 6.5 (druhá věta o střední hodnotě). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je monotónní a spojitá na $\langle a, b\rangle$. Potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ takové, že*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f.$$

6.2 Riemannův integrál - poznámky

$$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = 2$$





$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \min_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f(x) \cdot (x_j - x_{j-1})}_{=s(f,D_n)} \qquad \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \max_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f(x) \cdot (x_j - x_{j-1})}_{=S(f,D_n)}$$

Pro jakékoliv $\xi_j \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle$ máme

$$\boxed{s(f, D_n) \le \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \le S(f, D_n).}$$

Buď $F \in C(\langle a, b\rangle)$ primitivní k f na (a, b). Potom (podle Lagrangeovy věty) existuje $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ takové, že

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$\sum_{j=1}^{n} \big(F(x_j) - F(x_{j-1})\big) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$\boxed{s(f, D_n) \le F(b) - F(a) \le S(f, D_n).}$$

6.3 Aplikace určitého integrálu

Definice. Křivkou budeme rozumět zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je **třídy** $\mathcal{C}^1$, tj. φ_i' je spojité na $\langle a, b\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, přičemž v krajních bodech $\langle a, b\rangle$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle\varphi\rangle = \varphi(\langle a, b\rangle) \subset \mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } \langle a, b\rangle\},$$

kde pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ intervalu $\langle a, b\rangle$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^{k} \text{vzdálenost}\,(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)).$$

Věta 6.6 (délka křivky). *Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je křivka. Potom platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1')^2 + \cdots + (\varphi_n')^2}.$$

Je-li křivka zadána jako graf funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, $f \in \mathcal{C}^1(\langle a, b\rangle)$, pak

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Je-li křivka zadána v polárních souřadnicích funkcí $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$, $r \in \mathcal{C}^1(\langle \alpha, \beta\rangle)$, pak

$$L(\varphi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Věta 6.7 (plošný obsah rovinných množin). *Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Označme*

$$P = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle a, b\rangle,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Pak

$$\text{Plocha}\,(P) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Je-li množina M vymezena v polárních souřadnicích polopřímkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ a křivkou $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$, $r \in \mathcal{C}(\langle \alpha, \beta\rangle)$, pak

$$\text{Plocha}\,(M) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi.$$

Věta 6.8 (objem a povrch rotačního tělesa). *Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Označme*

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x \in \langle a, b\rangle,\ \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\}.$$

Pak

$$\text{Objem}\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak

$$\text{Povrch pláště}\,(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$