Taháky z MA

Posloupnosti a řady funkcí

(aneb “K čemu je dobrá stejnoměrná konvergence ($\rightrightarrows$)”)

1. Pro posloupnosti funkcí platí: pokud je splněno:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)}$$

- $f_n \rightrightarrows$ na M, x_0 je hromadný bod M
- $\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ vlastní pro všechna n

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)}$$

- $f_n' \rightrightarrows$ na intervalu J
- $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ pro jeden pevný bod $x_0 \in J$

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)^{(k)} = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x)}$$

- $f_n^{(k)} \rightrightarrows$ na intervalu J
- $\exists \lim_{n\to\infty} f_n^{(m)}(x_m)$ pro pevné body $x_m \in J$, $m = 0, \dots, k-1$

$$\boxed{\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,dx}$$

- $f_n \rightrightarrows$ na intervalu J
- $F_n(x) := \int f_n(x)\,dx$
- $\exists \lim_{n\to\infty} F_n(x_0)$ pro jeden pevný bod $x_0 \in J$

$$\boxed{\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx}$$

- $f_n \rightrightarrows$ na intervalu $\langle a, b\rangle$
- $f_n \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$

2. Pro řady funkcí platí: pokud je splněno: (všechny sumy jsou $\sum\limits^{\infty}$)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)}$$

- $\sum f_n \rightrightarrows$ na M, x_0 je hromadný bod M
- $\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ vlastní pro všechna n

$$\boxed{\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)}$$

- $\sum f_n' \rightrightarrows$ na intervalu J
- $\exists \sum f_n(x_0)$ pro jeden pevný bod $x_0 \in J$

$$\boxed{\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)}$$

- $\sum f_n^{(k)} \rightrightarrows$ na intervalu J
- $\exists \sum f_n^{(m)}(x_m)$ pro pro pevné body $x_m \in J$, $m = 0, \dots, k-1$

$$\boxed{\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n(x)\,dx}$$

- $\sum f_n \rightrightarrows$ na intervalu J
- $F_n(x) := \int f_n(x)\,dx$
- $\exists \sum F_n(x_0)$ pro jeden pevný bod $x_0 \in J$

$$\boxed{\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx}$$

- $\sum f_n \rightrightarrows$ na intervalu $\langle a, b\rangle$
- $f_n \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$

Jak zjistím stejnoměrnou konvergenci

(1) **Hlavní kritérium pro posloupnosti funkcí (tzv. věta o σ_n):**
- fixuj $x \in M$ a udělej $n \to \infty$, dostaneš tím bodovou limitu $f_n(x) \to f(x)$;
- fixuj n a spočti $\sigma_n := \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$;
- pak platí: $\sigma_n \to 0 \iff f_n \rightrightarrows f$ na M.

(2) **Hlavní kritérium pro řady funkcí (Weierstrassova věta):**
- najdu-li pro každé n funkce $g_n(x)$ takové, že $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ $\forall x \in M$, tak platí: $\sum g_n(x) \rightrightarrows$ na $M \Rightarrow \sum f_n(x) \rightrightarrows$ na M, $\sum |f_n(x)| \rightrightarrows$ na M.
- najdu-li pro každé n dokonce konstanty c_n takové, že $|f_n(x)| \leq c_n$ $\forall x \in M$, tak platí: $\sum c_n$ je vlastní $\Rightarrow \sum f_n(x) \rightrightarrows$ na M, $\sum |f_n(x)| \rightrightarrows$ na M.

(3) **Další možnosti:**
- nepodaří-li se ukázat (či se dokonce vyvrátí) stejnoměrná konvergence na *celé* množině M, může situaci zachránit vhodné zmenšení množiny M (odstraní se malá okolí "nepříjemných" bodů); poté postupujte dle bodů (1), resp. (2);
- nestejnoměrně konvergující řadu někdy ihned odhalí nutná podmínka, tj.: $f_n \not\rightrightarrows 0$ na M implikuje $\sum f_n \not\rightrightarrows$ na M;
- podobně může pomoci věta o spojitosti limitní funkce: je-li $f_n \in C(M)$, $f_n(x) \to f(x)$ (bodově), a přitom $f \notin C(M)$, pak $f_n \not\rightrightarrows f$ na M; podobně $f_n \in C(M)$, $\sum f_n(x) = s(x)$ (bodově), a přitom $s \notin C(M)$, pak $\sum f_n(x) \not\rightrightarrows s(x)$ na M;
- někdy pomůže tzv. Diniho věta: $f_n, f \in C(K)$, K kompakt, $f_n(x) \to f(x)$ (bodově) a $f_n \geq f_{n+1} \geq \dots \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na K;
- pro řady střídající znaménko existují verze Abel-Dirichletova a Leibnizova kritéria.

Speciální případ: mocninné řady

(1) **Mocninná řada:** $\boxed{f(z) := \sum_{n}^{\infty} a_n z^n}$ $a_n, z \in \mathbb{C}$. Pro každou mocninnou řadu existuje číslo $R \in \langle 0, \infty \rangle$ (tzv. *poloměr konvergence*) takové, že:
- řada konverguje ve všech bodech uvnitř kruhu $K_R := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$;
- řada diverguje ve všech bodech vně kruhu K_R;
- řada konverguje *stejnoměrně* na všech kompaktních podmnožinách K_R;
- uvnitř intervalu $(-R, R)$ má funkce f definovaná řadou všechny derivace a všechny jsou spojité, má tam i primitivní funkci;
- uvnitř intervalu $(-R, R)$ lze mocninnou řadu libovolněkrát derivovat a integrovat člen po členu; výsledné řady budou mít opět poloměr konvergence R; označím-li $f_n(x) := a_n x^n$, platí uvnitř intervalu $(-R, R)$ všechny vztahy pro řady, uvedené na předchozí straně.

(2) **Poloměr konvergence** mocninné řady lze spočítat podle vzorce (jen a pouze zde používáme konvenci $1/0 = +\infty$, $1/\infty = 0$):

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{nebo} \quad \frac{1}{R} = \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$