Součet k-tých mocnin přirozených čísel

Mirko Rokyta

Vzorec $1+2+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$ je poměrně oblíbený. Někteří znají i vztah $1^2+2^2+\cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. V dalším ukážeme, jak lze poměrně snadno odvodit vzorce pro součty $S_k(n) := 1^k + 2^k + \cdots + n^k$. Půjde o rekurentní vztah, kdy pro odvození vzorce pro $S_k(n)$ bude potřeba znát všechny vztahy pro $S_j(n)$, $j = 1, \ldots, k-1$.
Podle binomické věty platí:

$$(m+1)^{k+1} = m^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} m^j + 1\,.$$

Výraz m^{k+1} převedeme na levou stranu a vzniklé formule sečteme pro $\sum_{m=1}^{n}$:

$$\sum_{m=1}^{n} (m+1)^{k+1} - \sum_{m=1}^{n} m^{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} \sum_{m=1}^{n} m^j + n\,.$$

Vlevo jde o tzv. „žebříkový součet“, z obou součtů zůstane jen první a poslední člen. Vpravo si uvědomíme, že $\sum_{m=1}^{n} m^j = S_j(n)$. Tedy máme

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n) + n\,.$$

Odtud lze vypočíst $S_k(n)$:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left[(n+1)^{(k+1)} - 1 - n - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right], \tag{1}$$

což je hledaný vzorec. Postupnou jeho aplikací můžeme snadno ukázat, že

$$\begin{aligned}
1^1 + 2^1 + \cdots + n^1 &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}\,,\\
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}\,,\\
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}\,,\\
1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)\,(3\,n^2+3\,n-1)}{30}\,,\\
1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} = \frac{n^2\,(2\,n^2+2\,n-1)\,(n+1)^2}{12} \ \ldots
\end{aligned}$$

... atd. Indukcí z (1) hned plyne, že $S_k(n)$ je polynom stupně $k+1$ v proměnné n. Dále je z (1) jasné, že koeficient u n^{k+1} je $\frac{1}{k+1}$. Tedy máme například, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

pro všechna $k \in N$.