Kapitola 3

Laplaceova a Poissonova rovnice

3.1 Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice

Definice 3.1.1 *Buď Ω oblast v $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Rovnici*

$$-\Delta u = f \qquad v\ \Omega \tag{3.1}$$

pro neznámou funkci u nazýváme Poissonovou (Laplace-Poissonovou) rovnicí *v Ω. Je-li $f \equiv 0$ v Ω, mluvíme speciálně o* Laplaceově rovnici *v Ω.*

Definice 3.1.2 *(i) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast. Řekneme, že $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ je* harmonická v Ω*, pokud $\Delta u(x) = 0$ pro všechna $x \in \Omega$ (tj. u bodově řeší Laplaceovu rovnici v Ω).*

(ii) Řekneme, že $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je vnější oblast, pokud Ω je doplňkem uzávěru omezené oblasti v $\mathbb{R}^d$. Řekneme, že $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ je harmonická ve vnější oblasti Ω*, pokud $\Delta u(x) = 0$ pro všechna $x \in \Omega$ a navíc pokud $u(x) = \mathrm{O}(|x|^{2-d})$ pro $|x| \to \infty$.*

Poznámka 3.1.3
- Připomeňte si pojem $u(x) = \mathrm{O}(|x|^{2-d})$ pro $|x| \to \infty$.
- Existují i jiné definice pojmu harmonické funkce, například vyžadují pouze spojitost a splnění Laplaceovy rovnice v nějakém jiném než bodovém smyslu.

Příklad 3.1.4 (i) Konstanty jsou harmonické v libovolné oblasti v $\mathbb{R}^d$, lineární funkce jsou harmonické v libovolné omezené oblasti v $\mathbb{R}^d$ a řeší Laplaceovu rovnici v libovolné oblasti v $\mathbb{R}^d$.

(ii) Funkce $u(x, y) = x^2 - y^2$ řeší Laplaceovu rovnici v libovolné oblasti v $\mathbb{R}^2$. Na žádné vnější oblasti v $\mathbb{R}^2$ však není harmonická (rozmyslete si).

(iii) Definujme funkci $U(x)$ předpisem[1]

$$U(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(d-2)\varkappa_d\,|x|^{d-2}} & \text{pokud } d \geq 3\,, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|} & \text{pokud } d = 2\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

Buď nyní $\xi \in \mathbb{R}^d$ pevný bod. Potom funkce $U(x-\xi)$ je harmonická v libovolné (omezené či neomezené) oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, neobsahující bod ξ. Speciálně je $U(x-\xi)$ harmonická v $\mathbb{R}^d \setminus \{\xi\}$.

(iv) Buďte ξ, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pevné body, $d \geq 3$. Potom funkce $\frac{|\xi|^2-|x-x_0|^2}{|x-\xi|^d}$ je harmonická v libovolné oblasti, neobsahující bod ξ. Ukažte.

Poznámka: funkce (3.2) nazýváme elementární řešení Laplaceovy rovnice.

3.2 Věta o třech potenciálech

Věta 3.2.1 (O třech potenciálech) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast s "dostatečně" hladkou hranicí, $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Potom pro každé $y \in \Omega$ je*

$$u(y) = -\int_\Omega \Delta u(x)\,U(x-y)\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,U(x-y)\,dS_x + \int_{\partial\Omega} u(x)\,\frac{\partial U}{\partial\nu}(x-y)\,dS_x\,, \tag{3.3}$$

kde $U(x)$ je elementární řešení Laplaceovy rovnice, viz (3.2).

Důkaz. Již víme, že funkce $U(x-y)$ (jako funkce proměnné x) je harmonická v každé oblasti, která neobsahuje bod y. Speciálně jsou tedy funkce $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ resp. $\ln\frac{1}{|x|}$ harmonické v oblasti dimenze $d \geq 3$ resp. $d = 2$, pokud tato oblast neobsahuje bod 0.

Věnujme se nyní vlastnímu důkazu. Pro dimenzi $d \geq 3$ věta tvrdí:

$$\begin{aligned} u(y) = \frac{1}{\varkappa_d(d-2)}\biggl(-\int_\Omega \frac{\Delta u(x)}{|x-y|^{d-2}}\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\frac{1}{|x-y|^{d-2}}\,dS_x \\ - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-y|^{d-2}}\right)u(x)\,dS_x\biggr). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dodejme, že derivování podle vektoru vnější normály ν se týká proměnné x. Bez újmy na obecnosti dokážme tvrzení pouze pro $y = 0$ ($y \neq 0$ dostaneme posunutím). Dále

[1]Symbolem $\varkappa_d$ značíme povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$, přičemž $\varkappa_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$. Pro Eulerovu funkci Γ platí $\Gamma(k) = (k-1)!$ a $\Gamma(k+\frac{1}{2}) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$, $k \in N$. Připomeňme, že $(2k-1)!! = (2k-1)\cdot(2k-3)\cdots3\cdot1$.

předpokládáme, že bod 0 leží v Ω. Protože integrál vlevo v následující rovnosti existuje jako Lebesgueův (uvědomte si to), máme

$$\int_\Omega \frac{\Delta u(x)}{|x|^{d-2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} \frac{\Delta u(x)}{|x|^{d-2}}dx,$$

kde $B_\varepsilon(0)$ značí kouli se středem v bodě 0 o poloměru ε. Pokud integrujeme přes $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$, můžeme bez obav použít druhou Greenovu větu (integrovaná funkce je spojitá až do hranice $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$, která je dostatečně hladká). Proto lze pokračovat

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u(x)\Delta\frac{1}{|x|^{d-2}}\,dx - \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(0))} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)dS_x \right.$$
$$\left. + \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(0))}\frac{1}{|x|^{d-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS_x\right).$$

První člen je nulový, neboť $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ je harmonická na $\Omega\setminus B_\varepsilon(0)$. Zbylé dva integrály přes $\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(0))$ rozdělíme zvlášť na integrál přes $\partial\Omega$ a $\partial B_\varepsilon(0)$ (pozor na orientaci). Na členy, ve kterých probíhá integrace přes $\partial\Omega$, nemá limita přes ε vliv, a stačí proto vyšetřit chování členů, kde integrace probíhá přes $\partial B_\varepsilon(0)$. Ukážeme, že

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{1}{|x|^{d-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS_x = 0\,.$$

Platí totiž odhad (velikost x je na $\partial B_\varepsilon(0)$ rovna ε)

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{1}{|x|^{d-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS_x\right| \le \max_{x\in\partial B_\varepsilon(0)}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right|\varepsilon\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{dS_x}{\varepsilon^{d-1}},$$

kde integrál vpravo je přesně $\varkappa_d$, tj. povrch jednotkové sféry v d dimenzích. Abychom zjistili, čemu se rovná limita výrazu $\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)dS_x$, vypočteme nejprve normálovou derivaci $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ (ν je jednotkový vektor a kvůli orientaci vnější normály $\nu \upharpoonleft\!\downharpoonright x$, tedy $x\cdot\nu = -|x|$):

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right) = \nabla\frac{1}{|x|^{d-2}}\cdot\nu = -(d-2)\frac{1}{|x|^d}\,x\cdot\nu = (d-2)\frac{1}{|x|^{d-1}}\,.$$

Proto

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)dS_x = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)(d-2)\frac{dS_x}{\varepsilon^{d-1}},$$

což rozepíšeme jako

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(0)(d-2)\frac{dS_x}{\varepsilon^{d-1}} - \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\big(u(x)-u(0)\big)\,(d-2)\frac{dS_x}{\varepsilon^{d-1}}\,.$$

První integrál konverguje k $-u(0)(d-2)\varkappa_d$ a druhý konverguje k nule díky spojitosti $u(x)$. Konečně tedy (nesmíme zapomenout na integrály přes $\partial\Omega$, které jsme získali z $\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(0))$):

$$\int_\Omega \frac{\Delta u(x)}{|x|^{d-2}}\,dx = -\int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)dS_x + \int_{\partial\Omega}\frac{1}{|x|^{d-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS_x - u(0)(d-2)\varkappa_d,$$

z čehož po jednoduché úpravě dostaneme dokazované tvrzení (3.4) pro $u(0)$. Kdybychom vystartovali z výrazu $\int_\Omega \Delta u(x)\ln\frac{1}{|x|}\,dx$ a použili stejných úprav jako výše, provedli bychom důkaz pro dimenzi $d = 2$. Čtenáři doporučujeme si to jako cvičení provést. $\square$

Poznámky. Tři integrály v (3.3) se po řadě nazývají objemový potenciál s hustotou $-\Delta u$, potenciál jednovrstvy s hustotou $\frac{\partial u}{\partial\nu}$, potenciál dvojvrstvy s hustotou u.

Důsledek: $\mathcal{C}^2$ řešení Laplaceovy rovnice už jsou nutně třídy $\mathcal{C}^\infty$. Viz následující věta.

Věta 3.2.2 (Věta o regularitě) *Buď $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je oblast. Nechť $\Delta u = 0$ v Ω. Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Důkaz. Ponecháváme čtenáři s tímto návodem: Pro každý pevný vnitřní bod $y \in \Omega$ opíšeme kouli $B_R(y) \subset\subset \Omega$, pro ni napíšeme větu o tří potenciálech, využijeme $\Delta u = 0$ a vlastnosti integrálu s parametrem. $\square$

3.3 Dirichletova úloha na kouli

Definice 3.3.1 (Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Řekneme, že u je klasickým řešením Dirichletovy úlohu pro Laplaceovu rovnici v Ω, pokud $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cup \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, a*

$$\Delta u = 0 \qquad v\ \Omega\,, \tag{3.5}$$
$$u = \varphi \qquad na\ \partial\Omega\,. \tag{3.6}$$

Pro kouli lze klasické řešení Dirichletovy úlohy psát explicitně. Toto explicitní řešení nyní odvodíme.

Představme si, že chceme vyřešit Dirichletovu úlohu na kouli o poloměru R se středem v bodě $x_0 = 0$. Množina Ω z předchozí definice je tedy $B_R(0)$. Připomeneme si formulaci Věty 3.2.1 o třech potenciálech pro $d \geq 3$:

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d(d-2)}\Bigg(-\int_\Omega \frac{\Delta u(\xi)}{|x-\xi|^{d-2}}\,d\xi + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\,dS_\xi \\ - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\right)u(\xi)\,dS_\xi\Bigg)\,.$$

Funkci $u(x)$ bychom mohli najít užitím tohoto vztahu. První integrál totiž můžeme pokládat za nulový (viz. zadání úlohy) a poslední člen můžeme vyjádřit pomocí dat úlohy, neboť $u(\xi) = \varphi(\xi)$ na $\partial B_R(0)$. Problémy máme pouze s prostředním členem, protože $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)$ nejsme schopni vyjádřit z dat rovnice. Pokusme se nyní prostřední člen nějakým vhodným způsobem přepsat, abychom tuto obtíž odstranili. Druhá Greenova věta říká, že

$$\int\limits_{B_R(0)} (u\Delta w - w\Delta u)\, dx = \int\limits_{\partial B_R(0)} u\frac{\partial w}{\partial \nu} dS - \int\limits_{\partial B_R(0)} w\frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

Funkce u v právě citované verzi Greenovy věty bude odpovídat naší funkci $u(\xi)$. Představme si nyní, že funkce $w(\xi)$ je harmonická v *celé* $B_R(0)$. Pak bude levá strana Greenovy formule nulová a dostaneme

$$\int\limits_{\partial B_R(0)} u\frac{\partial w}{\partial \nu} dS = \int\limits_{\partial B_R(0)} w\frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

což nám umožní zbavit se integrálu, ve kterém vystupuje $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)$. Nyní zbývá najít funkci $w(\xi)$. Zkusme nejdříve za $w(\xi)$ (x je parametr a veškeré derivování se týká proměnné ξ) vzít rovnou funkci $\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}$, která vystupuje ve větě o třech potenciálech. Tato funkce je harmonická všude kromě bodu x, který naneštěstí leží uvnitř $B_R(0)$. Takto zvolená funkce není pro naše účely vhodná. Je tedy třeba vymyslet funkci $w(\xi)$, která je rovná $\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}$ na $\partial B_R(0)$ a je harmonická v $B_R(0)$. K tomuto účelu použijeme kulovou inverzi. Nechť $\hat{x}$ je bod, který je kulovou inverzí bodu x. Tento bod leží na přímce vedené z počátku bodem x a pro jeho vzdálenost od počátku platí

$$\frac{R}{|x|} = \frac{|\hat{x}|}{R},$$

což mimo jiné znamená, že polohový vektor bodu $\hat{x}$ je dán jako $\hat{x} = \nu\frac{R^2}{|x|} = x\frac{R^2}{|x|^2}$. Volbou bodu $\hat{x}$ podle předchozího je zaručena podobnost trojúhleníků a platí $\frac{|x-\xi|}{|\hat{x}-\xi|} = \frac{x}{R}$. Hledanou funkcí $w(\xi)$ je proto:

$$w(\xi) = \frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d-2}}\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}$$

Skutečně, tato funkce splňuje všechny naše požadavky. Je harmonická na $B_R(0)$, protože bod $\hat{x}$, ve kterém harmonická není, leží mimo $B_R(0)$ a navíc je na základě vlastností kulové inverze rovná $\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}$ pro $\xi \in \partial B_R(0)$. Užijeme zmíněnou větu o třech potenciálech, ve které provedeme úpravy pomocí druhé Greenovy věty a výsledkem je vzoreček:

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d(d-2)}\left(\int_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d-2}}\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\right) dS_\xi - \int\limits_{\partial B_R(0)} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\right)\varphi(\xi) dS_\xi\right).$$

Vypočteme normálové derivace

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d-2}}\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\right) = \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\nabla\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d-2}}\cdot\nu = +(d-2)\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d}}(\hat{x}-\xi)\cdot\nu$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\right) = \nabla\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\cdot\nu = +(d-2)\frac{1}{|x-\xi|^{d}}(x-\xi)\cdot\nu,$$

ve výrazu, kde vystupuje $\hat{x}$ přejdeme k původní proměnné x a dostaneme:

$$+(d-2)\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d}}(\hat{x}-\xi)\cdot\nu = +(d-2)\frac{|x|^2}{R^2}\frac{1}{|x-\xi|^{d}}(x\frac{R^2}{|x|^2}-\xi)\cdot\nu$$

Konečně po dosazení

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d(d-2)}\int\limits_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\frac{(d-2)}{|x-\xi|^d}\left((x-\xi\frac{|x|^2}{R^2}) - (x-\xi)\right)\cdot\nu dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{\varkappa_d}\int\limits_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^d}\left(\frac{R^2-|x|^2}{R^2}\right)\xi\cdot\nu dS_\xi = \frac{1}{\varkappa_d}\int\limits_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\frac{R^2-|x|^2}{R|x-\xi|^d}dS_\xi.$$

Čímž jsme obdrželi předpis pro řešení Dirichletovy úlohy na kouli se středem v bodě nula a poloměrem R. Zbývá zformulovat větu o řešení Dirichletovy úlohy a ukázat, že nalezená funkce je skutečně řešením naší úlohy.

Věta 3.3.2 (Řešení Dirichletovy úlohy na kouli) *Buď $B_R(x_0)$ koule v $\mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathcal{C}(S_R(x_0))$. Definujme*

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{pro } x \in S_R(x_0)\,, \\ \frac{1}{\varkappa_d R}\int_{S_R(x_0)} \varphi(\xi)\,\frac{R^2-|x-x_0|^2}{|x-\xi|^d}\,dS_\xi & \text{pro } x \in B_R(x_0)\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(B_R(x_0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)})$ a řeší klasickou Dirichletovu úlohu na kouli $B_R(x_0)$. Navíc platí $\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$.

<u>*Důkaz*</u>. Poznámky: Normy $\|\cdot\|_\infty$ jsou supremové normy v prostoru příslušných spojitých funkcí. Integrál ve (3.7) se nazývá Poissonův integrál. Navíc platí, že klasické řešení Dirichletovy úlohy na kouli je určeno jednoznačně (označte w rozdíl dvou řešení a upravte $\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w$ pomocí Greenovy věty). Z tvaru Poissonova integrálu rovněž vidíme, že platí implikace $\varphi \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$. Doplnit podrobnosti, zejména nabývání O.P. □

3.4 Věty o střední hodnotě

Věta 3.4.1 (Věta o střední hodnotě (o průměru)) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ v Ω. Potom pro každou kouli $B_r(x_0)$ takovou, že $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, platí*

$$u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d \, r^{d-1}} \int_{S_r(x_0)} u(\xi)\, dS_\xi\,. \tag{3.8}$$

Poznámka 3.4.2 Pokud $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, platí vztah (3.8) i pro koule, které se zevnitř dotýkají hranice Ω. (Je-li $B_R(x_0)$ taková koule, užijeme Větu 3.4.1 pro kouli $B_{R-\varepsilon}(x_0)$ a ve formuli (3.8) pak provedeme limitní přechod $\varepsilon \to 0+$.)

<u>*Důkaz Věty 3.4.1*</u>. Doplnit. □

Následující věta je "obrácením" té předchozí.

Věta 3.4.3 (Obrácená věta o střední hodnotě) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast, $u \in \mathcal{C}(\Omega)$. Nechť vztah (3.8) platí pro všechna $x_0 \in \Omega$ a $r > 0$, taková, že $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $\Delta u = 0$ v Ω.*

<u>*Důkaz*</u>. Užitím regularizátorů a věty o třech potenciálech. Doplnit. □

3.5 Princip maxima

Princip maxima je jednou z nejdůležitějších vlastností harmonických funkcí (a později uvidíme, že v jisté podobě i vlastností řešení širší třídy rovnic).

Věta 3.5.1 (Principy maxima) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ na Ω. Potom*

1. *platí tzv. <u>slabý princip maxima</u>:*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u\,, \qquad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u\,; \tag{3.9}$$

2. platí tzv. *silný princip maxima:*

$$\textit{existuje-li lokální extrém } u \textit{ uvnitř oblasti } \Omega, \textit{ je } u \textit{ konstantní na } \overline{\Omega}. \tag{3.10}$$

Poznámka 3.5.2 Důsledkem (3.9) je tvrzení

$$\min_{\partial\Omega} u \le u(x) \le \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \Omega\,, \tag{3.11}$$

zatímco důsledkem (3.10) je tvrzení

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \Omega\,. \tag{3.12}$$

Čtenář se může právem ptát, proč na tomto místě uvádíme oba principy maxima, když slabý je důsledkem silného. Vede nás k tomu skutečnost, že pro obecnější eliptické rovnice, jak později uvidíme, platí pouze jakási verze slabého principu maxima (viz Věta 3.5.6). Proto jsme považovali za rozumné zformulovat jej i v této chvíli.

Důkaz. Protože (3.9) plyne z (3.10), stačí ukázat toto tvrzení.

Zvolme $r > 0$ takové, že koule $\overline{B(x_0, r)}$ leží v Ω. V důsledku věty o průměru platí $u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d r^{d-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} u(\xi) dS_\xi$.

Jelikož také $u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d r^{d-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} u(x_0) dS_\xi$, dostáváme po odečtení

$$\int\limits_{S(x,r)} (u(x_0) - u(\xi)) dS_\xi = 0\,.$$

Funkce $u(x_0) - u(\xi)$ je na $S(x_0, r)$ nezáporná a spojitá, a proto $u(x_0) = u(\xi)$ pro $x \in S(x, r)$.

Nechť dále $0 < r_1 < r$. Zopakováním předešlé úvahy dostaneme, že i pro $|x_0 - \xi| = r_1$ je $u(\xi) = u(x_0)$, a tedy množina $M := \{\xi; u(\xi) = u(x_0)\} \subseteq \overline{\Omega}$ je otevřená v $\overline{\Omega}$. Jelikož u je spojitá, musí být M i uzavřená, a tudíž $M = \overline{\Omega}$. □

Cvičení 3.5.3 Omezenost oblasti v předchozí větě potřebujeme mimo jiné k tomu, aby existovala níže uvedená maxima a minima (uzávěr omezené oblasti je kompakt). Rozmyslete si, zda by věta platila i pro neomezené oblasti za dodatečného předpokladu, že existují konečná suprema a infima funkce u na $\overline{\Omega}$. Předpoklad existence konečného suprema a infima u na hranici $\partial\Omega$ evidentně nestačí: uvažte funkci $u(x, y) = y$ na horní polorovině. Návod: uvažujte funkce $U(x)$ a $-U(x)$ (viz (3.2)) na $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_1(0)}$.

V dalším se budeme zabývat zobecněním principu maxima pro širší třídu rovnic.

Definice 3.5.4 *Buďte $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $c(x) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast. Pro $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ definujme operátor $L : \mathcal{C}^2(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega)$ předpisem*

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^{d} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)\, u(x) \,. \tag{3.13}$$

Díky uvažovaným hladkostem můžme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega} \tag{3.14}$$

(rozmyslete si). Buď dále

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall\, \xi \neq 0\,, \forall\, x \in \overline{\Omega}\,. \tag{3.15}$$

Pak nazvu operátor L eliptickým operátorem na Ω, a rovnici $Lu = f$, kde $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, eliptickou rovnicí na Ω.

Poznámka 3.5.5
- Pojem eliptičnosti rovnice ve výše uvedeném smyslu splývá s pojmem eliptičnosti, jak jsme jej uváděli v paragrafu o klasifikaci rovnic druhého řádu: matice $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{d}$ je symetrická a pozitivně definitní, tedy diagonalizovatelná, a navíc podobná jednotkové matici. Rozmyslete si podrobně.

- Existují různé varianty podmínek elipticity (3.15). Námi uvedená verze je poněkud nestandardní zjednodušujícím předpokladem, že (3.15) má platit na uzávěru Ω (většinou se požaduje splnění (3.15) pro $x \in \Omega$). Tento předpoklad již vlastně implikuje více: výraz

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\xi_i}{\|\xi\|} \frac{\xi_j}{\|\xi\|}\,, \quad \xi \neq 0\,, \tag{3.16}$$

  je kladný na kompaktní množině $(x, \eta) \in \overline{\Omega} \times S_1(0)$, $\eta_i = \xi_i/\|\xi\|$, proto na ní nabývá kladného minima $\alpha 0$. Tím jsme však dokázali, že

$$\exists\, \alpha > 0\,, \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > \alpha\|\xi\|^2 \quad \forall\, \xi \neq 0\,,\ x \in \overline{\Omega}\,, \tag{3.17}$$

  tedy tzv. silnou [zkontroluj pojem, event. přidej další možné elipticity] elipticitu operátoru L.

Následující věta ukazuje zajímavou skutečnost, že chování maxim a minim řešení eliptické rovnice $Lu = f$ je ovlivněno nejvíce znaménkem funkcí $c(x)$ a $f(x)$ (Například nerovnost $Lu \geq 0$ lze chápat i takto: buď $f \geq 0$ a u takové, že $Lu = f$).

Věta 3.5.6 (Zobecněný slabý princip maxima) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Buď L eliptický operátor ve smyslu Definice 3.5.4. Potom platí:*

1. *Je-li* $c(x) \equiv 0$ *v* Ω, *pak*

$$Lu \geq 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u\,, \tag{3.18}$$

$$Lu \leq 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u\,, \tag{3.19}$$

$$Lu = 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}\,. \tag{3.20}$$

2. *Je-li* $c(x) \leq 0$ *v* Ω, *pak*

$$Lu \geq 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+\,, \tag{3.21}$$

$$Lu \leq 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-\,, \tag{3.22}$$

$$Lu = 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|\,, \tag{3.23}$$

kde $u^+ := \max(u, 0)$, $u^- := \min(u, 0)$.

Poznámka 3.5.7 Užívá se i jiná definice pro u^-, rozmyslete si, že zde máme $u^- \leq 0$ a že v našem označení platí: $|u| = u^+ - u^-$, $u = u^+ + u^-$.

Tvrzení (3.22) lze zformulovat i takto: “Kladné maximum u nelze nabýt uvnitř Ω”, zatímco tvrzení (3.23) lze zformulovat i takto: “Záporné minimum u nelze nabýt uvnitř Ω.”

__*Důkaz*__. Buď $c(x) = 0, Lu \geq 0$. Chceme ukázat, že pro u platí slabý princip maxima. Zvolme $j \in \{1, \ldots, d\}$ pevně. Víme, že pro každé $\xi \in \mathbb{R}^d$ je $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0$ na $\overline{\Omega}$. Speciální volbou $\xi = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (volíme postupně všechny bázové vektroy), dostáváme $a_{jj} > 0$ pro $j = 1, \ldots, d$. $\overline{\Omega}$ je kompaktní a tudíž existuje $\min\limits_{\overline{\Omega}} a_{jj}(x) > 0$. Funkce $b_j(x)$ jsou na $\overline{\Omega}$ omezené, z čehož je vidět, že existuje $\gamma > 0$, že pro každé $x \in \overline{\Omega}$ platí $\gamma^2 a_{jj} + \gamma b_j > 0$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Definujme $u_\varepsilon := u(x) + \varepsilon e^{\gamma x_j}$. Potom $Lu_\varepsilon(x) = Lu(x) + \varepsilon(\gamma^2 a_{jj}(x) + \gamma b_j(x))e^{\gamma x_j} > 0$, neboť $Lu \geq 0$ a $\gamma^2 a_{jj}(x) + \gamma b_j(x) > 0$. Nechť u_ε nabývá svého maxima uvnitř Ω v bodě x_0. Potom $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = 0$ pro $i = 1, \ldots, d$ a matice druhých derivací $(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}{}_{i,j})_{i,j}$ je negativně semidefinitní. Ukážeme, že platí ($a_{ij}(x_0)$ jsou čísla!)

$$Lu_\varepsilon(x_0) = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0.$$

Nechť A, B jsou libovolné symetrické matice, A pozitivně a B negativně semidefinitní. Máme $\sum\limits_{i,j} a_{ij}b_{ij} = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij}b_{ji} = \sum\limits_i c_{ii}$, kde $C = AB$ je součin matic A a B. Snadno se ověří, že C je negativně semidefinitní a tedy pro každé i je $c_{ii} \leq 0$. Tedy $\sum\limits_{i,j} a_{ij}b_{ij} \leq 0$.

Tím jsme ukázali, že $Lu_\varepsilon(x_0) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \le 0$ (tady jsme konečně využili, že L je eliptický). To je však spor s tím, že $L_\varepsilon(x) > 0$, což jsme ukázali výš. Tedy maximum funkce u_ε nemůže ležet uvnitř Ω, $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon$.

Z definice u_ε je hned vidšt, že u_ε konverguje na $\overline{\Omega}$ stejnoměrně k u pro $\varepsilon \to 0$. Funkce "hodnota maxima dané funkce" jako zobrazení z prostoru spojitých funkcí na kompaktu s maximovou metrikou do $\mathbb{R}$ je spojité zobrazení,[2] a proto $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \to \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ a $\max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon \to \max\limits_{\partial\Omega} u$ pro $\varepsilon \to 0$. Jelikož $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon$, limitní přechod dá $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$. Ukázali jsme (3.18).

Vztah (3.19) se plyne z (3.18) přechodem k $-u$, (3.20) je důsledek (3.18) a (3.19).

Nechť dále $c(x) \le 0$ a $L_u \ge 0$. Označme $\Omega_+ := \Omega \cap \{u(x) > 0\}$. Jestliže $\Omega_+ = \emptyset$, platí (3.20) triviálně. Nechť $\Omega_+ \neq \emptyset$. Uvědomme si, že je to otevřená množina a pro $x \in \Omega_+$ platí

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = Lu - c(x)u(x) \ge 0,$$

neboť $Lu \ge 0$, $u > 0$ a $c \le 0$ na Ω_+. Označme levou stranu poslední rovnosti $L'u$. L' je eliptický operátor, $L'u \ge 0$ na omezené oblasti Ω_+ a proto podle (3.18) je $\max\limits_{\overline{\Omega}_+} u = \max\limits_{\partial\Omega_+} u$. Tedy jestliže $\Omega_+ \neq \emptyset$, platí dokonce slabý princip maxima. Jestliže $\Omega_+ = \emptyset$, potom je $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \le 0 \le \max\limits_{\partial\Omega} u^+$.

Vztahy (3.22) a (3.23) jsou pak už snadným důsledkem. □

Příklad 3.5.8 Pro $c(x) \ge 0$ žádnou obdobu tvrzení (3.21)-(3.23) očekávat nelze. Uvažujme následující příklad. Buď $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x, y < \pi\}$ čtverec o straně π a uvažujme $u(x,y) := \sin x \sin y$. Potom $\Delta u + 2u = 0$ v Ω, $u = 0$ na $\partial\Omega$, a přitom $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$. Nepřítomnost principu maxima v tomto případě má za následek i nejednoznačnost řešení odpovídající Dirichletovy úlohy: stejné rovnici a stejným datům vyhovuje i funkce identicky nulová v Ω. Nemusí to však vždy být nevýhodou - diskuse o vlastních číslech a vlastních funkcích.

Na závěr tohoto paragrafu se budeme věnovat tzv. odstranitelné singularitě.

Následující lemma lze rovněž nazírat jako "princip maxima, pro funkce, harmonické s výjimkou jednoho bodu." Chování v okolí onoho bodu však musíme znát. Lemma využijeme v důkaze po něm následující věty.

Lemma 3.5.9 *Buď $g \in \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)} \setminus \{x_0\})$, $\Delta g = 0$ na $B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$. Buď navíc*

$$g(x) = \mathrm{o}(U(x - x_0)), \quad x \to x_0, \tag{3.24}$$

[2] Na rozdíl od funkce "Bod, ve kterém se maximum nabývá", rozmyslete si!

kde $U(x)$ je elementární řešení Laplaceovy rovnice (viz (3.2)). Potom platí implikace: $g \le 0$ na $S_R(x_0)$ $\Rightarrow$ $g \le 0$ na $\overline{B_R(x_0)} \setminus \{x_0\}$.

Důkaz. Vezměme pevné $z \in B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ a $\varepsilon > 0$, a najděme $r > 0$ takové, že $z \notin B_r(x_0)$ a zároveň (díky (3.24))

$$g(x) \le |g(x)| \le \varepsilon\, U(x - x_0) \quad \forall\, x \in \overline{B_r(x_0)}.$$

Pro funkci $h(x) := g(x) - \varepsilon U(x - x_0)$ tedy speciálně máme $h \le 0$ na $S_r(x_0)$. Z předpokladů lemmatu však také plyne $h \le 0$ na $S_R(x_0)$ a přitom $\Delta h = 0$ v mezikoulí $B_R(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$. Podle principu maxima (3.11) je tedy $h \le 0$ v onom mezikruží, speciálně v bodě z máme

$$g(z) \le \varepsilon U(z - x_0)\,.$$

Protože $\varepsilon > 0$ může být jakékoli, máme odtud $g(z) \le 0$, a protože bod $z \in B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ byl libovolný, je naše tvrzení dokázáno. □

Věta 3.5.10 (O odstranitelené singularitě) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $\Delta u = 0$ v $\Omega \setminus \{x_0\}$. Nechť navíc*

$$g(x) = \mathrm{o}(U(x - x_0))\,, \quad x \to x_0\,. \tag{3.25}$$

Potom existuje vlastní $\lim_{x \to x_0} u(x)$, a po dodefinování u v x_0 hodnotou této limity je $\Delta u = 0$ v Ω.

Důkaz. Volme $R > 0$ takové, aby $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Buď dále $v \in \mathcal{C}^2(B_R(x_0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)})$ taková, že $\Delta v = 0$ na $B_R(x_0)$ a $v = u$ na $S_R(x_0)$. Taková funkce v existuje: je definovaná Poissonovým integrálem z hodnot funkce u na $S_R(x_0)$. Protože v je omezená na $B_R(x_0)$, splňují funkce $g_1 := u - v$ i $g_2 := v - u$ předpoklady předchozího lemmatu. Proto je $u = v$ na $\overline{B_R(x_0)} \setminus \{x_0\}$ a funkce $\widetilde{u}$, definovaná předpisem

$$\widetilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{na } \overline{\Omega \setminus B_R(x_0)}\,, \\[2ex] v(x) & \text{na } \overline{B_R(x_0)}\,, \end{cases}$$

je hledaným harmonickým rozšířením u na Ω. □

3.6 Věta Liouvilleova a věty Harnackovy

Z komplexní analýzy víme, že funkce, která je holomorfní a omezená v celém $\mathbb{C}$, je konstantní. Následující věta tvrdí něco podobného pro harmonické funkce v libovolné dimenzi.

Věta 3.6.1 (Liouville) *Buď $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ zdola (nebo shora) omezená na $\mathbb{R}^d$, $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^d$. Pak u je konstantní.*

<u>*Důkaz*</u>. Nechť u je například omezená zdola, $u \geq c$. Pak ovšem $u-c \geq 0$, $\Delta(u-c) = \Delta u$, a tedy bez újmy na obecnosti předpokládejme $u \geq 0$. Volme $x \in \mathbb{R}^d$ pevně, a ukažme $u(x) = u(0)$, tím bude důkaz proveden.

Volme $R > |x|$ a použijme na kouli $B_R(0)$ Poissonův vzorec (3.7):

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int_{S_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^d} \, dS_\xi \, .$$

Pro $\xi \in S_R(0)$ platí nerovnosti $R - |x| \leq |x - \xi| \leq R + |x|$ (x leží uvnitř koule, nakreslete si obrázek), které implikují

$$\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{d-1}} = \frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^d} \geq \frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^d} \geq \frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^d} = \frac{R-|x|}{(R+|x|)^{d-1}} \, .$$

Vynásobme tyto nerovnosti (kladným číslem) $u(\xi)/(\varkappa_d R)$ a integrujme dS_ξ přes $S_R(0)$:

$$\frac{1}{\varkappa_d R} \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{d-1}} \int_{S_R(0)} u(\xi) \, dS_\xi \geq u(x) \geq \frac{1}{\varkappa_d R} \frac{R-|x|}{(R+|x|)^{d-1}} \int_{S_R(0)} u(\xi) \, dS_\xi \, .$$

Oba krajní itegrály upravíme podle věty o průměru – viz (3.8):

$$u(0) \, \frac{R^{d-2} \, (R+|x|)}{(R-|x|)^{d-1}} \geq u(x) \geq u(0) \, \frac{R^{d-2} \, (R-|x|)}{(R+|x|)^{d-1}} \, . \tag{3.26}$$

Tyto nerovnosti platí pro všechna $R > |x|$, lze tedy v nich provést limitní přechod $R \to +\infty$, který dá $u(0) \geq u(x) \geq u(0)$, což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka 3.6.2

- Díky hladkosti u stačí předpokládat jednostrannou omezenost u vně nějaké koule. Důsledkem Liouvilleovy věty je například skutečnost, že pro nekonstantní $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, $\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^d$, nemůže existovat limita pro $|x| \to +\infty$.
- Nerovnosti (3.26) platí i pro harmonické funkce na omezených oblastech, obsahujících kouli $B_R(0)$. Podobného charakteru jsou i následující dvě tvrzení (připisovaná Harnackovi), která zde uvádíme pro ilustraci a bez důkazů. Ty je možno nalézt v …

  (i) Buď $u > 0$, $\Delta u = 0$ na $B_R(0)$. Potom pro všechna $0 < r < R$ a pro všechna $x, y \in B_r(0)$ platí $u(x) \leq u(y) \frac{R^2}{R^2-r^2} \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^d$.

  (ii) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $K \subset \Omega$ kompaktní. Pak existuje konstanta $c > 0$, že pro všechna $u > 0$, $\Delta u = 0$ na Ω a pro všechna $x, y \in K$ je $u(x) \leq c\, u(y)$.

V dalším se budeme zabývat studiem posloupností harmonických funkcí.

Věta 3.6.3 (První věta Harnackova) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $u_n \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u_n = 0$ v Ω. Pokud $u_n \rightrightarrows u_0$ na $\partial\Omega$, pak*

(i) *existuje* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ *v* Ω, $u = u_0$ *na* $\partial\Omega$*;*

(ii) $u_n \rightrightarrows u$ *v* $\overline{\Omega}$*;*

(iii) $u_n,\, u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$*, a pro všechny multiindexy* α *je* $D^\alpha u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} D^\alpha u$ *v* Ω*.*

[Tedy m.j.: stejnoměrná limita spojitých stop harmonických funkcí je stopou harmonické funkce.]

Důkaz. (i) Podle principu maxima je

$$\min_{\partial\Omega}(u_n - u_m) \le u_n(x) - u_m(x) \le \max_{\partial\Omega}(u_n - u_m) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}\,,$$

a tedy u_n je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Proto existuje $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, že $u_n \rightrightarrows u$ v $\overline{\Omega}$. Nutně je $u = u_0$ na $\partial\Omega$.

(ii) Pro všechna $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ a všechna n platí dle (3.8)

$$u_n(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d R^{d-1}} \int_{S_R(x_0)} u_n(\xi)\, dS_\xi\,.$$

Protože $u_n \rightrightarrows u$ na kompaktu $S_R(x_0)$, lze provést limitní přechod za integrálním znamením. Triviálně je také $u_n(x_0) \to u(x_0)$, a tedy pro všechna $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ dostáváme

$$u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d R^{d-1}} \int_{S_R(x_0)} u(\xi)\, dS_\xi\,.$$

Podle obrácené věty o střední hodnotě je tedy $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $\Delta u = 0$ v Ω.

(iii) Z vlastností u_n rovněž plyne $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Volme nyní kompakt $K \subset \Omega$. Pak je $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > h > 0$. Volme jako v důkaze obrácené věty o střední hodnotě regularizátor ω_h (s parametrem $h > 0$). Pak pro všechna $x \in K$ lze psát $u_n(x) = \int_\Omega u_n(\xi)\, \omega_h(|x - \xi|)\, d\xi$, $u(x) = \int_\Omega u(\xi)\, \omega_h(|x - \xi|)\, d\xi$ a tedy (rozmyslete si pečlivě derivování integrálu podle parametru):

$$D^\alpha u_n(x) = \int_\Omega u_n(\xi)\, D^\alpha \omega_h(|x - \xi|)\, d\xi\,, \qquad D^\alpha u(x) = \int_\Omega u(\xi)\, D^\alpha \omega_h(|x - \xi|)\, d\xi\,.$$

Hodnota integrálu $A := \int_{B_h(x)} \big|D^\alpha \omega_h(|x - \xi|)\big|\, d\xi$ závisí na α a h, ne však na $x \in K$. Dále: díky stejnoměrné konvergenci $u_n \rightrightarrows u$ existuje pro každé $\varepsilon > 0$ index n_0, že pro všechna $n \ge n_0$ je $\sup_{\xi\in\Omega} \big|u_n(\xi) - u(\xi)\big| < \varepsilon/A$. Pak ovšem

$$\Big|D^\alpha u_n(x) - D^\alpha u(x)\Big| \le \int_\Omega \big|u_n(\xi) - u(\xi)\big|\, \big|D^\alpha \omega_h(|x - \xi|)\big|\, d\xi < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$$

stejnoměrně v $x \in K$, odkud plyne $D^\alpha u_n \rightrightarrows D^\alpha u$ v K, c.b.d. $\square$

Věta 3.6.4 (Druhá věta Harnackova) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ obecně neomezená oblast, $u_n \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u_n = 0$ v Ω. Pokud u_n je monotónní posloupnost funkcí a navíc existuje $x_0 \in \Omega$, že $u_n(x_0)$ konverguje, tak existuje $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ v Ω, že $u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} u$ v Ω.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že posloupnost u_n je neklesající. Volme $R > 0$ tak, aby $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ a dále volme $0 < r < R$. Ukážeme nejprve, že $u_n \rightrightarrows$ v $\overline{B_r(x_0)}$.

Buď $x \in \overline{B_r(x_0)}$. Z vyjádření hodnot $u_m(x)$, $u_n(x)$ Poissonovým integrálem (3.7) přes $B_R(x_0)$ (větší z obou koulí) plyne pro $m > n > n_0$:

$$0 \le u_m(x) - u_n(x) = \frac{1}{\varkappa_d} \int_{S_R(x_0)} \Big(u_m(\xi) - u_n(\xi)\Big) \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{R\,|x-\xi|^d}\, dS_\xi\,.$$

Protože $r < R$, máme $|x-\xi| \ge R - r > 0$, a tedy $\frac{R^2-|x-x_0|^2}{R\,|x-\xi|^d} \le \frac{R}{(R-r)^d}$, což v zápětí použijeme při odhadu předchozího integrálu. Vezměme ještě $\varepsilon > 0$ a najděme n_0, aby $u_m(x_0) - u_n(x_0) < \varepsilon$ pro $m > n \ge n_0$. Celkem máme:

$$\begin{aligned} 0 \le u_m(x) - u_n(x) &\le \frac{1}{\varkappa_d} \frac{R}{(R-r)^d} \int_{S_R(x_0)} \Big(u_m(\xi) - u_n(\xi)\Big)\, dS_\xi \\ &= \frac{R^{d-2}}{(R-r)^d} \Big(u_m(x_0) - u_n(x_0)\Big) \\ &\le c\,\varepsilon \qquad \text{pro } m > n \ge n_0\,. \end{aligned}$$

Na závěr jsme použili větu o průměru, tedy vztah (3.8). Konstanta $c = c(R, r, d)$ nezávisí na $x \in \overline{B_r(x_0)}$, a tedy posloupnost $u_n(x)$ je cauchyovská v $\mathcal{C}(\overline{B_r(x_0)})$. Odtud $u_n \rightrightarrows u$ na $\overline{B_r(x_0)}$. Stejně jako v předchozí větě lze ukázat, že $\Delta u = 0$.

Víme tedy, že posloupnost u_n konverguje stejnoměrně k harmonické funkci na každé kouli $B_r(x_0)$, která se i se svým uzávěrem vejde do Ω, přičemž x_0 je bodem konvergence posloupnosti $u_n(x_0)$. Odtud (pokrývacím argumentem) plyne, že $u_n \rightrightarrows u$ na každém kompaktu $K \subset \Omega$. Podrobnosti ponecháváme čtenáři. □

Než dokážeme další větu, připomeňme si slavnou větu Arzèla-Ascoliho ve verzi pro posloupnost funkcí (její důkaz najdete např. v [16]):

Věta 3.6.5 (Arzèla-Ascoli) *Buď $F \subset \mathcal{C}(K)$, kde K je kompaktní topologický prostor. Normu v $\mathcal{C}(K)$ označme $\|\cdot\|_\infty$. Nechť*

- *existuje $M > 0$, že $\|u_n\|_\infty \le M$ pro všechna $u_n \in F$ (tzv.* stejná omezenost fcí *u_n);*
- *$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$, že $\forall\,u_n \in F$ a $\forall\,x, y \in K$ je $|x-y| < \delta \Rightarrow |u_n(x) - u_n(y)| \le \varepsilon$ (tzv.* stejná stejnoměrná spojitost fcí *u_n).*

Potom existuje podposloupnost $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ taková, že $u_{n_k} \rightrightarrows u$ na K.

Věta tedy tvrdí, že stejně omezená a stejně stejnoměrně spojitá posloupnost funkcí v $\mathcal{C}(K)$ je v tomto prostoru relativně kompaktní.

Věta 3.6.6 (Relativní kompaktnost harmonických funkcí) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *oblast,* $u_n \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u_n = 0$ *v* Ω. *Pokud existuje* $M > 0$, *že* $|u_n| \leq M$ *stejnoměrně v* Ω, *tak existuje podposloupnost* u_{n_k} *a funkce* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ *v* Ω, *že* $u_{n_k} \overset{loc}{\rightrightarrows} u$ *v* Ω.

Důkaz. Doplnit. □

Poznámka 3.6.7 Čtenář, znalý teorie Lebesgueova integrálu zná jistě tři nejdůležitější situace,ve kterých je možno uskutečnit limitní přechod za integrálním znamením: konverguje-li posloupnost funkcí stejnoměrně na množině konečné míry, nebo konverguje-li monotónně, nebo je-li stejnoměrně majorizována integrabilní funkcí. Všimněte si, že předchozí tři věty pojednávají o podobných situacích: stejnoměrná konvergence, monotónní konvergence, a situace, ve které je posloupnost funkcí stejnoměrně majorizována.

3.7 Řešení Dirichletovy úlohy Perronovou metodou

Věta 3.7.1 (O řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *omezená oblast,* $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. *Potom existuje právě jedna funkce* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cup \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, *že*

$$\Delta u = 0 \qquad v \quad \Omega\,, \tag{3.27}$$

$$u = \varphi \qquad na \quad \partial\Omega\,. \tag{3.28}$$

Pro tuto funkci navíc platí $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Poznámka 3.7.2

- Jednoznačnost už víme, je to důsledek obecného principu maxima. Pro jednoznačnost není potřeba žádná hladkost hranice, ta je potřeba pro existenci. V důkazu věty uvidíme, že je vlastně potřeba poněkud slabší vlastnost hranice (existence tzv. bariéry, kterou $\mathcal{C}^2$ hranice mají).
- Regularitu řešení Laplaceovy rovnice (tj. skutečnost, že $\Delta u = 0$ a $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ implikuje již $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$) jsme již také dokazovali (viz metodu regularizátorů v obrácené větě o střední hodnotě pro harmonické funkce).
- Důkaz věty povedeme tzv. metodou subharmonických a superharmonických funkcí, nazývanou též metoda harmonického zdvihu nebo Perronova metoda. Důkaz touto metodou lze nalézt například v [18]. Jinou možností je použít tzv. metodu potenciálů, viz například [10].

Zajímá nás existence a jednoznačnost řešení úlohy:

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 \quad \text{v } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi \end{aligned} \tag{3.29}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast a $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Řešení hledáme v $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
K důkazu příslušné věty bude třeba následujících definic, pozorování a tvrzení (převážně bez důkazu):

1. **Definice 3.7.3** *Řekneme, že oblast Ω má vlastnost (E) (existence) pokud:*

   $$\forall \xi \in \partial\Omega \quad \exists R > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R}^d : B_R(y) \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega \quad \wedge \quad \overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$$

   Poznámky:

   - $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2 \implies \Omega$ má vlastnost (E)
   - Ω je konvexní $\implies \Omega$ má vlastnost (E)
   - Nesplnění (E) byť v jednom bodě může dát neexistenci řešení.

2. **Definice 3.7.4** *Řekneme, že funkce $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je <u>subharmonická</u> v Ω pokud $\forall B$ koule, $\overline{B} \subset \Omega$:*

   $$\forall h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \triangle h = 0 \ v\ B : v \le h \ na\ \partial B \implies v \le h \ v\ B \tag{3.30}$$

   Řekneme, že funkce $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je <u>superharmonická</u> v Ω pokud $\forall B$ koule, $\overline{B} \subset \Omega$:

   $$\forall h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \triangle h = 0 \ v\ B : v \ge h \ na\ \partial B \implies v \ge h \ v\ B \tag{3.31}$$

3. $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ pak:

   $$v \text{ je subharmonická} \implies \triangle v \le 0 \text{ v } \Omega \tag{3.32}$$
   $$v \text{ je superharmonická} \implies \triangle v \ge 0 \text{ v } \Omega \tag{3.33}$$

4. Důsledek: $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \wedge \triangle v = 0 \iff v$ je subharmonická i superharmonická .

5. Pro $W := \max(v_1, \ldots, v_n)$, $w := \min(v_1, \ldots, v_n)$, platí:

   $$v_1, \ldots, v_n \quad \text{jsou subharmonické} \implies W \quad \text{je subharmonická} \tag{3.34}$$
   $$v_1, \ldots, v_n \quad \text{jsou superharmonické} \implies w \quad \text{je superharmonická} \tag{3.35}$$

6. v_s je subharmonická v Ω, v^s je superharmonická v Ω a $v_s \le v^s$ na $\partial\Omega \implies v_s \le v^s$ v $\overline{\Omega}$.

7. **Definice 3.7.5** *Nechť v je subharmonická, B je koule, $\overline{B} \subset \Omega$. Dále nechť $\overline{v}$ je funkce na $\overline{B}$ daná Poissonovým integrálem z hodnot v na ∂B. (Pro $\overline{v}$ platí $\triangle \overline{v} = 0$ v B a $\overline{v} = v$ na ∂B.)*
   Pak funkci:
   $$V(x) := \begin{cases} v(x) & x \in \Omega \setminus B \\ \overline{v}(x) & x \in \overline{B} \end{cases}$$
   nazveme harmonickým zdvihem funkce v na Ω vzhledem k B.

   Pro V platí:

   - $\triangle V = 0$ v B ($\overset{4.}{\Longrightarrow}$ V je superharmonická v B) ... odtud "harmonický"
   - $v = V$ na ∂B $\overset{6.}{\Longrightarrow}$ $v \leq V$ na $\overline{B}$ $\Longrightarrow$ $v \leq V$ v Ω ... odtud "zdvih"
   - V je subharmonická v Ω

8. **Definice 3.7.6** *Řekneme, že $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je subřešení úlohy (3.29), jestliže:*

   - *v je subharmonická v Ω*
   - *$v \leq \varphi$ na $\partial\Omega$*

   Řekneme, že $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je superřešení úlohy (3.29), jestliže:

   - *v je superharmonická v Ω*
   - *$v \geq \varphi$ na $\partial\Omega$*

9. Vždy existuje subřešení i superřešení úlohy (3.29). (např. $v \equiv \min_{\partial\Omega} \varphi$ je subřešení)

10. Pokud existuje u řešení úlohy (3.29), pak je to subřešení i superřešení.
    Z 6. pak plyne $v_s \leq u \leq v^s \quad \forall v_s$ subharmonická, v^s superharmonická.

Věta 3.7.7 *Buď Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^d$ mající vlastnost (E).*
Potom existuje právě jedno řešení $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ úlohy (3.29). Navíc $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Poznámky k důkazu:

1. Jednoznačnost plyne z principu maxima i bez vlastnosti (E).
2. $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \wedge \triangle u = 0 \implies u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ... viz. odstavec 3.2.
3. metody důkazu: Peronova (též metoda subřešení, metoda harmonického zdvihu) (lit. Renardy–Rogers) a metoda potenciálů (lit. John–Nečas)

<u>*Důkaz*</u>. Protože množina

$$A := \{v \text{ je subřešení úlohy (3.29); } \min_{\partial\Omega} \varphi \leq v \leq \max_{\partial\Omega} \varphi\}$$

je neprázdná (viz bod 9.), můžeme bodově definovat funkci

$$u(x) := \sup_{v\in A} v(x) \quad \forall x \in \Omega$$

o které dokážeme, že je řešením.
K tomu je třeba:

1. $$u \in \mathcal{C}^2(\Omega),\ \triangle u = 0 \text{ v } \Omega \qquad \text{(platí i bez (E))}$$

2. $$\text{(E)} \implies \forall \xi \in \partial\Omega : \lim_{x\in\Omega, x\to\xi} u(x) = \varphi(\xi)$$

ad 1. Nechť $x_0 \in \Omega$ je libovolné. Z definice u existuje $\{v_m\},\ v_m(x_0) \to u(x_0)$. Volme $R > 0$, aby $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, a označme V_m harmonický zdvih funkce v_m na Ω vzhledem k $B_R(x_0)$. Pro V_m platí:

1. $V_m \in A$
2. $v_m(x_0) \leq V_m(x_0) \leq u(x_0) \implies V_m(x_0) \to u(x_0)$
3. $\triangle V_m = 0$ na $B_R(x_0)$

Z 2. a 3. plyne podle Věty 3.6.4, že existuje vybraná posloupnost V_{m_k} tak, že

$$V_{m_k} \rightrightarrows v \text{ lokálně na } B_R(x_0)$$

Navíc o v víme, že $v \in \mathcal{C}^2(B_R(x_0))$ a $\triangle v = 0$ na $B_R(x_0)$. Dokážeme $v = u$ na $B_R(x_0)$. Z konstrukce v je zřejmě $v \leq u$. Pro důkaz opačné nerovnosti předpokládejme pro spor

$$\exists y \in B_R(x_0)\ \exists w \in A : v(y) < w(y) \leq u(y)\,. \tag{3.36}$$

Nyní položme $z_k := \max(w, V_k)$ a dále stejně jako při konstrukci v máme Z_k příslušné harmonické zdvihy a existuje vybraná Z_{k_j} a $Z_{k_j} \rightrightarrows z$ lokálně na $B_R(x_0)$. Nyní máme $v - z \leq 0$ a $\triangle(v - z) = 0$ na $B_R(x_0)$ a $(v - z)(x_0) = 0$ z čehož plyne, že $v - z$ nabývá v x_0 lokálního maxima. Podle principu maxima je $v - z \equiv 0$ na $B_R(x_0)$ a tedy $v(y) = z(y) \geq w(y)$ což je spor s (3.36).

ad 2. (Diskuse o hranici a nabývání dat)
Nechť $\forall \xi \in \partial\Omega \quad \exists w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$:

- $$\lim_{x\in\Omega, x\to\xi} w(x) = 0$$
- $w > 0$ na $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$
- w je superharmonická v Ω

potom funkci w nazveme bariérou. Z podmínky (E) plyne, že v každém bodě $\xi \in \partial\Omega$ existuje bariéra a to funkce:

$$w(x) := \begin{cases} \ln\frac{1}{R} - \ln\frac{1}{|x-y|} & \text{pro } d = 2\,, \\ \frac{1}{R^{d-2}} - \frac{1}{|x-y|^{d-2}} & \text{pro } d \geq 3\,, \end{cases}$$

kde y a R jsou střed a poloměr koule z podmínky (E). Nyní chceme dokázat, že pro libovolné pevné $\xi \in \partial\Omega$ platí:

$$\lim_{x\in\Omega, x\to\xi} u(x) = \varphi(\xi)$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ (ze spojitosti φ), aby

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \partial\Omega, |x - \xi| < \delta$$

Dále, protože w nabývá na $\overline{\Omega \setminus U_\delta(\xi)}$ kladného minima, existuje $K > 0$ tak, že

$$w(x) \geq \frac{2M}{K} \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, |x - \xi| \geq \delta$$

Nyní zavedeme $v_1(x) := \varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x)$. Tato funkce je superharmonická, a protože $v_1(x) \geq \varphi(\xi) + \varepsilon$ na $\partial\Omega$ je v_1 i superřešení. Podobně $v_2(x) := \varphi(\xi) - \varepsilon - Kw(x)$ je subřešení. Nyní máme $v_2(x) \leq u(x) \leq v_1(x)$ v Ω a odtud (jelikož $w(x) \stackrel{x\to\xi}{\longrightarrow} 0$) plyne $|u(x) - \varphi(\xi)| \leq 2\varepsilon$. Tím je důkaz hotov. $\square$

3.8 Harmonické funkce na vnějších oblastech

Budeme se nyní zabývat Dirichletovou úlohou pro Laplaceovu (resp. Laplace-Poissonovu) rovnici na některých neomezených oblastech. Oním "některých" budeme rozumět takzvané vnější oblasti, to jest takové, jejichž doplněk je sám uzávěrem nějaké (omezené) oblasti. Dále si povšimněme, že na takovýchto oblastech vyžadujeme, aby harmonická funkce splňovala kromě Laplaceovy rovnice ještě jakési limitní chování v nekonečnu.

Definice 3.8.1 (Harmonické funkce na vnější oblasti) *Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nazveme* vnější oblastí, *pokud existuje omezená oblast $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_1}$. Je-li Ω vnější oblast v $\mathbb{R}^d$, nazveme funkci $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonickou v Ω, pokud*

$$1) \quad \Delta u(x) = 0 \quad \textit{pro všechna } x \in \Omega; \tag{3.37}$$

$$2) \quad u(x) = \mathrm{O}(|x|^{2-d})\,, \quad |x| \to \infty. \tag{3.38}$$

Uvědomte si tento paradox: zatímco v dimenzích 3 a výše podmínka (3.38) říká, že harmonická funkce se "chová v nekonečnu jako elementární řešení Laplaceovy rovnice", v dimenzi 2 toto tvrzení neplatí: (3.38) se tam redukuje na požadavek omezenosti v nekonečnu, zatímco elementární řešení $U(x) = -1/(2\pi)\ln|x|$ (srov. (3.2)) v nekonečnu logaritmicky klesá. Paradoxně tedy elementární řešení Laplaceovy rovnice není v dimenzi 2 harmonickou funkcí na žádné vnější oblasti. Jedním z odůvodnění této volby je například to, že ve třídě harmonických funkcí budeme v zápětí schopni ukázat (viz Věta 3.8.3) jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici.

Definice 3.8.2 (Dirichletova úloha na vnější oblasti) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ vnější oblast, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Funkci $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ nazvu klasickým řešením Dirichetovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici na Ω, pokud*

- $\Delta u = f$ *v* Ω;
- $u = \varphi$ *na* $\partial\Omega$;
- $u(x) = \mathrm{O}(|x|^{2-d})$, $|x| \to \infty$.

Věta 3.8.3 (Jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy na vnější oblasti) *Existuje nejvýše jedna funkce u, vyhovující Definici 3.8.2.*

Důkaz. Důkazy v dimenzi 2 a dimenzích větších než 2 jsou diametrálně odlišné. □

Existenčním důkazem se zde nebudeme zabývat. Zmíníme pouze jeden speciální případ, a sice Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici na vnějšku koule, neboť v tomto případě lze řešení stejně jako v případě vnitřku koule psát explicitně (srovnejte s Větou 3.3.2, resp. se vztahy (3.7)).

Věta 3.8.4 (Řešení Dirichletovy úlohy na vnějšku koule) *Buď $B_R(x_0)$ koule v $\mathbb{R}^d$, $\Omega := \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(x_0)}$, $\varphi \in \mathcal{C}(S_R(x_0))$. Definujme*

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{pro } x \in S_R(x_0)\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\varkappa_d R}\displaystyle\int_{S_R(x_0)} \varphi(\xi)\, \frac{|x-x_0|^2 - R^2}{|x-\xi|^d}\, dS_\xi & \text{pro } |x| > R\,. \end{cases} \tag{3.39}$$

Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, je harmonická v Ω a je (jednoznačným) řešením klasické Dirichletovy úlohy na vnějšku koule $B_R(x_0)$.

Důkaz. Podobný důkaz jako pro vnitřek koule, s výjimkou klesání v nekonečnu a drobnou odlišností při důkazu nabývání hraničních dat. □

Poznámka 3.8.5 Pro chování derivací harmonické funkce u na libovolné vnější oblasti Ω platí:

$$D^\alpha u(x) = \mathrm{O}\big(|x|^{2-d-|\alpha|}\big)\,, \quad |x| \to \infty\,,$$

kde α je libovolný multiindex. Zkuste si to rozmyslet. Návod: vnější oblast Ω je doplňkem uzávěru omezené oblasti Ω_1. Zvolne $R > 0$, aby $\Omega_1 \subset B_R(0)$ a označme symbolem φ hodnoty, kterých u nabývá na $S_R(0)$. Z jednoznačnosti harmonického řešení Dirichletovy úlohy pro vnějšek koule plyne, že u je vně $B_R(0)$ vyjádřena integrálem (3.39). Dokončete úvahu.