Řešení písemky z 10. 3. 2017

var. E

Body: m

① (5)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{(1-x)-(1-\sin x)}{x^3}}_{A:=\frac{\sin x - x}{x^3}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-\sin x}}}_{\downarrow \ \frac{1}{2}}$$

kde $A = \dfrac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}+\dfrac{o(x^3)}{x^3} \longrightarrow -\dfrac{1}{6}$ (8)

Limitu A lze lehce spočítat 3x l'Hospitalem

Výsledek: $\boxed{-\frac{1}{12}}$ (2)

②

$$\int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+3x+3)}\,dx$$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+3x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+3}$$ (3)

$$(x+1) = A(x^2+3x+3) + (Bx+C)(x+2)$$

(3)

x^2: $0 = A + B \Rightarrow B = -A$

x^1: $1 = 3A + 2B + C$

x^0: $1 = 3A + 2C$

$1 = A + C \quad /\cdot 2$

$1 = 3A + 2C$

$A = -1$

$C = 2$

$B = 1$

(3)

$$\int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+3x+3)} = \int \frac{-1}{x+2} + \int \frac{x+2}{x^2+3x+3} =$$

$$= \underbrace{-\ln|x+2|}_{1} + \frac{1}{2}\overbrace{\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}}^{3} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+3} =$$

$$= -\ln|x+2| + \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+3x+3)}_{2} + \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}_{\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \quad 3$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+3x+3) - \ln|x+2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}}, \quad 1$$

$$x \in (-\infty,-2) \cup (-2,\infty) \quad 1$$

3 $\quad y'' - 16y = xe^{5x}$

homogenní rovnice : $\quad y'' - 16y = 0$ 3

charakt. polynom : $\quad \lambda^2 - 16 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 4$ 3

řešení homog. rovnice : $\quad y_H = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}$ 2

Partikulární řešení y_p hledáme ve tvaru 3

$$y_p = (ax+b)e^{5x}$$
$$y_p' = ae^{5x} + 5(ax+b)e^{5x}$$
$$y_p'' = 5ae^{5x} + 5ae^{5x} + 25(ax+b)e^{5x}$$

$$y_p'' - 16y_p = e^{5x}(10a + 25ax + 25b - 16ax - 16b) = xe^{5x}$$

$$9ax + 10a + 9b = x$$

$$\Rightarrow 9a = 1, \quad 10a + 9b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{9}, \quad b = -\frac{10}{81}$$ 3

$$\boxed{y = \left(\frac{x}{9} - \frac{10}{81}\right)e^{5x} + c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}}$$ 1

(4) Průběh fce $f(x) = \frac{2x^2-1}{5x} + \ln\frac{2}{x} = \frac{2x^2-1}{5x} + \ln 2 - \ln x$

- $D(f) = (0, +\infty)$ (1)
- f spojitá na $D(f)$ (1)
- f není sudá, lichá ani periodická (1)
- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \underbrace{\frac{2x^2-1}{5x}}_{\to \frac{-1}{„0+"} = -\infty} + \ln 2 - \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}$

POZOR, to není jednoduchá limita, jde o „rozdíl stejných nekonečen"

Tady pomůže například úprava (3)

$$\frac{2x^2-1}{5x} - \ln x = \frac{2x^2-1-\overbrace{5x\ln x}^{\to 0}}{5x} \to \frac{-1}{„0+"} = -\infty, \text{ tedy } \lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2x-\frac{1}{x}}{5}}_{\downarrow\, +\infty} + \ln 2 - \underbrace{\ln x}_{\downarrow\, +\infty}$ Totéž.

Poradíme si stejně, přepsáním do 0+:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\frac{2}{x^2}-1}{5\cdot\frac{1}{x}} - \ln 2 - \ln\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{2-x^2}{5x} - \ln 2 + \ln x\right)$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{2-x^2+5x\ln x}{5x} - \ln 2\right) = „\frac{2}{0+} - \ln 2" = +\infty \quad (3)$$

Obor hodnot $= (-\infty, +\infty)$ (1)

- $f'(x) = \frac{4x\cdot 5x - 5(2x^2-1)}{25x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{25x^2}(10x^2+5-25x) = \frac{1}{5x^2}(2x^2-5x+1)$ (2)

kořeny kvadratické rovnice $\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{4} = \frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

$(\approx 0{,}219$ a $2{,}281)$.

$\Rightarrow$ f roste na $\left(0, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$

f klesá na $\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$

f roste na $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$

$\Rightarrow$ f má v $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$ lok. maximum

f má v $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$ lok. minimum

3

$$f'' = \left(\frac{2x^2-5x+1}{5x^2}\right)' = \frac{(4x-5)5x^2 - 10x(2x^2-5x+1)}{25x^4} = \frac{+25x^2-10x}{25x^4}$$

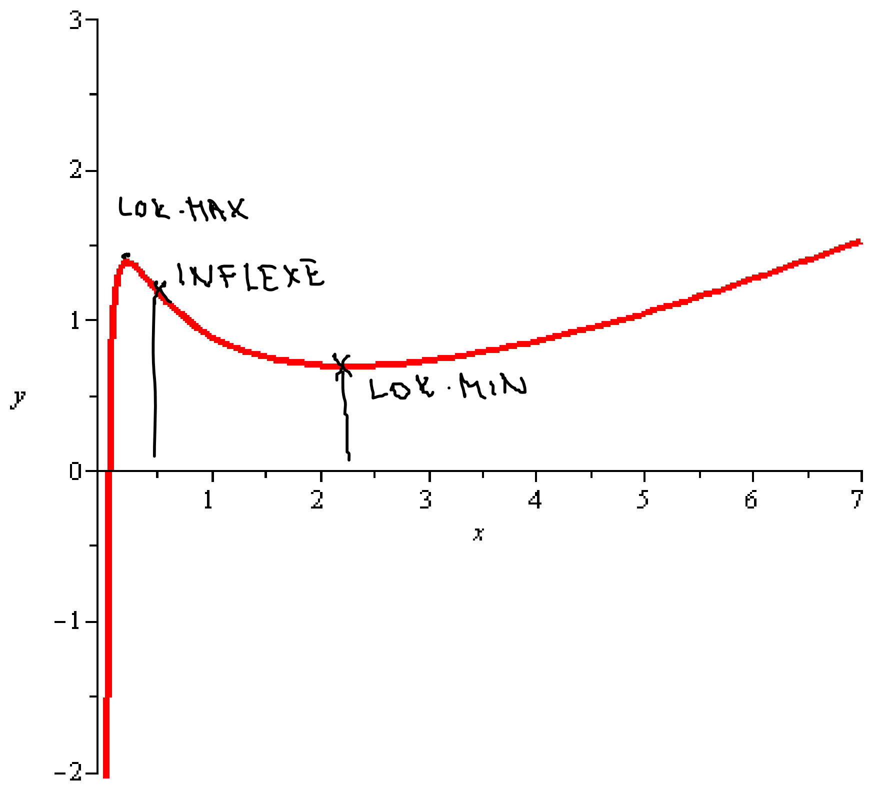
$$= \frac{1}{5x^3}(5x-2)$$

1

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f \text{ konkávní v } (0, \frac{2}{5}) \\ f \text{ konvexní v } (\frac{2}{5}, \infty) \end{array}\right\}$ v $x = \frac{2}{5}$ je inflexe.

2

graf:



2