Řešení písemky z 24. 2. 2017
var. D

Body: (n)

(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x^3}.$$ Položíme $f(x) = 2^x - 2^{\sin x}$
$g(x) = x^3$

Použijeme 3x L'Hospitalovo pravidlo. (1) Musíme ovšem ověřit, že $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Pro g je zřejmé $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ a $g'''(0) = 6$

$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{\sin x} \cos x \ln 2$, (2) $f'(0) = 0$ ✓

$f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2^{\sin x} \cos^2 x \ln^2 2 + 2^{\sin x} \sin x \ln 2$, (3) $f''(0) = 0$ ✓ (1)

$f'''(x) = 2^x \ln^3 2 - 2^{\sin x} \cos^3 x \ln^3 2 + 2^{\sin x} \cdot 2\cos x \cdot \sin x \cdot \ln^2 2 +$
$+ 2^{\sin x} \cos x \cdot \sin x \ln^2 2 + 2^{\sin x} \cos x \ln 2$ (4)

$f'''(0) = \ln^3 2 - \ln^3 2 + 0 + 0 + \ln 2 = \ln 2$ (1)

Celkově

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \boxed{\frac{1}{6}\ln 2}$$ (2)

Pozn. Šlo také použít Taylorův rozvoj čitatele. Jeho koeficienty jsou

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \text{ tj } a_0 = f(0) = 0$$ (1)
$a_1 = f'(0) = 0$ (3)
$a_2 = \frac{1}{2} f''(0) = 0$ (4)
$a_3 = \frac{1}{6} f'''(0) = \frac{1}{6}\ln 2$ (5)

Pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}\ln 2 \cdot x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}\ln 2.$$ (2)

Jde v podstatě o kratší výpočet, v obou případech potřebujeme 3 derivace funkce v čitateli.

(2) $$\int \frac{x^2+x+1}{(x+3)(x^2+2x+3)}\,dx = \int\left(\frac{A}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}\right)dx \quad 3$$

$$x^2+x+1 = A(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x+3) \quad 1$$

$$\begin{array}{lrcll}
x^2: & 1 & = & A + C & \Rightarrow C = 1 - A \\
x^1: & 1 & = & 2A + 3C + D & \\
x^0: & 1 & = & 3A + 3D &
\end{array} \quad 3$$

$$1 = 2A - 3A + 3 + D \Rightarrow -2 = -A + D \Rightarrow D = A - 2$$

$$1 = 3A + 3D$$

$$1 = 3A + 3A - 6 \Rightarrow \boxed{A = \frac{7}{6},\quad C = -\frac{1}{6},\quad D = -\frac{5}{6}} \quad 3$$

$$\int\left(\frac{\frac{7}{6}}{x+3} + \frac{-\frac{1}{6}x - \frac{5}{6}}{x^2+2x+3}\right)dx = \frac{7}{6}\ln|x+3| - \frac{1}{12}\underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}}_{\ln(x^2+2x+3)} - \frac{2}{3}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+3}}_{I}$$

2 2 2

Přitom

$$I = \int \frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} \quad 2$$

$$\left[\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x+a}{b}\right]$$

Celkově:

$$\boxed{\int \frac{x^2+x+1}{(x+3)(x^2+2x+3)}\,dx = \frac{7}{6}\ln|x+3| - \frac{1}{12}\ln(x^2+2x+3) - \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \quad 1$$

1 $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

3 $\quad (1+x^2)y' = (1+y^2)x$

$$y' = \frac{x}{1+x^2}\cdot(1+y^2) \qquad \text{Separované proměnné} \quad 4$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \qquad 5$$

$$\operatorname{arctg} y = c + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\boxed{y = \operatorname{tg}\left(c + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)} \qquad 3$$

Řešení je definováno tam, kde (pro pevné $c \in \mathbb{R}$)

$$c + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln(1+x^2) \neq \pi + 2k\pi - 2c$$

$$\underbrace{x^2 \neq e^{(2k+1)\pi - 2c} - 1}, \qquad (*)$$

3

Řešení jsou definována na intervalech mimo body s vlastností (*)

(To asi lze ještě dále zpřesňovat, ale takto mi to stačí)

(4) $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1-2x^3}$, průběh.

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right\}$ (1) • $f \in C\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right\}\right)$ (1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.79$

- f není sudá, není lichá, není periodická. (1)

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{1}{x^3}+1}{\frac{1}{x^3}-2} = -\dfrac{1}{2}$. (1)

  Odtud $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 =: a$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0\cdot x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

  tj. přímka $y = -\frac{1}{2}$ je asymptotou v $+\infty$ i v $-\infty$. (1)

- v krajních bodech def. oboru $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+} \text{"}\dfrac{A>0}{0-}\text{"} = -\infty$ (1)

  $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-} \text{"}\dfrac{A>0}{0+}\text{"} = +\infty$. (1)

Derivace na $D(f)$:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-2x^3) - (1+x^3)(-6x^2)}{(1-2x^3)^2} = \frac{9x^2}{(1-2x^3)^2} > 0 \quad \forall x \in D(f)\setminus\{0\}$$ (2)

f roste na $\underbrace{(-\infty, 0), \text{ na } \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}_{\text{v nule není lok. extrém.}}$, na $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$ (1)

Druhá derivace na $D(f)$:

$$f'' = \frac{18x(1-2x^3)^2 + 9x^2\cdot 2(1-2x^3)\cdot 6x^2}{(1-2x^3)^4} = \frac{18x(1-2x^3) + 18\cdot 6x^4}{(1-2x^3)^3}$$

$$= \frac{18x(1+4x^3)}{(1-2x^3)^3}.$$ (3)

≈ -0.630 ≈ 0.793

Body, kde f'' mění znaménko, jsou: $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, 0, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

$\mathcal{D}f$: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0\right)$ $\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$

f'': $+$ $-$ $+$ $-$

konvexní konkávní konvexní konkávní (3)

(1) V bodech $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, 0 je inflexe (mění se tam konkávnost v konvexitu).

Pro náčrtek grafu je ještě dobré spočítat si kromě hodnot f v důležitých bodech, také směrnici tečny v $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}, \quad f(0) = 1$$

$$f'\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \approx 1.587.$$

Nezapomeňte na obor hodnot: $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. (1)

graf (2)