Kapitola 5

Appendix

5.1 Fundamentální řešení RVT

V předcházející kapitole jsme ukázali užitečnost fundamentálního řešení Laplaceovy-Poissonovy rovnice. Ukážeme dva způsoby - metodu Fourierovy transformace a metodu škálování - odvození fundamentálního řešení rovnice vedení tepla.

5.1.1 Metoda Fourierovy transformace

V prostoru $S'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ hledáme řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta_{(x,t)} = \delta_x \otimes \delta_t \tag{5.1}$$

(indexy x a t je označena Diracova míra s nosičem v počátku v příslušných proměnných.) Předpokládejme, že distribuce u je funkcí proměnné t s hodnotami v $S'(\mathbb{R}^d)$. Označíme-li

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t) e^{-i(x,\xi)}\, dx, \tag{5.2}$$

řeší funkce $\hat{u}$ rovnici

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + |\xi|^2 \hat{u} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \delta_t. \tag{5.3}$$

V této rovnici je ξ parametr a řešení indukuje následující

Lemma 5.1.1 (Fundamentální řešení obyčejné rovnice) *Buďte $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$, z řešící rovnice*

$$z^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^{(i)} = 0, \tag{5.4}$$

splňující počáteční podmínky $z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-2)}(0) = 0$, $z^{(n-1)}(0) = 1$. Pak funkce u

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } t \leq 0\,, \\ z(t) & \textit{pro } t > 0 \end{cases}$$

je řešením rovnice

$$u^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{(i)} = \delta_x \,.$$

Důkaz. Důkaz plyne ihned z definice distributivní derivace. □

Použijeme-li lemma, dostáváme, že

$$\hat{u}(\xi, t) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-|\xi|^2 t} & \text{pro } t > 0\,, \\ 0 & \text{pro } t \le 0\,. \end{cases} \tag{5.5}$$

Zpětnou Fourierovou transformací spočítáme

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{pro } t > 0\,, \\ 0 & \text{pro } t \le 0\,. \end{cases} \tag{5.6}$$

Cvičení 5.1.2 *Zformulujte a dokažte obdobné tvrzení pro fundamentální řešení s nosičem v intervalu* $(-\infty, 0]$.

5.1.2 Metoda škálování

Snadno zjistíme, že je-li funkce u řešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0\,, \tag{5.7}$$

pak i funkce

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^2 t) \tag{5.8}$$

řeší RVT pro jakékoliv pevné kladné λ. Předpokládejme, že $u = 0$ pro $t < 0$. Zvolíme-li (pro kladné t) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$, hledáme funkci v, která závisí pouze na proměnné $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$ tak, že

$$G(x, t) = \frac{1}{t^{\alpha/2}} u(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1) = v(\frac{x}{\sqrt{t}}) \frac{1}{t^{\alpha/2}}\,. \tag{5.9}$$

Laplaceův operátor je invariantní vzhledem k otočení soustavy souřadné v $\mathbb{R}^d$, zkusme tedy najít i řešení, které závisí pouze na vzdálenosti od počátku v $\mathbb{R}^d$. Označme

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{t}} \in (0, \infty) \tag{5.10}$$

a hledáme $w : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$G(x, t) = \frac{1}{t^{\alpha/2}} \cdot w(\frac{|x|}{\sqrt{t}}) \tag{5.11}$$

řešila RVT na poloprostoru $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$. Dostáváme

$$-\frac{1}{t^{\alpha/2+1}}\left(\frac{\alpha}{2}w(y)+\frac{1}{2}yw'(y)+\frac{d??-1}{y}w'(y)+w''(y)\right)=0\,. \tag{5.12}$$

Zvolme $\alpha = d$. Pak lze rovnici upravit na tvar

$$\frac{1}{2}(y^d w)' + (y^{d-1}w')' = 0\,. \tag{5.13}$$

Odkud je

$$\frac{1}{2}y^d w + y^{d-1}w' = \text{konst} \tag{5.14}$$

na $(0,\infty)$.

Chceme-li, aby výsledné řešení bylo diferencovatelné na nadrovině $t = 0$ ve všech bodech $[x,0]$ kromě $x = 0$, budeme požadovat, aby se $w(\frac{x}{\sqrt{t}})$ i $w'(\frac{x}{\sqrt{t}})$ dostatečně rychle blížily k nule pro $t \to 0_+$. Pak je konstanta v poslední rovnici nulová a dostáváme, že

$$w' = -\frac{1}{2}yw\,, \tag{5.15}$$

tj.

$$w(y) = C\cdot e^{\frac{-y^2}{4}}\,. \tag{5.16}$$

Dostáváme tak, že funkce

$$G(x,t) = \begin{cases} C\cdot \frac{1}{t^{d/2}}\cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{pro } t>0\,,\\ 0 & \text{pro } t<0 \text{ a pro } t=0, x\neq 0\end{cases} \tag{5.17}$$

řeší rovnici vedení tepla na $\mathbb{R}^{d+1}\setminus\{[0,0]\}$.

Lemma 5.1.3 *(Vlastnosti fundamentánlího řešení pro rovnici vedení tepla) Funkce G, definovaná vztahem (ODKAZ 4.5), je nekonečně diferencovatelná a nezáporná na $R^{d+1}\setminus\{[0,0]\}$ a platí*

1. *G řeší rovnici vedení tepla na $R^{d+1}\setminus\{[0,0]\}$*
2. *pro každé $t>0$ je $\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\,dx = 1$*
3. $$\lim_{t\to 0_+} G(x,t) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x\neq 0\,,\\ \infty & \textit{pro } x=0\end{cases} \tag{5.18}$$
4. *ve smyslu distribucí platí* $$\lim_{t\to 0_+} G(x,t) = \delta_x \tag{5.19}$$

Důkaz. Diferencovatelnost funkce G plyne ihned z vlastností exponenciální funkce.

1. je zřejmé pro $[x,t]$ s $t \leq 0$. Buď $t > 0$. Pak je

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(x,t) &= -\left(\tfrac{d}{2t} + \tfrac{|x|^2}{4t^2}\right)\tfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \\ \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,t) &= \left(\tfrac{x_i}{2t}\right)\tfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned} \tag{5.20}$$

a

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{5.21}$$

2. Použijeme-li substituce $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$, dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\,dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx = \frac{1}{\pi^{d/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|z|^2}\,dz \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^d} \cdot \prod_{j=0}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_j^2}\,dz_j = 1. \end{aligned} \tag{5.22}$$

3. Zřejmé z vlastností exponenciální funkce.

4. Buď $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dokážeme, že

$$\lim_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\varphi(x)\,dx = \varphi(0). \tag{5.23}$$

Zvolme $\epsilon > 0$. Ze spojitosti funkce φ existují $\delta > 0$ takové, že pro $x \in \mathcal{B}(0,\delta)$ je $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \epsilon$. Označme $K = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$ a nalezněme $R > 0$ tak velké, aby

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}(0,R)} e^{-|z|^2}\,dz \quad < \quad \frac{\epsilon}{2K}\pi^{d/2}. \tag{5.24}$$

Pak z 2 plyne, že

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\varphi(x)\,dx &= \varphi(0) + \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \\ &= \varphi(0) + \left(\int_{\mathcal{B}(0,\delta)} + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{B}(0,\delta)}\right) G(x,t)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \\ &= \varphi(0) + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Odhadneme

$$|I_1| \leq \int_{\mathcal{B}(0,\delta)} G(x,t)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx < \epsilon \tag{5.25}$$

a

$$|I_2| \leq 2K \cdot \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{B}(0,\delta)} G(x,t)\,dx = \frac{2K}{\pi^{d/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{B}(0,\frac{\delta}{4t})} e^{-|z|^2}\,dz < \epsilon \tag{5.26}$$

pro všechna $t > 0$, pro něž $\frac{\delta}{4t} \geq R$, tj. $t \leq \frac{\delta}{4R}$.

□

Poznámka 5.1.4 *Povšimněme si, že v důkazu jsme využili pouze spojitost a omezenost funkce φ, rovnost 5.23 tedy platí pro jakoukoliv omezenou $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.*

5.2 Fourierova metoda pro řešení rovnice vedení tepla

5.2.1 Nulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

Mějme zadanou následující úlohu pro rovnici vedení tepla (rovnice s nulovou pravou stranou, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka):

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T) \\ \text{počáteční podmínka} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0, L] \\ \text{okrajová podmínka} & u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0, T] \end{array} \tag{5.27}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$.

Nyní si předvedeme, jakým způsobem lze najít obecnou formuli pro řešení takovéto úlohy. Zdůrazňujeme, že se (zatím) v žádném případě nesnažíme o *odvození*, tzn. nekontrolujeme správnost prováděných operací. Pouze se snažíme předvést úvahy, které nás k výsledné formuli mohou dovést.

Představme si nyní, že funkci $u(x,t)$ závislou na čase (t) i prostoru (x), lze zapsat jako součin dvou funkcí $X(x)$ a $T(t)$, z nichž každá je funkcí pouze jedné proměnné

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

dosadíme-li takto definovanou funkci do rovnice (5.27) dostaneme

$$X(x)\frac{dT(t)}{dt} - \kappa^2 T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} = 0,$$

což napíšeme takto:

$$\frac{1}{\kappa^2 T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

Nyní si prohlédneme obě strany rovnice. Levá strana je evidentně pouze funkcí proměnné t, zatímco pravá strana je závislá pouze na proměnné x. Rovnice má platit pro $x \in (0, L)$ a pro $t \in (0, T)$, čehož můžeme při zmíněných funkčních závislostech dosáhnout pouze tehdy, jsou-li obě strany rovnice rovné konstantě. Označme si tuto konstantu λ. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=\lambda \tag{5.28}$$

$$\frac{1}{\kappa^2T(t)}\frac{dT(t)}{dt}=\lambda \tag{5.29}$$

Uvědomíme si, že k obyčejné diferenciální rovnici (5.28) máme z zadání (5.27) i okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(L) = 0$ (odpovídá $u(0,t) = 0$ a $u(L,t) = 0$). To je dost informací na to, abychom našli řešení rovnice (5.28). Pro pořádek si novou úlohu zformulujeme: hledáme řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda X(x), \tag{5.30}$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} X(0)&=0 \\ X(L)&=0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Řešení této rovnice se bude principiálně lišit podle znaménka konstanty λ:

- je-li $\lambda > 0$, pak je řešením rovnice (5.30) funkce

  $$X(x) = c_1e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2e^{-x\sqrt{\lambda}},$$

  kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek (5.31). Je zřejmé, že okrajové podmínky můžeme splnit pouze volbou $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, tzn. $X(x) \equiv 0$. Tento výsledek je pro řešení původní úlohy (5.27) nezajímavý.

- je-li $\lambda = 0$, pak je řešením rovnice (5.30) funkce

  $$X(x) = c_1x + c_2,$$

  kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek (5.31). Je zřejmé, že okrajové podmínky můžeme opět splnit pouze volbou $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, tzn. $X(x) \equiv 0$. Tento výsledek je pro řešení původní úlohy (5.27) nezajímavý.

- je-li $\lambda < 0$, pak je řešením rovnice (5.30) funkce

  $$X(x) = c_1e^{ix\sqrt{|\lambda|}} + c_2e^{-ix\sqrt{|\lambda|}},$$

  resp. (pro naše účely vhodnější zápis)

  $$X(x) = c_1 \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) + c_2 \cos\left(x\sqrt{|\lambda|}\right)$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek (5.31). Má platit

$$X(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$
$$X(L) = 0 \rightarrow c_1 \sin\left(L\sqrt{|\lambda|}\right) + c_2 \cos\left(L\sqrt{|\lambda|}\right) = 0$$

Opět máme triviální řešení $c_1 = 0,\ c_2 = 0$. Rovnice lze ale také splnit jinak. Okrajové podmínky budou splněny i v případě, že zaručíme $\sin\left(L\sqrt{|\lambda|}\right) = 0$, pak může být c_1 nenulové a budeme mít netriviální řešení. Hledáme tedy takové λ záporné, aby platilo

$$\sin\left(L\sqrt{|\lambda|}\right) = 0, \text{ neboli } L\sqrt{|\lambda|} = n\pi,\ n \in \mathbf{N}$$

Bude-li konstanta λ ve tvaru

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{5.32}$$

pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ dostaneme netriviální řešení rovnice (5.30) s okrajovými podmínkami (5.31) ve tvaru

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \tag{5.33}$$

jinak: pro každé přirozené číslo n a libovolnou příslušnou konstantu c_n je funkce (5.33) řešením rovnice (5.30) s podmínkami (5.31).

Tímto jsme se vypořádali s rovnicí (5.28), stále nám zbývá rovnice (5.29). Nyní už máme kokrétní návrh jaká musí být konstanta λ, abychom dostali netriviální řešení v (5.28). Vyberme si tedy nějaké přirozené číslo n, najděme k němu příslušnou konstantu λ_n dle (5.32) a příslušnou funkci $X_n(x)$ dle (5.33). Vezmeme takto zvolené λ_n, dosadíme ho do rovnice (5.29) a dostaneme

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \lambda_n \kappa^2 T_n(t),$$

řešením této rovnice je funkce

$$T_n(t) = a_n e^{\lambda_n \kappa^2 t} = a_n e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t}, \tag{5.34}$$

kde a_n je konstanta.

Nyní spojíme všechny dílčí výsledky dohromady. Připomeneme si, že funkci $u(x,t)$, řešící rovnici (5.27) jsme hledali ve tvaru $u(x,t) = X(x)T(t)$. Na předchozích řádcích jsme našli funkce $u_n(x,t)$, které pro libovolné přirozené číslo n splňují rovnici a okrajovou podmínku (součin konstant c_n a a_n jsme označili c_n).

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(x) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \tag{5.35}$$

K úplnému řešení problému (5.27) je ještě třeba splnit počáteční podmínku. Představme si, že řešení celého problému můžeme napsat jako nekonečnou sumu funkcí $u_n(x,t)$, aneb

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),$$

takto navržená funkce nepochybně splňuje okrajové podmínky a možná ji lze derivovat člen po členu, tzn. řeší i rovnici. Zbývá vyřešit otázku nabývání počáteční podmínky. Chceme, aby platilo $u(x,0) = \varphi(x)$, aneb

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = \varphi(x), \text{ pro } x \in [0,L],$$

což neznamená nic jiného, než že koeficienty c_n je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady (možná, že se Fourierova řada chová dobře). Koeficient c_n tedy spočteme jako

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx \tag{5.36}$$

Shrňme si: v ideálním případě (naznačené kroky obstojí i při rigorózním postupu) je řešením problému (5.27) funkce

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \text{ kde } c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx \tag{5.37}$$

5.2.2 Nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\ \text{počáteční podmínka} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\ \text{okrajová podmínka} & u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0,T] \end{array} \tag{5.38}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, f funkce proměnných x a t.

Již umíme řešit rovnici s nulovou pravou stranou a nulovou okrajovou podmínkou (5.37). Předpokládejme nyní, že pravou stranu lze rozvést do sinové Fourierovy řady vůči prostorové proměnné, aneb

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \text{ kde } f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx$$

Řešení problému (5.38) budeme hledat metodou variace konstant, představíme si, že koeficienty c_n v rozvoji funkce $u(x,t)$ nejsou konstantní, ale jsou to funkce času

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

a dosadíme takto navrženou funkci do rovnice (5.38), opět derivujeme čistě formálně člen po členu ... Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{dc_n(t)}{dt} e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} - f_n(t)\right) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = 0,$$

což má platit pro každé $x \in (0,L)$ a $t \in (0,T)$. Pro každé n proto musí být splněna obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = f_n(t) e^{\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t},$$

jejímž řešením je

$$c_n(t) = c_n(0) + \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 \tau} d\tau$$

Dosadíme–li takto vypočtené koeficienty $c_n(t)$ do rozvoje funkce $u(x,t)$, bude výsledkem

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(0) + \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 \tau} d\tau\right) e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),$$

konstanty $c_n(0)$ určíme z počáteční podmínky úlohy (5.38). Chceme, aby platilo $u(x,0) = \varphi(x)$, aneb

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = \varphi(x)$$

což neznamená nic jiného, než že koeficienty $c_n(0)$ je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady.

Shrňme si: v ideálním případě (naznačené kroky obstojí i při rigorózním postupu) je řešením problému (5.38) funkce

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) + \left(\int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 (t-\tau)} d\tau\right) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \tag{5.39}$$

kde

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) dx$$

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x,t) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) dx$$

5.2.3 Nulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nulová počáteční podmínka

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T) \\
\text{počáteční podmínka} & u(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \\
\text{okrajová podmínka} & u(0, t) = l(t) & t \in [0, T] \\
 & u(L, t) = p(t) &
\end{array}
\tag{5.40}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$.

S nenulovými okrajovými podmínkami se vypořádáme tak, že úlohu (5.40) převedeme na úlohu (5.38). Jak toho dosáhneme? Funkci $u(x, t)$ si představíme jako součet dvou funkcí

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

kde funkci $v(x, t)$ definujeme takto

$$v(x, t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) l(t) + \frac{x}{L} p(t),$$

pak platí, že

$$
\begin{aligned}
v(0, t) &= l(t) \\
v(L, t) &= p(t)
\end{aligned}
$$

Funkce $v(x, t)$ tedy splňuje okrajové podmínky problému (5.40). Dosadíme–li rozepsanou funkci $u(x, t)$ do zadání rovnice (5.40), dostaneme

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

resp. po vypočtení pravé strany dle definice funkce $v(x, t)$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dl(t)}{dt} + \frac{x}{L} \frac{dp(t)}{dt}\right).$$

Nyní zformulujeme nový problém pro funkci $w(x, t)$:

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial w}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dl(t)}{dt} + \frac{x}{L} \frac{dp(t)}{dt}\right) & \\
 & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T) & \\
\text{počáteční podmínka} & w(x, 0) = -v(x, 0) = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) l(0) + \frac{x}{L} p(0)\right) & x \in [0, L] \\
\text{okrajová podmínka} & w(0, t) = 0 & t \in [0, T] \\
 & w(L, t) = 0 & f
\end{array}
\tag{5.41}
$$

Tento problém již dokážeme řešit (zadání viz. (5.38), řešení viz. (5.39)). Je–li $w(x, t)$ řešení právě definovaného problému, pak je $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$ řešení původního problému (5.40), skutečně tato funce řeší rovnici a splňuje počáteční a okrajové podmínky.

5.2.4 Nenulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\
\text{počáteční podmínka} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\
\text{okrajová podmínka} & u(0,t) = l(t) & t \in [0,T] \\
 & u(L,t) = p(t) &
\end{array}
\tag{5.42}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, f funkce proměnných x a t.

Řešení problému převedeme na řešení již známých případů. Hledanou funkci $u(x,t)$ rozdělíme na dvě funkce, funkci $u_h(x,t)$, která zajistí splnění okrajových podmínek, a funkci $u_r(x,t)$, která zajistí splnění rovnice. Definujeme tedy rozklad $u(x,t) = u_h(x,t) + u_r(x,t)$ a příslušné problémy

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u_r}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\
\text{počáteční podmínka} & u_r(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\
\text{okrajová podmínka} & u_r(0,t) = 0 & t \in [0,T] \\
 & u_r(L,t) = 0 &
\end{array}
$$

Toto je problém, který již umíme řešit (zadání viz. (5.38), řešení viz. (5.39)).

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u_h}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\
\text{počáteční podmínka} & u_h(x,0) = 0 & x \in [0,L] \\
\text{okrajová podmínka} & u_h(0,t) = l(t) & t \in [0,T] \\
 & u_h(L,t) = p(t) &
\end{array}
$$

Tento problém jsme již také zkoumali (5.40).

Z linearity úlohy je zřejmé, že funkce $u(x,t)$, která je součtem funkcí $u_h(x,t)$ a $u_r(x,t)$ je řešením původní úlohy (5.42).

5.3 Fourierova metoda řešení vlnové rovnice

5.3.1 Nulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulové počáteční podmínky

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\
\text{počáteční podmínky} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\
 & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \\
\text{okrajové podmínky} & u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0,T]
\end{array}
\tag{5.43}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$.

Budeme postupovat stejným způsobem jako při řešení problému (5.27). Předpokládejme, že funkci $u(x,t)$ lze zapsat jako součin

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

dosadíme toto vyjádření funkce $u(x,t)$ do rovnice (5.43) a výsledkem je

$$X(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2} - c^2T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} = 0,$$

což napíšeme takto:

$$\frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

Levá strana rovnice je opět pouze funkcí t, pravá strana je závislá pouze na x. Aby rovnice měla řešení, musí se obě strany rovnat konstantě, kterou pojmenujeme λ. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda \tag{5.44}$$

$$\frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \lambda \tag{5.45}$$

K rovnici (5.44) máme navíc ze zadání (5.43) okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(L) = 0$ (odpovídá $u(0,t) = 0$ a $u(L,t) = 0$). Stejnou rovnici jsme již řešili v části věnované rovnici vedení tepla (5.28), a proto můžeme okamžitě použít známý výsledek (5.33): Rovnici (5.44) řeší každá funkce ve tvaru

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \tag{5.46}$$

kde n je libovolné přirozené číslo. Konstanta λ musí být zvolena jako

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{5.47}$$

Nyní k danému přirozenému číslu n nalezneme příslušnou funkci $X_n(x)$ a konstantu λ_n. S touto konstantou vyřešíme rovnici (5.45)

$$\frac{d^2T_n(t)}{dt^2} = \lambda_n c^2 T_n(t),$$

řešením je funkce

$$T_n(t) = g_n \sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n \cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right),$$

kde g_n a e_n jsou libovolné konstanty.

Spojíme oba částečné výsledky $X_n(x)$ a $T_n(t)$ v jeden a dostaneme funkci $u_n(x,t)$, která řeší rovnici v problému (5.43) a splňuje okrajové podmínky (přeznačili jsme konstanty)

$$u_n(x,t) = X_n(t)T_n(t) = \left(g_n \sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n \cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

Řešení celého problému budeme opět hledat jako nekonečný součet funkcí $u_n(x,t)$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)+e_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),$$

Dále předpokládejme, že funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ lze rozvést do sinové Fourierovy řady, neboli

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(x\tfrac{n\pi}{L}\right),\ \text{kde}\ \varphi_n=\tfrac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\left(x\tfrac{n\pi}{L}\right)dx$$
$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(x\tfrac{n\pi}{L}\right),\ \text{kde}\ \psi_n=\tfrac{2}{L}\int_0^L\psi(x)\sin\left(x\tfrac{n\pi}{L}\right)dx$$

Splnění počátečních podmínek znamená (derivujeme člen po členu ...)

$$u(x,0)=\varphi(x)\to\sum_{n=1}^{\infty}e_n\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\to\sum_{n=1}^{\infty}g_n\frac{n\pi c}{L}\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

musí tedy být

$$e_n=\varphi_n$$
$$g_n=\frac{L}{n\pi c}\psi_n$$

Shrňme si: v ideálním případě (naznačené kroky obstojí i při rigorózním postupu) je řešením problému (5.43) funkce

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)+e_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),\tag{5.48}$$

kde

$$e_n=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$
$$g_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^L\psi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

5.3.2 Nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulové počáteční podmínky

$$\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f & \text{pro } x\in(0,L)\,,t\in(0,T)\\
\text{počáteční podmínky} & u(x,0)=\varphi(x) & x\in[0,L]\\
 & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) & \\
\text{okrajové podmínky} & u(0,t)=u(L,t)=0 & t\in[0,T]
\end{array}\tag{5.49}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, f funkce proměnných x a t.

Řešení problému najdeme metodou variace konstant. Předpokládejme nyní, že pravou stranu lze rozvést do sinové Fourierovy řady vůči prostorové proměnné, aneb

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \text{ kde } f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) dx$$

Víme, že řešení úlohy s nulovou pravou stranou je dáno vzorcem (5.48), představme si nyní, že konstanty g_n a e_n závisí na čase

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(t)\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n(t)\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),$$

Dosadíme navrženou funkci do rovnice a provedeme úvahy obvyklé při řešení obyčejných diferenciálních rovnic metodou variace konstant (opět derivujeme člen po členu)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{dg_n}{dt}\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + \frac{de_n}{dt}\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)}_{\text{požadujeme rovné nule}} + g_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) - e_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\times$$
$$\times\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

pak dosazení do rovnice dává

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\left(\frac{dg_n}{dt}\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + \frac{de_n}{dt}\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),$$

celkem tedy požadujeme

$$\begin{aligned}\frac{dg_n}{dt}\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + \frac{de_n}{dt}\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) &= 0\\ \frac{n\pi c}{L}\left(\frac{dg_n}{dt}\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + \frac{de_n}{dt}\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right) &= f_n\end{aligned}$$

odkud

$$\frac{dg_n}{dt} = \frac{L}{n\pi c}f_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) \to g_n(t) = g_n(0) + \frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\cos\left(\tau\frac{n\pi c}{L}\right) d\tau$$

$$\frac{de_n}{dt} = -\frac{L}{n\pi c}f_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) \to g_n(t) = e_n(0) - \frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\tau\frac{n\pi c}{L}\right) d\tau$$

kde $g_n(0)$ a $e_n(0)$ jsou konstanty. Získaný výsledek dosadíme zpět do vyjádření funkce $u(x,t)$

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(& g_n(0) \sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n(0)\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\Big) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \\ & + \left(\frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\cos\left(\tau\frac{n\pi c}{L}\right)\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)d\tau\right. \\ & \left. - \frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\tau\frac{n\pi c}{L}\right)\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)d\tau\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \end{aligned}$$

což je po malé úpravě goniometrickým vzorcem

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(& g_n(0) \sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n(0)\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\Big) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \\ & + \left(\frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left((t-\tau)\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \end{aligned} \tag{5.50}$$

konstanty $g_n(0)$ a $e_n(0)$ určíme z počátečních podmínek stejným způsobem jako v předcházejícím případě

$$e_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

$$g_n(0) = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \psi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

a koeficienty f_n jsou koeficienty rozvoje funkce $f(x,t)$ do sinové Fourierovy řady v prostorové proměnné

$$f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx.$$

5.3.3 Nulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nulové počáteční podmínky

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\ \text{počáteční podmínky} & u(x,0) = 0 & x \in [0,L] \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \\ \text{okrajové podmínky} & u(0,t) = l(t) & t \in [0,T] \\ & u(L,t) = p(t) & \end{array} \tag{5.51}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$.

Problém převedeme na úlohu s nenulovou pravou stranou, nenulovými počátečními podmínkami a nulovými okrajovými podmínkami (5.49), kterou již umíme řešit (5.50). Stejně jako v případě rovnice vedení tepla (5.40) si funkci $u(x,t)$ rozdělíme na dvě funkce

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$$

a funkci $v(x,t)$ definujeme jako

$$v(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) l(t) + \frac{x}{L} P(t),$$

pak platí, že

$$\begin{aligned} v(0,t) &= l(t) \\ v(L,t) &= p(t) \end{aligned}$$

Funkce $v(x,t)$ tedy splňuje okrajové podmínky problému (5.51). Dosadíme–li rozepsanou funkci $u(x,t)$ do zadání rovnice (5.51), dostaneme

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

resp. po vypočtení pravé strany dle definice funkce $v(x,t)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{d^2 l(t)}{dt^2} + \frac{x}{L} \frac{dP^2(t)}{dt^2}\right).$$

Nyní zformulujeme nový problém pro funkci $w(x,t)$:

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{d^2 l(t)}{dt^2} + \frac{x}{L} \frac{dp^2(t)}{dt^2}\right) & \\ & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) & \\ \text{počáteční podmínky} & w(x,0) = -v(x,0) = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) l(0) + \frac{x}{L} p(0)\right) & x \in [0,L] \\ & \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = -\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dl}{dt}(0) + \frac{x}{L} \frac{dr}{dt}(0)\right) & \\ \text{okrajové podmínky} & u(0,t) = 0 & t \in [0,T] \\ & u(L,t) = 0 & \end{array}$$

Tento problém již dokážeme řešit (zadání viz. (5.49), řešení viz. (5.50)). Je–li $w(x,t)$ řešení právě definovaného problému, pak je $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ řešení původního problému (5.40), skutečně tato funce řeší rovnici a splňuje počáteční a okrajové podmínky.

5.3.4 Nenulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nenulové počáteční podmínky

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) & \\ \text{počáteční podmínky} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \\ \text{okrajové podmínky} & u(0,t) = l(t) & t \in [0,T] \\ & u(L,t) = p(t) & \end{array} \tag{5.52}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, f funkce proměnných x a t.

Řešení problému převedeme na řešení již známých případů. Hledanou funkci $u(x,t)$ rozdělíme na dvě funkce, funkci $u_h(x,t)$, která zajistí splnění okrajových podmínek, a funkci $u_r(x,t)$, která zajistí splnění rovnice. Definujeme tedy rozklad $u(x,t) = u_h(x,t) + u_r(x,t)$ a příslušné problémy

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} = f \text{ pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) & \\
\text{počáteční podmínky} & u_r(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\
 & \frac{\partial u_r}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \\
\text{okrajové podmínky} & u_r(0,t) = 0 & t \in [0,T] \\
 & u_r(L,t) = 0 &
\end{array}
$$

Řešení této úlohy bylo popsáno v předcházejících částech (zadání viz. (5.49), řešení viz. (5.50)).

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0 \text{ pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) & \\
\text{počáteční podmínky} & u_h(x,0) = 0 & x \in [0,L] \\
 & \frac{\partial u_h}{\partial t}(x,0) = 0 & \\
\text{okrajové podmínky} & u_r(0,t) = l(t) & t \in [0,T] \\
 & u_r(L,t) = p(t) &
\end{array}
$$

Touto úlohou jsme se také zabývali viz. (5.51).

Z linearity úlohy je zřejmé, že funkce $u(x,t)$, která je součtem funkcí $u_h(x,t)$ a $u_r(x,t)$ je řešením původní úlohy (5.52).

5.4 Fourierova metoda řešení Laplaceovy rovnice

5.4.1 Dirichletova okrajová podmínka

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) & \\
\text{okrajová podmínka} & u(x,0) = g(x)\; x \in [0,a] & \\
 & u(x,b) = 0 & \\
 & u(0,y) = 0 \quad\;\; y \in [0,b] & \\
 & u(a,y) = 0 &
\end{array}
\tag{5.53}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$, $g(0) = 0$, $g(a) = 0$.

Jako obvykle si funkci $u(x,y)$ představíme jako součin dvou funkcí

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

a dosadíme takto navrženou funkci do rovnice (5.53), výsledkem je

$$Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0$$

což zapíšeme takto:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}$$

Levá strana je závislá pouze na proměnné x, pravá strana je závislá pouze na proměnné y, a rovnost má platit pro $[x,y] \in (0,a) \times (0,b)$, obě strany rovnice proto musí být rovné konstantě, označme ji tradičně λ. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda \tag{5.54}$$

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \lambda \tag{5.55}$$

K první obyčejné diferenciální rovnici (5.54) máme ze zadání (5.53) i okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(a) = 0$ ($u(0,y) = 0$ a $u(a,0) = 0$). Řešení této úlohy jsme již podrobně diskutovali (5.30), použijeme proto známý výsledek (5.33): pro každé přirozené číslo n existuje netriviální řešení rovnice (5.54) splňující příslušné okrajové podmínky

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right),$$

kde c_n je libovolná konstanta. Pro dané n je nutné volit λ jako

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Nyní pro λ_n vyřešíme rovnici (5.55)

$$\frac{d^2Y_n(y)}{dy^2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y),$$

řešením je

$$Y_n(y) = g_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + e_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

resp. (pro naše účely vhodnější zápis)

$$Y_n(y) = g_n \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + e_n \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right),$$

kde g_n a e_n jsou libovolné konstanty.

Ze zadání plyne, že musí být $Y(b) = 0$ (viz. okrajová podmínka $u(x,b) = 0$), chceme proto, aby platilo

$$g_n \sinh\left(b\frac{n\pi}{a}\right) + e_n \cosh\left(b\frac{n\pi}{a}\right) = 0,$$

odkud

$$e_n = -g_n \tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right).$$

Celkem máme (přejmenovali jsme konstanty)

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = c_n\left(\sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) - \tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)\cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)$$

Řešení celého problému (5.53) budeme hledat jako nekonečný součet funkcí $u_n(x,y)$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$$

takto definovaná funkce nepochybně splňuje okrajové podmínky $u(x,b) = 0$, $u(0,y) = 0$ a $u(a,y) = 0$, zbývá zajisti platnost okrajové podmínky $u(x,0) = g(x)$. Předpokládejme, že funkci $g(x)$ lze rozvést do sinové Fourierovy řady

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \text{ kde } g_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx$$

Podmínka $u(x,0) = g(x)$ je pak vyjádřena rovnicí

$$u(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)\cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right),$$

odkud plyne vztah mezi konstantou c_n a koeficienty Fourierova rozvoje g_n

$$c_n = -\frac{g_n}{\tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)}$$

Shrňme si: v ideálním případě (naznačené kroky obstojí i při rigorózním postupu) je řešením problému (5.53) funkce

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) - \tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)\cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \tag{5.56}$$

kde

$$c_n = -\frac{1}{\tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)}\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx$$

V případě, že máme zadaný problém

$$\begin{array}{ll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pro } [x,y] \in (0,a)\times(0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & u(x,0) = g_1(x)\; x \in [0,a] \\ & u(x,b) = g_2(x) \\ & u(0,y) = g_3(x)\; y \in [0,b] \\ & u(a,y) = g_4(x) \end{array} \tag{5.57}$$

Přirozeně předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$, a že jsou okrajové podmínky zadány smysluplně, tzn. platí $g_1(0) = g_3(0)$, $g_1(a) = g_4(0)$, ... Jinak: funkce definované na sousedních stranách obdélníku se rovnají ve společném vrcholu. Okrajovou podmínku budeme také pro zkrácení zapisovat $u(x,y)|_\partial\left((0,a)\times(0,b)\right) = g(x,t)$

Pokud máme řešit tuto úlohu, můžeme využít předchozího problému (5.53). Nejprve přičteme k funkci $g(x,y)$ vhodnou funkci $c(x,y)$ tak, aby hodnota rozdílu $g(x,y) - c(x,y)$ v rozích obdélníka byla nulová. Navíc lze vždy tuto funkci zvolit tak, že je lineární vůči proměnné x i y, například tímto způsobem

$$c(x,y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x,$$

proč tuto konstrukci provádíme bude zřejmé z dalšího.

Nyní si představíme, že funkci $u(x,t)$ lze rozepsat jako součet

$$u(x,t) = v(x,t) + c(x,t)$$

po dosazení takto definované funkce $u(x,t)$ do rovnice (5.57) máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Definujeme si nový problém pro funkci $v(x,y)$

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & v(x,0) = -c(x,0) + g_1(x) & x \in [0,a] \\ & v(x,b) = -c(x,b) + g_2(x) & \\ & v(0,y) = -c(0,y) + g_3(x) & y \in [0,b] \\ & v(a,y) = -c(a,y) + g_4(x) & \end{array} \tag{5.58}$$

Z linearity úlohy (5.57) je zřejmé, že pokud $v(x,t)$ řeší právě zadaný problém, pak funkce $u(x,y) = v(x,y) + c(x,y)$ řeší úlohu (5.57).

Zbývá tedy nalézt postup k řešení problému pro funkci $v(x,y)$. To je ale jednoduché. Funkci $v(x,y)$ si představíme jako součet čtyř funkcí

$$v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) + v_3(x,y) + v_4(x,y),$$

kde každá z funkcí $v_i(x,y)$ řeší problém typu (5.53), například problém pro $v_1(x,y)$ je

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & v_1(x,0) = -c(x,0) + g_1(x) & x \in [0,a] \\ & v_1(x,b) = 0 & \\ & v_1(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\ & v_1(a,y) = 0 & \end{array}$$

Pro $v_2(x,y)$ by okrajové podmínky byly

$$\begin{array}{lll} \text{okrajová podmínka} & v_2(x,0) = 0 & x \in [0,a] \\ & v_2(x,b) = -c(x,b) + g_2(x) & \\ & v_2(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\ & v_2(a,y) = 0 & \end{array}$$

a obdobně pro zbývající dvě funkce. Právě zde využíváme nulovosti funkce $g(x,y) - c(x,y)$ v rozích obdélníku. Výše definovaná okrajová podmínka je právě díky konstrukci s funkcí $c(x,y)$ spojitá na hranici obdélníku.

Z linearity je opět zřejmé, že součet funkcí $v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) + v_3(x,y) + v_4(x,y)$ je řešením úlohy pro $v(x,y)$

5.4.2 Dirichletova okrajová podmínka, nenulová pravá strana

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \text{ pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) & \\
\text{okrajová podmínka} & u(x,0) = 0 \quad x \in [0,a] & \\
 & u(x,b) = 0 & (5.59) \\
 & u(0,y) = 0 \quad y \in [0,b] & \\
 & u(a,y) = 0 &
\end{array}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$, f funkce proměnných x a y.

Předpokládejme, že funkci $f(x,y)$ lze rozvést do sinové Fourierovy řady vůči proměnné x

$$
f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \text{ kde } f_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx,
$$

dále předpokládejme, že řešení $u(x,y)$ můžeme hledat ve tvaru

$$
u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)
$$

Právě zavedená funkce zřejmě splňuje okrajové podmínky $u(0,y) = 0$ a $u(a,y) = 0$. Dosadíme–li takto definovanou funkci $u(x,t)$ do rovnice, dostaneme (derivujeme po členech)

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 c_n(y)}{dy} - c_n(y) \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right),
$$

odkud plyne požadavek

$$
\frac{d^2 c_n}{dy} - c_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = f_n
$$

Okrajové podmínky k této obyčejné diferenciální rovnici získáme z okrajových podmínek původního problému $u(x,0) = 0$ a $u(x,b) = 0$, požadujeme proto $c_n(0) = 0$ a $c_n(b) = 0$. Obyčejnou diferenciální rovnici vyřešíme metodou variace konstant, řešení homogenní rovnice je

$$
c_n(y) = g_n \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + e_n \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)
$$

variací konstant získáme rovnice

$$
\begin{aligned}
\frac{dg_n}{dy}\sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + \frac{de_n}{dy}\cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) &= 0 \\
\frac{n\pi}{a}\left(\frac{dg_n}{dy}\cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + \frac{de_n}{dy}\sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)\right) &= f_n
\end{aligned}
$$

odkud

$$\frac{dg_n}{dy} = \frac{a}{n\pi} f_n \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) \rightarrow g_n(y) = \gamma_n + \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(\chi)\cosh\left(\chi\frac{n\pi}{a}\right)d\chi$$

$$\frac{de_n}{dy} = -\frac{a}{n\pi} f_n \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) \rightarrow e_n(y) = \epsilon_n - \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(\chi)\sinh\left(\chi\frac{n\pi}{a}\right)d\chi$$

právě získané vyjádření "konstant" g_n a e_n dosadíme do homogenního řešení $c_n(y)$ a výsledkem je (použili jsme součtový vzorec pro hyperbolické funkce)

$$c_n(y) = \left(\gamma_n \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + \epsilon_n \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)\right) + \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(\chi)\sinh\left((y-\chi)\frac{n\pi}{a}\right)d\chi$$

Použitím okrajových podmínek $c_n(0) = 0$ a $c_n(b) = 0$ určíme konstanty γ_n a ϵ_n

$$c_n(0) = 0 \rightarrow \epsilon_n = 0$$

$$c_n(b) = 0 \rightarrow \gamma_n = -\frac{1}{\sinh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)}\frac{a}{n\pi}\int_0^b f_n(\chi)\sinh\left((y-\chi)\frac{n\pi}{a}\right)d\chi,$$

čímž jsme vyřešili obyčejnou diferenciální rovnici pro $c_n(y)$. Získané $c_n(y)$ dosadíme zpět do vyjádření funkce $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)$ a dostaneme řešení původního problému (5.59)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a}{n\pi}\frac{\sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)}{\sinh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)}\int_0^b f_n(\chi)\sinh\left((y-\chi)\frac{n\pi}{a}\right)d\chi + \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(\chi)\sinh\left((y-\chi)\frac{n\pi}{a}\right)d\chi\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \tag{5.60}$$

kde

$$f_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx,$$

5.5 Závěr

Na závěr našeho přehledu na téma "Fourierova metoda pro řešení parciální diferenciálních rovnic" poznamenejme, že jsme zdaleka neřešili všechny typy úloh se kterými se můžeme setkat, vůbec jsme například neuvažovali Neumannovy okrajové podmínky. Nicméně věříme, že z předložených příkladů zřetelně vystupuje schéma použité metody a setká–li se čtenář s případem, který zde nebyl popsán, bude schopen sám, na základě právě nabytých zkušeností, tento problém vyřešit.