Funkce exp, ln, sin, cos nejsou racionální funkce

Mirko Rokyta

1. $\sin x$**,** $\cos x$
Ukážeme dokonce, že žádná periodická nekonstantní funkce není racionální. Přesněji, nechť I je omezený interval délky d, nechť $T \geq d$ a nechť $f(x)$ je definována na množině $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbf{R}; \exists k \in \mathbf{Z}, x + kT \in I\}$. Nechť f je nekonstantní na I a nechť $f(x+T) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$. Pak f není racionální funkce:
Nechť pro spor $f(x) = P(x)/Q(x)$, kde P, Q jsou nesoudělné polynomy. Je-li y_0 prvek z oboru hodnot funkce f, existuje nekonečně mnoho hodnot x, pro které $f(x) = y_0$. Protože rovnice $f(x) = y_0$ je na množině $\mathcal{D}(f)$ ekvivalentní rovnici $y_0 Q(x) = P(x)$, existuje tudíž nekonečně mnoho hodnot x této rovnici vyhovujících. To však nemůže pro nesoudělné nekonstantní polynomy P, Q nastat.

2. $\exp x$
Nechť pro spor $\exp x = P(x)/Q(x)$, kde P, Q jsou nesoudělné polynomy. Potom po zderivování, s využitím rovnosti $(e^x)' = e^x$ dostaneme

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}\,, \tag{1}$$

a tedy po úpravě

$$P(Q + Q') = P'Q\,. \tag{2}$$

Protože P a Q jsou nesoudělné, plyne z předchozí rovnosti, že P musí dělit P'. To může nastat pouze tehdy, je-li P rovno (nutně nenulové) konstantě. Z (1) pak dostaneme $Q = -Q'$, což není splněno pro žádný nenulový polynom Q (jak plyne porovnáním stupně Q a Q').

3. $\ln x$
Nechť pro spor $\ln x = P(x)/Q(x)$, kde P, Q jsou nesoudělné polynomy. Potom po zderivování

$$Q^2 = x(P'Q - PQ')\,, \tag{3}$$

odkud vidíme, že x dělí Q^2, a tedy x dělí Q. Proto lze psát $Q = x^k R$, kde $R(0) \neq 0$, $k \geq 1$. Dosazením do (3) dostaneme po úpravě

$$x^k R^2 = xP'R - xPR' - kPR\,. \tag{4}$$

Poslední člen je tedy dělitelný x, R ovšem není, tedy musí být P, což je spor s nesoudělností P, Q.