P 13, 25.5.2021

$$x y'' + (s+1-x) y' - \alpha y = 0 \qquad \text{(GRR)}$$

$$s, \alpha \in \mathbb{C}, \qquad s \neq -1, -2, -3, \dots$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{\left(-x^{s+1} e^{-x} y'\right)'}_{Ty} = \underbrace{-\alpha x^{s} e^{-x} y}_{\lambda \rho y}$$

$$Ty = (-py')'$$

$$\rho = x^{s} e^{-x}$$

$$L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$$

$$c_0 = 1$$

$$c_{n+1} = c_n \frac{n+\alpha}{(n+1)(s+n+1)} \qquad n = 0,1,2,3\dots$$

$$s \neq -1,-2,-3.$$

$$y = \sum_0^\infty c_n x^n \qquad R = +\infty$$

- INTERMEZZO O HYPERGEOMETRICKÝCH ŘADÁCH

Hg-řada je řada $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$,

kde:

a) $\exists\, P, Q$ polynomy s koef. u nej-vyšší mocniny rovnými 1

$\operatorname{st} P = p \geq 0$, $\operatorname{st} Q = q \geq 0$

Q nemá kořeny mezi $\mathbb{N} \cup \{0\}$

b) $$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$c_0 = 1$

Př: • $P, Q \equiv 1 \Rightarrow c_{n+1} = \frac{1}{n+1} c_n$

$\Downarrow$ $\quad c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2!},\ c_3 = \frac{1}{3!}$

$y = e^x$

- Řešení GRR (výše) je ve tvaru Hg-řady.

$c_0 = 1$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n + I}{(s+n+1)} \cdot \frac{1}{n+1}$$

Jsme-li schopni rozložit P, Q na kořenové činitele, tak:

$$P(n) = (a_1+n)(a_2+n)\cdots(a_p+n)$$

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots$$

$$Q(n) = (b_1+n)(b_2+n)\cdots(b_q+n)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(a_1+n)\cdots(a_p+n)}{(b_1+n)\cdots(b_q+n)}\cdot\frac{1}{n+1}}$$

$\Downarrow$

$$\sum_0^\infty c_n x^n = {}_pF_q\underbrace{[a_1,\dots,a_p;\, b_1,\dots,b_q]}_{\begin{bmatrix} a_1,\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_q\end{bmatrix}}(x)$$

Platí:

(i) $p < q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 0 \Rightarrow \underline{R = +\infty}$

(ii) $p = q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 1 \Rightarrow \underline{R = 1}$

(iii) $p > q+1 \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \infty \Rightarrow \underline{R = 0}$

Př: GRR: $p = q = 1 \Rightarrow p < q+1 \Rightarrow R = +\infty$

$y = \text{řešení GRR} = {}_1F_1[\alpha; s+1](x)$

Obecně:

$$c_n = \frac{(a_1+n-1)\ldots(a_p+n-1)}{(b_1+n-1)\ldots(b_q+n-1)}\cdot\frac{1}{n}\cdot c_{n-1} =$$

$$= \frac{[(a_1+n-1)(a_1+n-2)]\ldots[(a_p+n-1)(a_p+n-2)]}{[(b_1+n-1)(b_1+n-2)]\ldots[(b_q+n-1)(b_q+n-2)]}\cdot\frac{1}{n(n-1)}\cdot c_{n-2}$$

$$= \vdots$$

$$(a_1)_n = \underbrace{a_1\cdot(a_1+1)\ldots(a_1+n-1)}_{n \text{ členů}} \quad {}^{*)}$$

$$= \frac{[\overbrace{(a_1+n-1)(a_1+n-2)\ldots a_1}^{n \text{ členů}}]\,(a_2)_n\ldots(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\ldots(b_q)_n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot \underset{1}{\underset{\parallel}{c_0}}$$

$$\boxed{c_n = \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_n}{\prod_{k=1}^{q}(b_k)_n}\cdot\frac{1}{n!}}$$

*) POCHHAMMERŮV SYMBOL (RISING FACTORIAL)

$$ {}_pF_q[a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_n}{\prod_{k=1}^{q}(b_k)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} $$

Řešení GRR:

$$ y = {}_1F_1[\alpha; s+1](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(s+1)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad (*) $$

$$ \overbrace{c_0 = 1 \qquad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+\alpha}{(s+n+1)} \cdot \frac{1}{n+1}} $$

To je vl. fce $Ty = \lambda_p y$

Kdy jsou fce y tvaru $(*)$ polynomy?

$\Rightarrow$ pokud $\exists\, n$, že $(\alpha)_n = 0 \ \forall\, k \geq n$

$$ (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) $$

Polynom $\iff \alpha = -n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$

Pro vlastní čísla $\lambda = 1, 2, 3, 4 \ldots$ $(\lambda = -\alpha)$
tj. pro $\alpha = -\lambda = -1, -2, -3, \ldots$
jsou odpovídající vl. fce tvaru $(*)$
polynomy.

Takto polynomy se jmenují
Laguerrovy polynomy

Def: Laguerrovým polynomem řádu s a stupně n nazveme polynom definovaný pro $s \in \mathbb{R}$, $s > -1$ takto:

$$\boxed{L_n^s(x) := \frac{(s+1)_n}{n!} \, {}_1F_1[-n, s+1](x) = \frac{(s+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(s+1)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}}$$

OG reálné polynomy na $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$

Pozn: Jde o úplný OG systém, tj. jde o bázi.

(Čihák, MA pro F V)

U OG polynomech typicky zjišťujeme:

① Tzv. explicitní vyjádření

$$\boxed{L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n} e^{-x} \right)^{(n)}} \quad ✓$$

$$\Rightarrow \quad L_0^s(x) = 1$$

$$L_1^s(x) = -x + (s+1)$$

② Rekurentní vzorec

$$\boxed{x L_n^s(x) = (s+2n+1) L_n^s - (n+1) L_{n+1}^s - (s+n) L_{n-1}^s}$$

$$A_n = -(n+1)$$
$$B_n = -(s+n)$$

③ Normy

Víme:

$$\|\varphi_{n+1}\|^2 = \frac{B_{n+1}}{A_n} \|\varphi_n\|^2$$

$$A_n \dots \varphi_{n+1}, \quad B_n \dots \varphi_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \|L^{s}_{n+1}\|^2_{2,\rho} = \frac{s+n+1}{n+1} \|L^{s}_{n}\|^2_{2,\rho}$$

$$\|L^{s}_{0}\|^2_{2,\rho} = \int_0^\infty 1^2 \, x^s e^{-x} \, dx = \Gamma(s+1)$$

D. CV:

$$\boxed{\|L^{s}_{n}\|^2_{2,\rho} = \frac{1}{n!}\Gamma(s+n+1) \qquad \forall n = 0,1,2.}$$

④ Tzv. vytvořující fce

Def: Vytvořující funkcí pro systém fcí

$\varphi_n = \varphi_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$

nazveme fci

$$F(x,t)$$

která je analytická v okolí $t = 0$,

která splňuje

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n$$

Z teorie F. řad:

$$f \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty) \Rightarrow \exists\, c_n \in \mathbb{C}$$

vzhledem $\{L_n^s(x)\}$

$$c_n = \frac{(f, L_n^s)_{2,\rho}}{\|L_n^s\|^2_{2,\rho}}, \quad \text{re}$$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^s$$

Ex: Rozviňte pro vhodné $a \in \mathbb{R}$ fci e^{-ax} do systému Laguer. pol. na $(0,\infty)$

<u>První krok</u>: Kdy je $e^{-ax} \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$

$$\int_0^\infty (e^{-ax})^2 x^s e^{-x} < \infty \; ?$$

$$\| $$

$$\int_0^\infty x^s e^{-(2a+1)x}\,dx$$

"u 0": $s > -1$ ✓

"u ∞": $2a+1 > 0$ ✓

$$e^{-ax} \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty) \iff a > -\frac{1}{2}$$

Druhý krok:

$$c_n = \frac{1}{\|L^s_n\|^2} \int_0^\infty e^{-ax} \cdot \underbrace{L^s_n(x)}_{\text{(expl. vyjádř.)}} \cdot x^s e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\cancel{\frac{1}{n!}}\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \cancel{x^s} \cancel{e^{-x}} \cancel{\frac{1}{n!}} \cancel{x^{-s}} \cancel{e^{x}} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)} =$$

n-krát per partes

$$= \frac{a^n}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty \underbrace{e^{-ax} \cdot x^{s+n} e^{-x}}_{} dx$$

$(a+1)x = y$ $\qquad$ $\left(a > -\frac{1}{2}\right)$

$(a+1)dx = dy$

$$= \frac{a^n}{\Gamma(s+m+1)} \int_0^\infty \underbrace{e^{-y} \left(\frac{y}{a+1}\right)^{s+m} \frac{dy}{a+1}}_{y^{s+m} e^{-x} \,\cdot\, \text{korr}}$$

$$= \frac{a^n}{\cancel{\Gamma(s+m+1)}} \cancel{\Gamma(s+m+1)} \cdot \frac{1}{(a+1)^{s+m+1}}$$

$$= \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \cdot \left(\frac{a}{a+1}\right)^m = c_m$$

$\Rightarrow$ $a > -\frac{1}{2}$ $\qquad x \in (0, \infty)$

$$\boxed{e^{-ax} = \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n L_n^s(x)}$$

Bsp: $s = 0$, $a = 1$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^s(x)}{2^{n+1}}$$

✓

Si $\Rightarrow t = \dfrac{a}{a+1}$

$\Downarrow$ D.C.V.

$$\boxed{\frac{1}{(1-t)^{p+1}} e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^p(x)\, t^n}$$

$$\parallel$$

$$\underline{\underline{F(x,t)}}$$

<u>HOWGH</u>