Řešení písemky ze 7.2.2017

var. A

(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}}}_{=:A(x)\to \frac{1}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

5b

$$= \lim_{x\to 0} A(x)\cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{A(x)}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}}$$

5b

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

5b

Šlo postupovat i Taylorem:

$$\sqrt{1+\operatorname{tg} x} = \ldots (\text{spočtěte}) \ldots = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{11}{48}x^3 + o(x^3)$$

5b

$$\sqrt{1+\sin x} = \ldots (\text{spočtěte}) \ldots = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

5b

tj.

$$\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x} = x^3\left(-\frac{11}{48} - \frac{1}{48}\right) + o(x^3)$$

5b

$$= -\frac{12}{48}x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{4}x^3 + o(x^3)$$

atd.

Konečně, úlohu šlo řešit (nejpracněji) i mnohonásobným použitím L'Hospitalova pravidla.

(2) $$\int \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{x(\ln^2 x - \ln x + 1)}\,dx.$$

Substituce
$$\left.\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,dx &= dt \\ x &> 0 \end{aligned}\right\} \quad 3b$$

Dostaneme

$$\int \frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\,dt = \underbrace{\int \left(1 + \frac{2t}{t^2-t+1}\right) dt}_{3b} = t + \underbrace{\int \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \int \frac{1}{t^2-t+1}}_{}$$

$$\int \frac{2t-1}{t^2-t+1} = \underbrace{\ln|t^2-t+1|}_{3b}$$

kde
$$\int \frac{1\,dt}{t^2-t+1} = \underbrace{\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}_{4b} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}}_{3b}$$

Celkem

$$\int \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{x(\ln^2 x - \ln x + 1)}\,dx \overset{c}{=} \ln x + \ln(\ln^2 x - \ln x + 1) \underbrace{+ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\ln x - 1}{\sqrt{3}}}_{3b}, \quad \underbrace{x > 0}_{1b}$$

(3) $y'' - 25y = e^{-5x}$

Homogenní rovnice $\lambda^2 - 25 = 0$
$\lambda_{1,2} = \pm 5$ (2b)

Všechna řešení homogenní rovnice:
$$y_H = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}$$ (3b)

Partikulární řešení hledáme ve tvaru
$$y_p = cxe^{-5x}$$
$$y_p' = ce^{-5x} - 5cxe^{-5x}$$
$$y_p'' = -5ce^{-5x} - 5ce^{-5x} + 25cxe^{-5x}$$ (3b)

$$y_p'' - 25y_p = e^{-5x}(-10c + 25cx - 25cx)$$
$$= e^{-5x}(-10c) \stackrel{?}{=} e^{-5x}$$ (2b)
$$\Downarrow$$
$$c = -\frac{1}{10}, \quad y_p = -\frac{1}{10}xe^{-5x}$$ (2b)

Celkově vypadají všechna řešení takto.

$$\boxed{y = -\frac{1}{10}xe^{-5x} + c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}}$$ (1b)

Pokud navíc požadujeme $y(0) = 0$, máme
$$0 = c_1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1$$ (1b)
a tedy:

$$\boxed{y = -\frac{1}{10}xe^{-5x} + c_1\left(e^{5x} - e^{-5x}\right)}$$ (1b)

(4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^3+1}} = |x| \cdot (x^3+1)^{-\frac{1}{2}}$

- $D(f) = (-1, \infty)$, plyne z $x^3+1>0$. (1b)
- f spojitá na $D(f)$ (1b)
- f není sudá, lichá, ani periodická

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, (1b) $\lim\limits_{x\to -1+} = +\infty$, (1b) $f(0)=0$, $f \geq 0$

$\Downarrow$ $\Rightarrow \underline{H(f) = \langle 0, +\infty)}$

Odkud asymptota $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$; $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0) = 0$

$\downarrow$

$\underline{y=0}$ v $+\infty$

- 1. derivace

$$f'(x) = \left(|x| \cdot (x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \operatorname{sign} x \cdot (x^3+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}|x| \cdot 3x^2 (x^3+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sign} x}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}} \left(2(x^3+1) - 3x^3\right) = \frac{(2-x^3) \cdot \operatorname{sign} x}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(2b)}$$

$\underline{x \neq 0}$ (1b)

$f'_+(0) = +1$, $f'_-(0) = -1$

<u>Monotonie</u>:

$x \in (-1, 0)$	$f' < 0$	f klesá	(1b)
$x \in (0, \sqrt[3]{2})$	$f' > 0$	f roste	(1b)
$x \in (\sqrt[3]{2}, \infty)$	$f' < 0$	f klesá	(1b)

$\Rightarrow$ • v $x=0$ je lok. i glob. minimum, $f(0)=0$ (1b)

• v $x = \sqrt[3]{2}$ je lok. (ne glob.) max., $f(\sqrt[3]{2}) = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$ (1b)

$\approx 0{,}7274\ldots$

Druhá derivace: $(x \neq 0)$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sign} x \cdot (2-x^3)(x^3+1)^{-\frac{3}{2}} \right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sign} x \left[(-3x^2)(x^3+1)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(2-x^3)\,3x^2(x^3+1)^{-\frac{5}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sign} x \cdot \frac{3}{2}x^2 \cdot (x^3+1)^{-\frac{5}{2}} \left[\underbrace{(-2)(x^3+1) - 3(2-x^3)}_{x^3-8} \right]$$

$$= \frac{3\operatorname{sign} x \cdot x^2 \cdot (x^3-8)}{4(x^3+1)^{\frac{5}{2}}}, \quad x \neq 0$$

2b

Konvexita:

$x < 0 \Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow f$ konvexní 1b

$x \in (0,2) \Rightarrow f'' < 0 \Rightarrow f$ konkávní 1b

$x > 2 \Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow f$ konvexní 1b

v bodě $x=2$ je inflexní bod. 1b

Graf:

1b