Kapitola 4

Evoluční rovnice

Termín “evoluční rovnice” používáme pro parciální diferenciální rovnice, obsahující časovou derivaci,[1] nejčastěji pak rovnice rozřešené vzhledem k nejvyšší časové derivaci v nich obsažené. Zde se budeme zabývat dvěma význačnými představiteli takových rovnic: rovnicí vedení tepla jako reprezentantem třídy rovnic parabolických, a vlnovou (hyperblickou) rovnicí.

4.1 Rovnice vedení tepla

Definice 4.1.1 (Cauchyova úloha pro rovnici vedení tepla) *Buď $\Omega = \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Řekneme, že $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ je klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla, pokud*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad \text{pro všechna } (x,t) \in Q_T\,, \tag{4.1}$$

$$u(\cdot,0) = \varphi \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{4.2}$$

a přitom $u \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(Q_T)$.

Definice 4.1.2 (Počátečně-okrajová úloha pro rovnici vedení tepla) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$ (tzv. časoprostorový válec), $\Gamma := (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times \langle 0,T\rangle)$ (tzv. parabolická hranice časoprostorového válce). Buď dále $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Řekneme, že $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ je klasickým řešením počátečně-okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla, pokud*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad \text{pro všechna } (x,t) \in Q_T\,, \tag{4.3}$$

$$u = \varphi \qquad \text{pro všechna } (x,t) \in \Gamma\,, \tag{4.4}$$

[1] Přítomnost času signalizuje evoluci; pokus o zavedení termínu “revoluční rovnice” nebyl podle autorových znalostí nikdy učiněn, i když některým dějinným epochám by to bylo podobné.

a přitom $u \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{Q_T} \setminus \Gamma)$.

Definice 4.1.3 (Greenova funkce pro rovnici vedení tepla) *Fundamentálním řešením (Greenovou funkcí) pro rovnici vedení tepla (RVT) nazvu funkci*

$$G(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0. \tag{4.5}$$

Poznámka 4.1.4 Greenovu funkci lze nalézt pomocí Fourierovy transformace jako řešení úlohy $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$, které ve smyslu distribucí splňuje $\lim_{t\to 0+} u(\cdot,t) = \delta$. Výpočet vyžaduje znalost chování Fourierovy transformace na prostoru temperovaných distribucí a zde jej zatím nebudeme provádět. Čtenář může konzultovat například [22] nebo [2].

Lemma 4.1.5 (Vlastnosti Greenovy funkce pro rovnici vedení tepla) *Funkce G, definovaná vztahem (4.5), splňuje $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,+\infty))$, a dále*

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0.$$

Ve smyslu distribucí navíc platí $\lim_{t\to 0+} G(\cdot,t) = \delta$. Přitom v bodovém smyslu je

$$\lim_{t\to 0+} G(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0, \\ +\infty & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

O vlastnosti Greenovy funkce se opírá následující věta, která ukazuje, že jedno z řešení Cauchyovy úlohy (časem uvidíme, v jakém smyslu je takové řešení jednoznačné) lze pro vhodná data psát explicitně.

Věta 4.1.6 (Existence řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla) *Buď $T > 0$, $Q_T = \mathbb{R}^d \times (0,T)$, $f \in \mathcal{C}^2(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ omezené funkce. Nechť navíc jsou všechny prostorové derivace f až do řádu 2 včetně omezené na Q_T. Potom funkce u, definovaná předpisy $u(x,0) := \varphi(x)$ na $\mathbb{R}^d$, a*

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\,\varphi(y)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-\tau)\,f(y,\tau)\,dy\,d\tau \tag{4.6}$$

pro $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$, je klasickým řešením Cauchyovy úlohy (4.1)–(4.2). Navíc platí, že[2] *$u \in \mathcal{C}^\infty_x(Q_T) \cap \mathcal{C}^2_t(Q_T)$, a dále*

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{Q_T})} \le \|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} + T\,\|f\|_{\mathcal{C}(\overline{Q_T})}. \tag{4.7}$$

[2] Indexem u prostoru spojitých funkcí míníme to, že u derivujeme pouze podle x, resp. podle t.

<u>*Důkaz*</u>. Zavedeme označení

$$u_1(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y)dy$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau)dyd\tau.$$

Tyto integrály upravíme substitucí $u = -\frac{x-y}{(4t)^{\frac{1}{2}}}$ s $dy = (4t)^{\frac{d}{2}}du$, resp. $u = -\frac{x-y}{(4(t-\tau))^{\frac{1}{2}}}$ s $dy = (4(t-\tau))^{\frac{1}{2}}du$, čímž dostaneme vyjádření

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\varphi(x+2u\sqrt{t})du\,,$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)dud\tau\,.$$

Jednu z výhod těchto úprav, a sice, že se závislost na čase přesunula ze jmenovatelů zlomků dodovnitř do funkcí φ resp. f, oceníme hned v následujícím kroku.

Krok 1: Odhady

Nejdříve provedeme odhady $\forall(x,t) \in Q_T$

$$|u_1(x,t)| \leq \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|u|^2}\varphi(x+2u\sqrt{t})\right| du \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}du = \|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}\,,$$

tudíž $\|u_1\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}$. Obdobně postupujeme v odhadu pro $u_2(x,t)$, jest

$$\begin{aligned}|u_2(x,t)| &\leq \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|u|^2} f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\right| dud\tau \\ &\leq \sup_{(y,\tau)\in Q_T} |f(y,\tau)| \int_0^t \left(\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}du \right) d\tau \\ &= \|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \int_0^t d\tau \leq t\,\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \leq T\,\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)}\,,\end{aligned}$$

odkud $\|u_2\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \leq T\,\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)}$. Protože $u(x,t)$ je součtem funkcí $u_1(x,t)$ a $u_2(x,t)$ na Q_T resp. je rovná $\varphi(x)$ pro $t=0$, dostaneme použitím trojúhleníkové nerovnosti požadovaný odhad z věty.

Krok 2: Vlastnosti funkci u_1 a u_2

Dále se budeme zabývat funkcemi $u_1(x,t)$ a $u_2(x,t)$ odděleně. Budeme hojně využívat vět o spojitosti integrálu podle parametru a derivaci integrálu podle parametru. Můžeme si uvědomit, že snadné použití těchto vět bude důsledkem dodatečných předpokladů na funkce $f(x,t)$ a $\varphi(x)$ oproti původní formulaci Cauchyho úlohy v Definici (4.1.1).

Chtěli bychom ukázat, že funkce $u_1(x,t)$ řeší úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 &= 0 \quad \text{ v } Q_T\,, \\ u_1(x,0) &= \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d\,, \end{aligned}$$

zatímco funkce $u_2(x,t)$ je řešením úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 &= f \quad \text{ v } Q_T\,, \\ u_2(x,0) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d\,. \end{aligned}$$

V obou případech se počáteční podmínky nabývají ve smyslu limity. Díky linearitě rovnice vedení tepla pak bude součet funkcí $u_1 + u_2$ řešením Cauchyho úlohy z Definice (4.1.1).

Krok 2a: Spojitost a nabývání okrajových podmínek pro u_1

Obraťme nyní svou pozornost na funkci $u_1(x,t)$. O její spojitosti v Q_T nelze pochybovat. Zde však požadujeme spojitost v $\overline{Q_T}$. Na hranici Q_T (tzn. v bodech $(x,0)$) je funkce $u(x,t)$ definována jako $\varphi(x)$. Je tedy třeba ukázat, že $\forall x_0 \in \mathbb{R}^d$ platí

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0+) \\ (x,t)\in Q_T}} u_1(x,t) = \varphi(x_0),$$

aneb podle definice limity chceme ukázat, že vhodnou volbou okolí $\mathcal{U}_{x,t}(x_0,0)$ lze výraz $|u_2(x,t) - \varphi(x_0)|$ libovolně zmenšit. Uvědomíme si, že "velikost" okolí $\mathcal{U}_{x,t}$ je určena jeho "prostorovým" a "časovým" rozměrem. Začneme s odhady.

$$|u_1(x,t) - \varphi(x_0)| \le |u_1(x,t) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x_0)|$$

Druhý sčítanec lze učinit menším než $\frac{\varepsilon}{3}$, pokud zvolíme dostatečně malý "prostorový" rozměr okolí $\mathcal{U}_{x,t}(x_0,0)$, neboť funkce $\varphi(x)$ je spojitá. Pro člen $|u_2(x,t) - \varphi(x)|$ máme

$$\begin{aligned} |u_1(x,t) - \varphi(x)| &= \left| \left(\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} \varphi(x + 2u\sqrt{t}) du \right) - \varphi(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} \left(\varphi(x + 2u\sqrt{t}) - \varphi(x) \right) du \right|, \end{aligned}$$

normu tohoto integrálu odhadneme shora integrálem z normy a ten rozepíšeme na

$$\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{|u|\ge R} e^{-|u|^2} \left| \varphi(x + 2u\sqrt{t}) - \varphi(x) \right| du + \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{|u|\le R} e^{-|u|^2} \left| \varphi(x + 2u\sqrt{t}) - \varphi(x) \right| du\,.$$

První z integrálů lze odhadnout $\frac{\varepsilon}{3}$ pokud zvolíme vhodné (rozuměj velké) R (neboť integrál přes celé $\mathbb{R}^d$ je konečný). Druhý integrál (zde již je u omezené) učiníme menším než $\frac{\varepsilon}{3}$ tak, že rozumně zvolíme poslední volný parametr – časový rozměr okolí $\mathcal{U}_{x,t}(x_0,0)$ – a využijeme stejnoměrné spojitosti φ.

Krok 2b: Funkce u_1 řeší rovnici, spojitost derivací

Dále bychom chtěli o $u_1(x,t)$ dokázat, že řeší rovnici vedení tepla s nulovou pravou stranou. Skutečně, použijeme–li větu o derivaci integrálu podle parametru, dostaneme

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial G(x-y,t)}{\partial t} - \Delta G(x-y,t) \right) \varphi(y) dy = 0,$$

neboť Greenova funkce je řešením rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou. Pokud jde o hladkost funkce $u_1(x,t)$, tak opět využijeme větu o derivaci integrálu podle parametru, čímž přeneseme veškeré derivování na Greenovu funkci, která je z $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,+\infty))$. Platí tedy $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_x(Q_T) \cap \mathcal{C}^\infty_t(Q_T)$.

Krok 2c: Spojitost a nabývání okrajových podmínek pro u_2

O funkci $u_1(x,t)$ již víme vše, co jsme potřebovali, a proto se začneme zabývat funkcí $u_2(x,t)$. O spojitosti v Q_T nelze pochybovat, navíc lze dodefinovat $u_2(x,0) \equiv 0$. Tato funkce je evidentně spojitá v $\overline{Q_T}$, neboť

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0+)\\(x,t)\in Q_T}} u_2(x,t) = 0,$$

o čemž se lze přesvědčit z odhadu $|u_2(x,t)| \leq t\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)}$, který jsme odvodili v Kroku 1.

Krok 2d: Funkce u_2 je řeší rovnici, spojitost derivací

Spojitost *prostorových* derivací funkce $u_2(x,t)$ je opět důsledkem věty o derivaci integrálu podle parametru, protože prostorové derivace přesuneme na Greenovu funkci, která má požadovanou nekonečnou hladkost. Je tedy $u_2 \in \mathcal{C}^\infty_x(Q_T)$. S časovými derivacemi je situace složitější. První časovou derivaci spočteme podle definice (bude se to hodit, až budeme dokazovat, že $u_2(x,t)$ řeší rovnici)

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) = \lim_{h\to 0} \frac{u_2(x,t+h) - u_2(x,t)}{h},$$

diferenční podíl rozepíšeme jako součet dvou členů, a sice $\frac{u_2(x,t+h)-u_2(x,t)}{h} = I_1 + I_2$,

$$I_1 = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} \frac{f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau},\tau) - f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)}{h} du d\tau$$

a

$$I_2 = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau},\tau) du \right)}_{\mathcal{F}(\tau)} d\tau.$$

Co lze udělat s prvním členem? V první členu jsme již zvolili zápis, který je připraven k použití Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Označme si $\Phi(\phi) := f(x + 2u\sqrt{(t+\phi)-\tau},\tau)$ funkci Φ na intervalu $\phi \in (0,h)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (je-li $\Phi(\phi)$ spojitá v uzavřeném intervalu $[0,h]$ a má spojitou derivaci v otevřeném intervalu $(0,h)$, pak existuje takové $\phi^* \in (0,h)$, že platí $\frac{\Phi(h)-\Phi(0)}{h} = \frac{d\Phi}{d\phi}(\phi^*)$), pak v našem případě dostaneme existenci $\phi^* \in (0,h)$ takového, že

$$\frac{f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau},\tau)-f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)}{h}$$
$$=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{(t+\phi^*)-\tau},\tau\right)\frac{u_i}{\sqrt{(t+\phi^*)-\tau}}.$$

V prvním členu nyní můžeme limitu pro $h \to 0$ (tudíž také $\phi^* \to 0$) zaměnit s integrálem, a dospějeme k výsledku pro I_1:

$$\lim_{h\to 0} I_1 = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{u_i}{\sqrt{t-\tau}}dud\tau$$

Při výpočtu členu I_2 použijeme první větu o střední hodnotě v integrálním počtu, která tvrdí, že je–li $\mathcal{F}$ spojitá na $[t,t+h]$, pak existuje takové $\tau^* \in (t,t+h)$, že platí

$$\int_t^{t+h}\mathcal{F}(\tau)d\tau = h\mathcal{F}(\tau^*),$$

Zápis I_2 byl opět zvolen tak, že použití věty je zřejmé. Provedeme–li limitu pro $h \to 0$ (tudíž také $\tau^* \to t$), dospějeme k výsledku pro I_2:

$$\lim_{h\to 0} I_2 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau^*},\tau^*)du = f(x,t)\,.$$

Celkem máme

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{u_i}{\sqrt{t-\tau}}dud\tau + f(x,t)\,.$$

Chceme ověřit, že $u_2(x,t)$ řeší rovnici $\frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = f$, nezbyde nám proto nic jiného než spočíst Δu_2 a vyjádřit Δu_2 tak, aby to bylo srovnatelné s právě odvozeným vztahem pro $u_{2,t}$. Jest (opět derivujeme integrál podle parametru):

$$\Delta u_2(x,t) = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2}(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)dud\tau\,.$$

Použijeme následující pozorování:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau) = \frac{\partial}{\partial u_i}f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}$$

s jehož pomocí lze pokračovat

$$\Delta u_2(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\right)\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}dud\tau.$$

Nyní provedeme integraci per partes s derivací podle u_i (hraniční člen vymizí) a výsledkem bude

$$-\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^d \frac{\partial e^{-|u|^2}}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}dud\tau,$$

z čehož po provedení parciální derivace exponenciály plyne

$$\Delta u_2(x,t)=\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^d\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{t-\tau}\right)\frac{u_i}{\sqrt{t-\tau}}dud\tau.$$

Srovnáme-li tento vztah s dříve odvozeným vztahem pro $\partial u_2 - \partial t$, zjistíme, že skutečně platí $\frac{\partial u_2}{\partial t}-\Delta u_2=f$. □

Poznámka 4.1.7 Předpoklady na f lze zeslabit, pouhá spojitost však nestačí (podrobněji viz např. [10]). Hladkost u podle prostorových derivací je bez ohledu na hladkost f vždy nekonečná, hladkost u podle časových derivací je stejná, jako hladkost f podle časových derivací (to plyne přímo z rovnice, když si z ní vypočítáme $\frac{\partial u}{\partial t}$ a máme již dokázáno, že $u\in\mathcal{C}_x^\infty(Q_T)$).

Jednoznačnost řešení Cauchyovy rovnice ve vhodné třídě řešení bude plynout z principu maxima. Ten dokážeme nejprve pro případ počátečně-okrajové úlohy, tedy pro omezenou oblast Ω. V našem rychlokurzu rovnicí vedení tepla zůstane otevřena otázka existence klasického řešení na omezené oblasti. Čtenáře můžeme ujistit, že klasická řešení existují, a odkázat jej na vhodnou literaturu.

Věta 4.1.8 (Slabý princip maxima pro počátečně-okrajovou úlohu) *Buď u klasické řešení úlohy (4.3)–(4.4), ve které klademe $f\equiv 0$. Potom u nabývá svého maxima a minima na parabolické hranici Γ.*

<u>*Důkaz*</u>. Studentské texování.

Označme $M=\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q_T}}u(x,t)$ a $m=\max\limits_{(x,t)\in\Gamma}u(x,t)$, buď (x_M,t_M) bod ve kterém se nabývá hodnoty M. Důkaz provedeme sporem, předpokládáme tedy, že platí $m<M$, neboli $(x_M,t_M)\notin\overline{Q_T}\setminus\Gamma$. Definujeme funkci

$$v(x,t):=u(x,t)+\frac{M-m}{2h^2}\|x-x_M\|^2,$$

kde $h=\operatorname{diam}Q_T$ je průměr (omezené množiny) Q_T. Pro tuto funkci pak platí:

- $v(x_M,t_M)=u(x_M,t_M)=M$
- $\forall(x,t)\in\Gamma:\ v(x,t)\le u(x,t)+\frac{M-m}{2}\le m+\frac{M-m}{2}<M,$

z čehož plyne, že funkce $v(x,t)$ nabývá svého maxima někde v $\overline{Q_T} \setminus \Gamma$, nechť je to v bodě (x_V, t_V). Protože tento bod je maximem hladké funkce $v(x,t)$, musí v tomto bodě být

- $\forall i = 1, \ldots, d: \ \frac{\partial^2 v}{\partial {x_i}^2}(x_V, t_V) \leq 0$
- $\frac{\partial v}{\partial t}(x_V, t_V) = 0$ pokud je $(x_V, t_V) \in Q_T$ resp. $\frac{\partial v}{\partial t}(x_V, t_V) \geq 0$ pokud $(x_V, t_V) \in \partial Q_T \setminus \Gamma$. Skutečně lze mluvit o hodnotách na $\partial Q_T \setminus \Gamma$, neboť $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{Q_T} \setminus \Gamma)$, viz Definice (4.1.2).

Odtud plyne, že

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v\right)(x_V, t_V) \geq 0.$$

Pokud ale počítáme přímo s definicí funkce $v(x,t)$ dostaneme (neboť $u(x,t)$ je řešením rovnice vedení tepla a $\Delta \|x - x_M\|^2 = 2d$)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v\right)(x_V, t_V) = -d\frac{M-m}{h^2} < 0,$$

čímž jsme dospěli ke sporu. □

Důsledek 4.1.9 (Jednoznačnost počátečně-okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla) *Klasická úloha vedení tepla na omezené oblasti (4.3)–(4.4) má nejvýše jedno řešení.*

Důkaz. Pro rozdíl $w = u_1 - u_2$ dvou řešení (4.3)–(4.4) ukážeme pomocí Věty 4.1.8 snadno $w \equiv 0$. □

S využitím Věty 4.1.8 můžeme také ukázat princip maxima pro Cauchyovu úlohu.

Věta 4.1.10 (Slabý princip maxima pro Cauchyovu úlohu) *Buď u klasické řešení úlohy (4.1)–(4.2), ve které klademe $f \equiv 0$. Jsou-li navíc funkce u a φ omezené (na $\overline{Q_T}$ resp. $\mathbb{R}^d$), pak*

$$\inf_{\mathbb{R}^d} \varphi \leq u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^d} \varphi \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d\,,\ t \geq 0\,. \tag{4.8}$$

Důkaz. S využitím Věty 4.1.8. Důkaz zatím chybí, doplnit. □

Důsledek 4.1.11 (Jednoznačnost Cauchyovy úlohy pro RVT) *Klasická Cauchyova úloha vedení tepla na omezené oblasti (4.1)–(4.2) má ve třídě omezených řešení nejvýše jedno řešení. Toto řešení je pak nutně dáno vzorcem (4.6).*

Poznámka 4.1.12 Existují neomezená řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla, která vykazují růst $|u(x,t)| \approx c_1 \exp(c_2 x^{2+\epsilon})$, pro která neplatí princip maxima, a tedy nelze v této třídě řešení také zaručit jednoznačnost. Lze však ukázat, že ve třídě klasických řešení, charakterizovaných růstovou podmínkou $|u(x,t)| \leq c_1 \exp(c_2 x^2)$ již princip maxima, a tedy i jednoznačnost řešení, platí.

4.2 Vlnová rovnice

Definice 4.2.1 (Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici) *Buď $\Omega = \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, φ_0, $\varphi_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Buď $c > 0$. Řekneme, že $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ je klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici, pokud*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\Delta u = f\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0\,, \tag{4.9}$$

$$u(\cdot,0) = \varphi_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = \varphi_1(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{4.11}$$

a přitom $u \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$, u, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$.

Poznámka 4.2.2 V případě vlnové rovnice se budeme zabývat pouze Cauchyovou úlohou a nikoli úlohou na omezené množině Ω. Důvodem je skutečnost, že u hyperbolické rovnice je zadání okrajových podmínek na hranici Ω obtížné z důvodů, které se pokusíme v této poznámce objasnit:

V souladu s druhou kapitolou (viz § **??**) lze nalézt charakteristické směry rovnice (4.9) jako nenulové vektory $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, splňující $\xi_0^2 = c^2 \sum_{j=1}^d \xi_j^2$. Takové vektory existují, existují tedy i charakteristické plochy (charakteristiky) naší rovnice. Například v jedné prostorové dimenzi, a uvažujeme-li pro jednoduchost $c = 1$, prochází každým časoprostorovým bodem $[x_0, t_0]$, $t_0 \geq 0$, dvojice charakteristik, kterými jsou (polo)přímky o směrnicích $+1$ a -1. Informace o hodnotě počáteční podmínky φ_0 se šíří ve směru charakteristik, "šikmo oběma směry". Kdyby byla zadána úloha na omezeném prostorovém intervalu, ležel by každý bod boční strany časoprostorového válce zároveň na nějaké charakteristice, nesoucí informaci o počáteční podmínce. K bokům časoprostorového válce by tak "ve vlnách" (což samozřejmě souvisí s názvem rovnice) přicházely informace o hodnotách řešení na nižších časových hladinách a jiných místech prostoru. Proto by na bocích časoprostorového válce nebylo možno předepsat libovolnou okrajovou podmínku. Bylo by samozřejmě možné uvažovat o tom, jak matematicky podchytit dvě rozdílné fyzikální představy, a sice, že boční stěna přicházející vlnu "pohltí", nebo "odrazí", takové úvahy jdou však nad rámec této přednášky, ve které se tedy budeme zabývat pouze případem celého prostoru.

Rozmyslete si, že v obecném d-rozměrném případě jsou charakteristickými plochami kuželové plochy, a že daným časoprostorovým bodem $[x_0, t_0]$ procházejí (až na případ $t_0 = 0$) dvě takové, jedna "stojící na špičce", kterou je bod $[x_0, t_0]$ — ta je "otevřená směrem nahoru" ve směru časů $t > t_0$. Pokud je $t_0 > 0$, je onou druhou plochou omezená kuželová plocha, jejíž základna leží na časové hladině $t = 0$ a jejímž vrcholem je bod $[x_0, t_0]$.

V následujícím ukážeme, že Cauchyova úloha (4.9)–(4.11) má ve třídě dostatečně hladkých funkcí nejvýše jedno klasické řešení. Pro potřeby následující věty, která k tomuto výsledku bezprostředně vede, si uvědomme, že bez újmy na teoretické obecnosti[3] lze v (4.9) klást $c = 1$. Skutečně, po zavedení nové časové proměnné $t' = ct$ a nové funkce $\widetilde{f} = f/c^2$ přejde (4.9) v rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} - \Delta u = \widetilde{f}$.

Označme nyní pro $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$Z_r(x_0) := \{[x,t]\,;\ 0 < t < r\,,\ |x - x_0| < r - t\}\,. \tag{4.12}$$

Věta 4.2.3 *Nechť $u \in \mathcal{C}^2(\overline{Z_r(x_0)})$ splňuje v $Z_r(x_0)$ rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$. Nechť dále $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ pro $|x - x_0| \le r$. Potom $u \equiv 0$ v $\overline{Z_r(x_0)}$.*

Důkaz. Zatím chybí. □

Důsledek 4.2.4 (Jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici) *Ve třídě $\mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$ má Cauchyova úloha (4.9)–(4.11) nejvýše jedno řešení.*

Důkaz. Jsou-li u_1, u_2 dvě taková řešení, položíme $w := u_1 - u_2$. Buď $[x,t] \in \mathbb{R}^d \times (0,T)$ libovolný bod. Pak existuje kužel $Z_r(x_0)$, jehož vrcholem je bod $[x,t]$. Podle předchozí Věty 4.2.3 $w \equiv 0$ v $\overline{Z_r(x_0)}$, speciálně tedy $w(x,t) = 0$, což jsme chtěli dokázat. □

Na závěr tohoto paragrafu, v jeho "existenční části", si uvedeme explicitní vzorce pro řešení Cauchyovy úlohy v dimenzích 1, 2 a 3, a naznačíme způsob, jakým se dají odvodit. Zájemce o přesnější odvození odkazujeme na [22] nebo [2].

Buď $c > 0$. Analogicky jako pro rovnici vedení tepla, najdeme i v případě vlnové rovnice její tzv. elementární řešení (Greenovu funkci) $E(x,t)$, splňující ve smyslu distribucí Cauchyovu úlohu (4.9)–(4.11), ve které klademe $f = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \delta$. Metodou Fourierovy transformace lze ukázat, že (až na konstanty, které souvisejí s konkrétní volbou konstant u transformace) pro Fourierovu transformaci $\widehat{E}(\xi,t)$ funkce $E(x,t)$ platí (transformace probíhá mezi proměnnými $x \mapsto \xi$):

$$\widehat{E}(\xi,t) = \frac{\sin(2\pi c|\xi|t)}{2\pi c|\xi|}\,.$$

Ukazuje se, že nalezení zpětné Fourierovy transformace této funkce je technický, ale proveditelný problém, jehož realizace je závislá na dimenzi prostoru. Po nalezení $E(x,t)$ pak lze ukázat, že řešení problému (4.9)–(4.11) je dáno formální konvolucí (obecně počítanou ve smyslu distribucí, index pod znamením konvoluce naznačuje, přes jaké proměnné konvoluci počítáme)

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(E \underset{x}{*} \varphi_0\Big) + (E \underset{x}{*} \varphi_1) + \Big(Y(t)\, E \underset{x,t}{*} f\Big) =: u_0 + u_1 + u_2\,, \tag{4.13}$$

[3] Později nás budou zajímat explicitní vzorce pro řešení, kde již, pro pohodlí jejich uživatelů, budeme uvažovat obecné $c > 0$.

srovnejte se vzorcem (4.6). Zde $Y(t)$ označuje Heavisideovu funkci v proměnné t, $Y(t) = 1$ pro $t \geq 0$, $Y(t) = 0$ pro $t < 0$.

Po dalších technických výpočtech lze odvodit explicitní tvar řešení $u(x,t)$ v závislosti na konkrétní dimenzi. Výsledky těchto výpočtů jsme shrnuli do Tabulky 4.1 — viz str. 45. Předpokládáme v ní, že funkce f, φ_0, φ_1 jsou spojité a takové, že uvedené integrály konvergují. Řešení u získáme vždy součtem jednotlivých jeho částí u_0, u_1, u_2, které odpovídají datům f, φ_0, φ_1. Obecné řešení úlohy (4.9)–(4.11) v jedné prostorové dimenzi je tedy například dáno známým d'Alembertovým vzorcem:

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0(x-ct)+\varphi_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau\,. \tag{4.14}$$

Pro $f \equiv 0$ lze tento vzorec snadno odvodit i elementárně: v jedné dimenzi řešíme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{4.15}$$

Zavedením nových souřadnic

$$\eta = \frac{x+ct}{2}\,, \qquad \xi = \frac{x-ct}{2}$$

přejde rovnice (4.15) v rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0\,,$$

jejíž obecné řešení je $u(\eta,\xi) = F(\xi) + G(\eta)$, kde F a G jsou libovolné dostatečně hladké funkce. V původních proměnných tedy dostáváme, že rovnici (4.15) vyhovuje každá funkce tvaru

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)\,,$$

kde F a G jsou libovolné dostatečně hladké funkce. S využitím počátečních podmínek odtud dostaneme (4.14) s $f = 0$. Čtenář se jistě nebude zlobit, když jej autor nechá tento oblíbený výpočet dokončit.

V následující tabulce uvádíme pro přehlednost řešení vlnové rovnice v různých dimenzích pro různé varianty zadání dat.

Tabulka 4.1: Řešení vlnové rovnice v různých dimenzích pro různá data.

Dimenze	Zadaná data	Řešení odpovídající datům
$d=1$:	φ_0	$u_0(x,t)=\dfrac{\varphi_0(x-ct)+\varphi_0(x+ct)}{2}$
	φ_1	$u_1(x,t)=\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}\varphi_1(y)\,dy$
	f	$u_2(x,t)=\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy\,d\tau$
$d=2$:	φ_0	$u_0(x,t)=\dfrac{1}{2\pi c}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\lvert y\rvert\le ct}\dfrac{\varphi_0(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-y^2}}\,dy$
	φ_1	$u_1(x,t)=\dfrac{1}{2\pi c}\displaystyle\int_{\lvert y\rvert\le ct}\dfrac{\varphi_1(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-y^2}}\,dy$
	f	$u_2(x,t)=\dfrac{1}{2\pi c}\displaystyle\int_0^t\int_{\lvert y\rvert\le c\tau}\dfrac{f(x-y,t-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2-y^2}}\,dy\,d\tau$
$d=3$:	φ_0	$u_0(x,t)=\dfrac{1}{4\pi ct}\displaystyle\int_{S_{ct}(0)}\left(\dfrac{\varphi_0}{ct}+\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right)(x-y)\,dS_y$
	φ_1	$u_1(x,t)=\dfrac{1}{4\pi c^2t}\displaystyle\int_{S_{ct}(0)}\varphi_1(x-y)\,dS_y$
	f	$u_2(x,t)=\dfrac{1}{4\pi c^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\dfrac{f\left(x-y,t-\frac{\lvert y\rvert}{c}\right)}{\lvert y\rvert}\,dy$