3. KOMPAKTNÍ OPERÁTORY

Víme: $\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ Banachovy} \\ T: X \to Y \\ T \text{ lineární} \end{array}\right\}$: T spojitý $\Leftrightarrow$ T omezený, píšeme $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ přičemž $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$.

$\boxed{T(\text{omezená množina}) = \text{omezená mn.}}$

Výrok v rámečku tedy pro lin. operátory charakterizuje <u>spojitost</u>. Matematicky: $\forall A \subset X$ omezená je $T(A)$ omezená v Y.

<u>Def.</u> X, Y Banachovy, $T: X \to Y$ lineární, se nazývá <u>kompaktní</u>, pokud

$\boxed{\overline{T(\text{omezené})} = \text{kompaktní}}$

Matematicky: $\forall A \subset X$ omezená je $\overline{T(A)}$ kompaktní v Y.

Píšeme $T \in \mathcal{C}(X,Y)$, přičemž $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X,X)$.

<u>Pozn.</u>: • $\mathcal{C}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$

D. $A \subset X$ omezená $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\overline{T(A)}$ kompakt $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\overline{T(A)}$ omezená $\underset{(3)}{\Rightarrow}$ $T(A)$ omezená.

(1) plyne z definice $\mathcal{C}(X,Y)$

(2): platí, že K kompakt $\Rightarrow$ K omezený a uzavřený (v lib. Banachově prostoru). <u>Pozor</u>: obrácená implikace obecně neplatí, platí pouze v konečnědimenzionálních NLP.

(3): Sporem: je-li $T(A)$ neomezená, pak $\overline{T(A)} \supseteq T(A)$ je taky neomezená. ☒

• Charakterizace pomocí posloupností:

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$	$T \in \mathcal{C}(X,Y)$
(a) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$ (to je spojitost)	$\{x_n\}$ omezená $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}\ \exists y \in Y$ $T(x_{n_k}) \to y$
(b) $\{x_n\}$ omezená $\Rightarrow \{Tx_n\}$ omezená (to je omezenost)	

Důvod: $\overline{T\{x_n\}}$ je kompaktní a $T(x_n)$ je posloupnost v něm. Lze z ní tedy vybrat konvergentní podposloupnost.

Úvaha: Pokud by celý prostor Y měl vlastnost, že z každé omezené posloupnosti v Y vybereme konvergentní podposloupnost, pak by platilo $\underbrace{\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)}$.

Odůvodnění: Stačí ukázat $\mathcal{L}(X,Y) \subset \mathcal{C}(X,Y)$; buď tedy $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\{x_n\}$ omezená v X $\underset{\mathcal{L}(X,Y)}{\Rightarrow}$ $\{Tx_n\}$ omezená $\underset{\text{vlastnost } Y}{\Rightarrow}$ $\exists\, Tx_{n_k} \to$

Takové vlastnosti prostoru Y budeme říkat „B-W vlastnost" na počest Bolzano-Weierstrassovy věty.

Platí

Lemma. Y Banachův, potom

Y má B-W vlastnost $\Leftrightarrow \dim Y < \infty$ (*)

Nástin důkazu:

$\Leftarrow$: v $\mathbb{R}$ je to B-W věta, v $\mathbb{R}^n$ provedu postupné výběry po složkách. $\dim X = n \Rightarrow$ ztotožním X a $\mathbb{R}^n$ tím, že v X zvolím nějakou bázi a každý prvek $x \in X$ ztotožním s n-ticí souřadnic x vzhledem k této bázi.

$\Rightarrow$: obměněná implikace: je-li $\dim Y = \infty$, vybereme $x_1 \in Y$ a potom induktivně x_{k+1} tak, aby vzdálenost x_{k+1} od $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k)$ byla alespoň 1. Libovolná podposloupnost této posloupnosti má prvky, které jsou vzájemně od sebe vzdáleny alespoň 1 a tedy nesplňuje B-C podmínku.

Lemma (stejné normy)

$Id : X \to X$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ X má B-W vlastnost. (**)

D: jasný.

Z (*) a (**) dostáváme:

Lemma $Id \in \mathcal{L}(X)$ je kompaktní $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

Odtud plyne překvapivé tvrzení: pro $\dim X = \infty$ <u>není identita kompaktním operátorem.</u>

<u>Pozn.</u>: nejčastější s tzv. <u>kompaktním vnořením</u>, což je situace, kdy $Id : X \to Y$ pro $X \subset Y$ a kdy uvažujeme na X a Y <u>různé</u> normy. Pak může nastat situace, kdy je Id kompaktní.

(Př.) Tzv. Rellichova věta: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, omezená, s hladkou hranicí. $W^{1,2}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ \|f\|_{1,2} := \left(\int |f|^2 + |\nabla f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \}$

Potom $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ a navíc $Id : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je <u>kompaktní</u>.

K čemu se to používá: $\{f_n\}$ omezená v $W^{1,2} \Rightarrow \exists f_{n_k} \xrightarrow{v\ L^2}$.

$\boxed{\text{Vlastnosti kompaktních operátorů}}$

① $\dim Y < \infty \Rightarrow \mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$

Ⓓ $A \subset X$ omez. $\underset{T \in \mathcal{L}(X,Y)}{\Rightarrow}$ $T(A)$ omez. $\Rightarrow \overline{T(A)}$ omez. + uzav. v Y
$\Downarrow \dim Y < \infty$
$\overline{T(A)}$ kompaktní.

<u>Důsledek</u>: $\left.\begin{matrix} T \in \mathcal{L}(X),\ \dim X = \infty \\ \dim \mathcal{R}(T) < \infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow T \in \mathcal{C}(X)$

② $S \in \mathcal{L}(X),\ T \in \mathcal{C}(X) \Rightarrow$ (a) $S \circ T \in \mathcal{C}(X)$, (b) $T \circ S \in \mathcal{C}(X)$

Ⓓ $\{x_n\}$ omez. $\Rightarrow$ (a) $Tx_{n_k} \to \overset{S \in \mathcal{L}}{\Rightarrow} S(Tx_{n_k}) \to$

(b) $\{Sx_n\}$ omez. $\overset{T \in \mathcal{C}}{\Rightarrow} T(Sx_{n_k}) \to$

③ $\left.\begin{matrix} T \in \mathcal{C}(X) \\ \dim X = \infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{0 \in \sigma(T)}$

Ⓓ Nechť $0 \notin \sigma(T) \Rightarrow \exists T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$
Pak ale $\underset{\mathcal{C}}{T} \circ \underset{\mathcal{L}}{T^{-1}} = \underset{\mathcal{C}}{Id} \Rightarrow$ spor.

④ $\left.\begin{matrix} T \in \mathcal{C}(X) \\ \lambda \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ a) $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ je uzavřený (Důkaz 5.17)

b) $\underbrace{\mathcal{R}(T - \lambda I) = X}_{\text{na}} \Leftrightarrow T - \lambda I$ prostý
(Důkaz 5.27)

Pozn.: b) se nazývá „Fredholmova alternativa"

Důsledky: $\boxed{\lambda \neq 0}$

a) znamená, že nemůže nastat situace kdy $R(T_\lambda) \neq X$ a $\overline{R(T_\lambda)} = X$

b) znamená, že T_λ je prostý $\iff$ T_λ je na

$\Rightarrow$ Spektrální tabulka pro $\boxed{T_\lambda,\ \text{kde } T \in \mathcal{C}(X),\ \lambda \neq 0}$

	$R(T_\lambda) = X$	$R(T_\lambda) \neq X$, $\overline{R(T_\lambda)} = X$	$\overline{R(T_\lambda)} \neq X$
T_λ prostý, T_λ^{-1} spojitý	$\boxed{\lambda \text{ regul.}}$	×	× b)
T_λ prostý, T_λ^{-1} nespojitý	×	× a) b)	× b)
T_λ není prostý	× b)	× a)	$\boxed{\lambda \text{ vl. č.},\ \lambda \in \sigma_p}$

Tabulka má pro $\lambda \neq 0$ stejný tvar jako pro operátory v konečné dimenzi.

Shrnutí:
- 0 je vždy ve spektru kompaktního operátoru. Je to jediný prvek spektra, který nemusí být vlastním číslem T (i když může)
- Všechny nenulové prvky spektra už jsou vlastní čísla.

(5) $T \in \mathcal{C}(X)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(T)$ $\Rightarrow$
- λ je vl. číslo
- $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda I) < \infty$ (Lukeš 5.15)
- $\underbrace{\operatorname{Ker}(T - \lambda I)}$ je uzavřený podprostor X prostor všech vl. vektorů, příslušných vl. čísla λ.

Def.: Číslo $\dim \operatorname{Ker}(T_\lambda) \in \mathbb{N}$ nazveme násobností vl. čísla $\lambda \in \sigma_p(T)$

Vidím tedy: • každé nenulové vlastní číslo kompaktního operátoru má konečnou násobnost – dimenze podpr. vl. vektorů, který přísluší nenulovému vl. číslu, je konečná

(6) $T \in \mathcal{C}(X)$; $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > \varepsilon\}$ je konečná $\forall \varepsilon > 0$.

Důsledek: • Spektrum kompaktního operátoru je nejvýše spočetné
• Má-li spektrum komp. operátoru hromadný bod, pak jím může být jen bod 0.

Důsledek II: Kompaktní operátor má nejvýše spočetně mnoho LN vlastních vektorů, příslušných nenulovým vlastním číslům.

(O množství vl. vektorů, které přísluší $\lambda = 0$, pokud toto je vl. číslem, nevíme nic)

Proč: máme nejvýše spočetně mnoho nenulových vl. čísel, a každému z nich přísluší konečně mnoho LN vl. vektorů