Kapitola 2

Věta Cauchyova–Kowalevské

2.1 Reálně analytické funkce

Na úvod připomeneme resp. zavedeme některá vžitá i méně užívaná označení:

- Pro $y \in \mathbb{R}^m$ budeme používat Eukleidovskou normu $\|y\| := \sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2}$ a maximovou normu $|y|_M := \max_j\{|y_j|\}$.
- Pro $\rho > 0$ označíme krychlové m-dimenzionální okolí bodu $y^0 \in \mathbb{R}^m$ symbolem $I_\rho^m(y^0) := \{y \in \mathbb{R}^m;\ |y - y^0|_M < \rho\}$. Nebude-li uveden střed této krychle, rozumí se, že je krychle umístěna v počátku, tedy $I_\rho^m := I_\rho^m(0)$. Rovněž někdy můžeme vynechat označení pro dimenzi m, bude-li z kontextu zřejmé.
- Pro multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme tato standardní označení:

$$\begin{aligned}
|\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_m\,, && \text{(výška multiindexu)},\\
\alpha! &:= \alpha_1! \ldots \alpha_m!\,, && \text{(faktoriál multiindexu)},\\
y^\alpha &:= y_1^{\alpha_1} \ldots\, y_m^{\alpha_m}\,, && y \in \mathbb{R}^m\,,\\
D^\alpha v(y) &:= \frac{\partial^{|\alpha|} v(y)}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots\, \partial y_m^{\alpha_m}}\,, && \text{(derivace podle multiindexu)}.
\end{aligned}$$

Následující lemma se nám bude hodit při důkazu hlavní věty tohoto paragrafu. Uvědomte si, že jde o zobecnění vám jistě známé binomické věty.

Lemma 2.1.1 *Buď $k \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom*

$$(a_1 + \cdots + a_m)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\, a^\alpha\,, \tag{2.1}$$

přičemž $\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Viz např. [18].

Dále zavedeme pojem reálně analytické funkce.

Definice 2.1.2 (Reálně analytická funkce) *Funkci $f : I^m_\rho(y^0) \to \mathbb{R}$ nazveme reálně analytickou v $I^m_\rho(y^0)$, pokud existují reálná čísla f_α taková, že řada*

$$\sum_\alpha f_\alpha (y - y^0)^\alpha \tag{2.2}$$

konverguje bodově pro všechna $y \in I^m_\rho(y^0)$ k součtu $f(y)$.

Poznámka 2.1.3 Podobně jako u mocninných řad lze ukázat, že (2.2) konverguje absolutně stejnoměrně na $I^m_\sigma(y^0)$ pro všechna $0 < \sigma < \rho$ a definuje v $I^m_\rho(y^0)$ nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou funkci f. Řadu (2.2) lze navíc ve všech vnitřních bodech $I^m_\rho(y^0)$ libovolněkrát derivovat člen po členu, a platí

$$f_\alpha = \frac{D^\alpha f(y^0)}{\alpha!}\,. \tag{2.3}$$

Důkazy těchto tvrzení je možno nalézt například v [18]. Navíc platí následující lemma.

Lemma 2.1.4 *Buď*

$$f(y) = \sum_\alpha f_\alpha (y - y^0)^\alpha$$

reálně analytická funkce v $I^m_\rho(y^0)$. Potom pro každé $0 < \sigma < \rho$ existuje $M > 0$ taková, že

$$|f_\alpha| \le \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}}\,. \tag{2.4}$$

Důkaz. Viz např. [18, str. 47].

2.2 Metoda majorizace a věta Cauchy–Kowalevské

Věta Cauchyova-Kowalevské stanoví lokální existenci (a jednoznačnost) lokální Cauchyovy úlohy pro systém kvazilineárních rovnic 1. řádu.

Věta 2.2.1 (Cauchy-Kowalevská) *Buďte $a_{ijr}(x,u)$, $b_r(x,u) : I^{d+s}_\rho \to \mathbb{R}$, kde $i = 1,\dots,d$, $j = 1,\dots,s$, reálně analytické pro nějaké $\rho > 0$. Pak existuje $0 < \rho' \le \rho$ a reálně analytické funkce $u_r : I^{d+1}_{\rho'} \to \mathbb{R}$, $r = 1,\dots,s$, takové, že pro všechna $r = 1,\dots,s$ platí*

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}(x,t) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} a_{ijr}(x,u(x,t))\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x,t) + b_r(x,u(x,t)) \quad \text{na } I^{d+1}_{\rho'}\,, \tag{2.5}$$

$$u_r(x,0) = 0 \quad \text{na } I^d_{\rho'}\,. \tag{2.6}$$

Ve třídě reálně analytických funkcí je toto řešení určeno jednoznačně.

Důkaz se vede tzv. metodou majorizace, s jejíž základní terminologií se nyní seznámíme.

Definice 2.2.2 *Nechť f a g jsou reálně analytické na I_ρ^m, $f(y) = \sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$, $g(y) = \sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$. Řekneme, že g* majorizuje *f na I_ρ^m (též: g je majorantou f), pokud*

$$|f_\alpha| \le g_\alpha \quad \forall\, \alpha\,, \tag{2.7}$$

tedy že $|D^\alpha f(0)| \le D^\alpha g(0)$ pro všechny multiindexy α. V tom případě píšeme $f \preccurlyeq g$.

Definice 2.2.3 *Buďte $a_{ijr} \preccurlyeq \widetilde{a}_{ijr}$, $b_r \preccurlyeq \widetilde{b}_r$ na I_ρ^{d+s}. Pak řekneme, že úloha*

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}(x,t) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} \widetilde{a}_{ijr}(x, v(x,t))\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x,t) + \widetilde{b}_r(x, v(x,t)) \quad na\ I_{\rho'}^{d+1}\,, \tag{2.8}$$

$$v_r(x,0) = 0 \quad na\ I_{\rho'}^{d}\,. \tag{2.9}$$

$r = 1, \dots, s$, je majorantní *k úloze (2.5)–(2.6).*

<u>*Důkaz Věty 2.2.1*</u>. Důkaz rozdělíme na několik kroků.

Jednoznačnost: Předpokládejme, že existují reálně analytické funkce $u_r : I_\rho^{d+1}$ splňující úlohu (2.5)–(2.6). Ukážeme, že jejich derivace jsou z rovnic (2.5)–(2.6) jednoznačně vyjádřitelné. Nechť α je multiindex o $d+1$ složkách. Označme $\alpha = (l, \beta)$, kde l je první složka multiindexu α (odpovídající časové proměnné) a β je multiindex o d složkách (odpovídající prostorovým proměnným). Ukážeme, že pro každé $\alpha = (l, \beta)$ a pro každé r existuje polynom $f_{r,\alpha}$ s nezápornými koeficienty (nezávislý na konkrétních datech úlohy) takový, že hodnotu $D^\alpha u_r(0)$ lze spočítat jako hodnotu polynomu $f_{r,\alpha}$, za jehož proměnné dosadíme hodnoty funkcí a_{ijk}, b_k a všech jejich derivací řádu menšího než $|\alpha|$ v bodě 0. Důkaz provedeme indukcí podle l.

I. Nechť $l = 0$. Jelikož podle (2.6) je $u_r(0, x) \equiv 0$, platí $D^\alpha u_r(0) = 0$ (derivujeme jen podle prostorových proměnných). Stačí tedy položit $f_{r,\alpha} \equiv 0$.

II. Nechť $l > 0$ a nechť máme všechny polynomy $f_{r,\alpha}$ pro α s první složkou menší než l. Pak

$$D^\alpha u_r = D^{(l-1,\beta)}\frac{\partial u_r}{\partial t} = D^{(l-1,\beta)}\left(\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} a_{ijr}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + b_r\right).$$

Na pravé straně rovnosti se po úpravě vyskytují pouze derivace funkcí a_{ijr}, b_r a u_j podle multiindexu s první složkou menší než l. Uvažujeme-li získanou rovnost v bodě 0, pak podle indukčního předpokladu lze za tyto derivace funkcí u_j dosadit polynomy v proměnných a_{ijk}, b_k a jejich derivací (s nezápornými koeficienty), čímž na pravé straně získáme polynom $f_{r,\alpha}$. Snadno se ověří, že jeho koeficienty jsou nezáporné a že jako proměnné jsou použity pouze derivace řádu menšího než $|\alpha|$. Tím je důkaz části o jednoznačnosti hotov.

1. krok k existenci: Ukážeme, že pokud nějaká majorantní úloha (2.8)–(2.9) má reálně analytická řešení v_r, pak existují i reálně analytická řešení u_r úlohy (2.5)–(2.6). Označme $g_{r,\alpha} = \frac{1}{\alpha!} f_{r,\alpha}$ (kde $f_{r,\alpha}$ jsou polynomy z předchozího kroku). Definujme čísla $u_{r,\alpha} = \frac{D^\alpha u_r(0)}{\alpha!}$, $v_{r,\alpha} = \frac{D^\alpha v_r(0)}{\alpha!}$. Pak je

$$|u_{r,\alpha}| = |g_{r,\alpha}(a_{ijk}(0), b_k(0), \dots)| \leq g_{r,\alpha}(|a_{ijk}(0)|, |b_k(0)|, \dots) \leq$$

$$\leq g_{r,\alpha}(\tilde{a}_{ijk}(0), \tilde{b}_k(0), \dots) = v_{r,\alpha}$$

(v první nerovnosti jsme podstatným způsobem využili nezápornosti koeficientů polynomu g_α). Jelikož suma $\sum\limits_\alpha v_{r,\alpha} y^\alpha$ konverguje na celém $I_{\rho'}^{d+1}$, podle Weierstrassova kritéria konverguje (dokonce absolutně) také suma $\sum\limits_\alpha u_{r,\alpha} y^\alpha$ a definuje nám na $I_{\rho'}^{d+1}$ reálně analytickou funkci $u_r(y)$. Z konstrukce čísel $u_{r,\alpha}$ je zřejmé, že levé a pravé strany rovností (2.8) a (2.9) se rovnají v bodě 0 včetně všech svých derivací a jsou si tedy rovny všude v $I_{\rho'}^{d+1}$ (jde o reálně analytické funkce). Funkce u_r jsou tedy řešením problému (2.5)–(2.6).

2. krok k existenci: Nalezneme speciální problém, majorizující naši obecnou úlohu. Nejdříve zvolíme $\sigma \in (0, \rho)$ libovolně. Podle Lemmatu 2.1.4 existuje konstanta $M > 0$ taková, že $|\frac{D^\alpha a_{ijr}}{\alpha!}| < \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}}$, $|\frac{D^\alpha b_r}{\alpha!}| < \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}}$ pro všechna α, i, j, r. Zvolíme-li $\rho' < \frac{\sigma}{d+s}$ libovolné kladné, bude pro nějaké $q < 1$ platit odhad

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_d + u_1 + \dots + u_s}{\sigma} \right| \leq q$$

kdykoliv $(x, u) \in I_{\rho'}^{d+s}$. Definujeme-li funkci

$$H(x, u) = \frac{M}{1 - \frac{x_1 + \dots + x_d + u_1 + \dots + u_s}{\sigma}} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma^k} (x_1 + \dots + x_d + u_1 + \dots + u_s)^k,$$

vidíme, že je reálně analytická na celém $I_{\rho'}^{d+s}$. Označme $y = (x_1 + \dots + x_d + u_1 + \dots + u_s)$, pak podle Lemmatu 2.1.1 je

$$H(x, u) = \sum_\alpha H_\alpha y^\alpha,$$

kde

$$H_\alpha = \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} \geq \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}}.$$

Zvolíme-li tedy $\tilde{a}_{ijr} = \tilde{b}_r = H$, dostaneme majorizující úlohu

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{M\sigma}{\sigma - (x_1 + \dots + x_d + v_1 + \dots + v_s)} \left(1 + \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

$$v_r(x, 0) = 0 \qquad r = 1, \dots, s.$$

3. krok k existenci: Zbývá nám nalézt nějaké reálně analytické řešení tohoto problému. Označíme si $X = x_1 + \cdots + x_d$. Budeme hledat řešení ve tvaru $v_r(x,t) = V(X,t)$. Problém se nám tedy zredukuje na jednu rovnici

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{M\sigma}{\sigma - X - sV}\left(1 + sd\frac{\partial V}{\partial X}\right),$$

$$V(X,0) = 0.$$

Je již jen technickou záležitostí ověřit, že tento problém má řešení

$$V(X,t) = \frac{\sigma - X - \sqrt{(\sigma - X)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}}{s(d+1)},$$

což je v dostatečně malém okolí nuly reálně analytická funkce. □

Cvičení 2.2.4 *Nalezněte jako cvičení funkci $V(X,t)$ metodou charakteristik.*

Poznámka 2.2.5 (*Lewyho protipříklad.*) Požadavek reálné analytičnosti funkcí a_{ijr}, b_r nelze vynechat. Lewy zkonstruoval následující protipříklad. Pro $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ označme

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - 2i(x+iy)\frac{\partial u}{\partial z}\,.$$

Potom existuje $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, která není analytická, a taková, že rovnice

$$Lu = f$$

nemá klasické řešení na žádné otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

2.3 O klasifikaci rovnic 2. řádu

Mějme lineární rovnici 2. řádu v $\mathbb{R}^d$

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x)\,. \tag{2.10}$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{ij} = a_{ji}$. Dále, pro každé pevné x, je matice $A := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^d$ reálná, symetrická, a tedy diagonalizovatelná. Proto existují matice P ortogonální, a B diagonální, že

$$P^T A P = B\,.$$

Lze zařídit, aby B měla na diagonále jen prvky množiny $\{1, -1, 0\}$, dokonce podle zákona o setrvačnosti kvadratické formy reprezentující matici A, je počet 1,-1,0 jednoznačně dán,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_d \end{pmatrix} .$$

Pomocí transformační matice P zavedeme novou proměnnou y a novou funkci v,

$$y = Px, \qquad v(y) = v(Px) = u(x) .$$

Po provedení složených parciálních derivací

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial y_k} p_{ki} ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h} p_{ki} p_{hj} ,$$

které dosadíme do původní rovnice, bude její hlavní část tvaru

$$\sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h} \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} p_{ki} p_{hj} \right) = \sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h} \delta_{kh} b_k .$$

Počet nenulových b_k označme m. Mohou nastat tyto případy:

- Rovnici (2.10) nazveme **eliptickou**, je-li $m = d$ a znaménka všech b_i jsou stejná. Rovnice má pak tvar $\Delta v + \ldots$, tedy $\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \ldots$.
- Rovnici (2.10) nazveme **hyperbolickou**, je-li $m = d$ a znaménka všech b_i až na 1 jsou stejná. Rovnice má pak tvar $\frac{\partial^2 v}{\partial y_d^2} = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \ldots$.
- Rovnici (2.10) nazveme **parabolickou**, je-li $m = d - 1$ (BÚNO $b_d = 0$) a znaménka všech ostatních b_i jsou stejná; koef. u $\frac{\partial v}{\partial y_d}$ je nenulový. Rovnice má pak tvar $\frac{\partial v}{\partial y_d} = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \ldots$.
- Rovnici (2.10) nazveme **parabolickou v širším slova smyslu**, je-li $m < d$.
- Rovnici (2.10) nazveme **ultrahyperbolickou** jestliže alespoň dvě b_i jsou kladná a alespoň dvě b_i jsou záporná, $m = d$.

Příklad 2.3.1 Tricomiho rovnice

$$x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

je pro $x_2 > 0$ eliptická, pro $x_2 < 0$ hyperbolická, tedy mění typ při přechodu osy x_1.