Kapitola 6

Teorie parciálních diferenciálních rovnic

6.1 Eliptické parcální diferenciální rovnice 2. řádu

6.1.1 Existence slabého řešení, jednoznačnost a spojitá závislost na datech pro jednu třídu eliptických operátorů

Lawrence C. Evans: ”Neexistuje žádná obecná teorie zaměřená na řešitelnost všech PDR. Vzhledem k obrovské různorodosti jevů (geometrických, fyzikálních, stochastických), které jsou modelovány PDR–emi, takováto teorie těžko bude nalezena. Místo toho je výzkum zaměřen spíše na různé speciální typy PDR, které jsou důležité z pohledu aplikací, s nadějí, že náhled na původ těchto rovnic může dát cit pro jejich řešení.”

”V moderní teorii PDR je velké úsilí věnováno matematickým důkazům existence řešení různých PDR, a nikoliv odvozování vzorečků pro tato řešení. To se může zdát zbytečné až bláznivé, leč matematici jsou jako teologové: považujeme existenci za základní vlastnost toho co studujeme. Avšak nemusíme, jako většina teologů, spoléhat vždy jen na víru samotnou.”

První třída eliptických úloh 2. řádu bude vedena dvěma směry
(a) Vlastní operátor nebude zcela obecný, spíše uvažujeme jen příznivé členy.
(b) Soustředíme se na různé typy okrajových podmínek.

(OBLAST) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($\Omega \in C^{0,1}$ tj. Ω je omezená, otevřená s lipschitzovskou hranicí). Nechť hranice $\partial\Omega$ je složena ze čtyř částí

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup N$$

kde Γ_i je otevřená v $\partial\Omega$ pro $i = 1, 2, 3$ a $(d-1)$–rozměrná Lebesgueova míra množiny N je nulová.

Buď dány funkce: (DATA)

$$\begin{array}{lll} f : \Omega \to \mathbb{R} & g : \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \to \mathbb{R} & \mathbb{A} := (a_{ij})_{i,j=1}^{d} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d} \\ b : \Omega \to \mathbb{R} & u_0 : \Gamma_1 \to \mathbb{R} & \\ & \sigma : \Gamma_3 \to \mathbb{R} & \end{array}$$

Cílem je vyřešit úlohu: hledáme $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tak, že

$$-\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u\ ) + bu = f \text{ v } \Omega \tag{6.1}$$

$$\left(\text{podrobněji} \qquad -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) + b(x)u(x) = f(x)\right)$$

$$\begin{array}{lr} \text{(Dirichlet)} & u = u_0 \text{ na } \Gamma_1 \\ \text{(Neumann)} & \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{na } \Gamma_2 \\ \text{(Newton)} & \dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g \quad \text{na } \Gamma_3 \end{array}$$

$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$, kde $n = (n_1, \ldots, n_d) = n(x)$ je takzvaná *konormála* definovaná vztahem $n_i \equiv a_{ij}\nu_j$, kde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) = \nu(x)$ je *vnější normála* k $\partial\Omega$ v bodě $x \in \partial\Omega$

Příklad 6.1.1 *Je–li $\mathbb{A}(x) = I$ ($\Leftrightarrow a_{ij}(x) = \delta_{ij}\ \forall x \in \Omega$) a $b \equiv 0$, pak úloha (6.1) přejde ve tvar:*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \ v\ \Omega \\ u &= u_0 \ v\ \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \ v\ \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u &= g \ v\ \Gamma_3 \end{aligned} \tag{6.1'}$$

Tato úloha popisuje například rovnovážné rozdělení teploty v homogenním a izotropním materiálu za podmínek, kdy na Γ_1 je daná teplota u_0, na Γ_2 je předepsán tok tepla hranicí a na Γ_3 je tento tok úměrný rozdílu vnější (dané) a vnitřní (neznámé) teploty. Obecněji: pro $u=$ teplota se získá z energetické rovnice v termodynamickém ekvilibriu: $-\operatorname{div} q = r$, kde r je zdroj tepla a q je tok tepla daný zobecněným Fourierovým zákonem $q_i(x) = k_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}$.

Předpoklady:

(A1) Existuje $C_1 > 0$ tak, že pro s.v. $x \in \Omega$ a pro každé $\xi \in \mathbb{R}^d$ platí

$$\xi^T \cdot \mathbb{A}\xi = (\mathbb{A}\xi, \xi) = a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C_1|\xi|^2$$

(A2) $a_{ij}, b \in L^\infty(\Omega), \sigma \in L^\infty(\Gamma_3)$

(A3) $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma_2 \cup \Gamma_3)$

(A3*) $f \in V^\star$ a $g \in (W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2 \cup \Gamma_3))^\star$

(A4) $b, \sigma \geq 0$

(A5) existuje $\tilde{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že $T\tilde{u}_0|_{\Gamma_1} = u_0$

Pozorování 6.1.2 *Všimněme si, že vektor konormály $n(x) = (n_1, \dots, n_d)$ směřuje v každém bodě $x \in \partial\Omega$ ven z oblasti: $n(x) \cdot \nu = a_{ij}(x)\nu_j\nu_i \geq C_1|\nu|^2 = C_1 > 0$.*

Věta 6.1.3 (Lax–Milgramova) *Buď X reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)_X$ a norma $|\cdot|_X = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Buď $B : X \times X \to \mathbb{R}$ bilineární forma na X, která je*
(a) X–eliptická (tzn. $\exists m > 0$ tak, že $\forall u \in X : B(u,u) \geq m\|u\|_X^2$)
(b) omezená (tzn. $\exists M > 0$ tak, že $\forall u, v \in X : |B(u,v)| \leq M\|u\|_X\|v\|_X$
Pak pro každé $F \in X^\star$ existuje právě jedno $u \in X$ tak, že

$$B(u,v) = \langle F, v\rangle \quad \textit{pro } \forall v \in X \tag{6.2}$$

a

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{m}\|F\|_{X^\star}. \tag{6.3}$$

__Důkaz__. (a) Nechť navíc B je symetrická (což je častý případ v aplikacích) ($B(u,v) = B(v,u)$ $\forall u, v \in X$). Pak $B(u,v)$ je skalární součin na X (a díky podmínkám (a) a (b) generuje normu ekvivalentní původní normě na X). Existenci a jednoznačnost řešení úlohy (6.2) pak dostaneme přímo z Rieszovy věty o reprezentaci. Dosadíme–li do (6.2) za $v = u$, pak

$$m\|u\|_X^2 \leq B(u,u) = \langle F, u\rangle \leq \|F\|_X\|u\|_X$$

implikuje (6.3) a důkaz je hotov.
(b) B není symetrická. Pro $u \in X$ pevné $B(u,\cdot) \in X^\star$. Dle Rieszovy věty existuje tedy prvek, označme jej $Au \in X$, tak, že

$$B(u,v) = (Au, v)_X \quad \forall v \in X$$

Z vlastností B plyne:

(i) A je lineární, neboť B je bilineární

(ii) A je prostý, což plyne z

$$m\|u\|_X^2 \leq B(u,u) = (Au,u)_X \leq \|Au\|_X\|u\|_X \Rightarrow \|u\|_X \leq \frac{1}{m}\|Au\|_X$$

(iii) A je omezený, neboť

$$\|Au\|_X = \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|\leq 1}} |(Au,v)| \leq \sup|B(u,v)| \leq M\|u\|_X\,\|v\|_X \leq M\|u\|_X$$

$$\Rightarrow \|Au\|_X \leq M\|u\|_X$$

Tedy $A : X \to X$ je lineární, omezený a prostý operátor. Ukážeme, že A je zobrazení na. Kdyby $A(X) \subsetneqq X$, pak existuje $v \in X \setminus A(X)$, který lze zvolit tak, že $\|v\|_X = 1$, $v \perp A(X)$. Pak ale $0 = (v, Av) = B(v,v) \geq m\|v\|_X^2 = m$, což je spor.
Protože $F \in X^\star$, existuje $w \in X$ tak, že $\langle F, v\rangle = (w,v)_X$ $\forall v \in X$. K w tedy existuje $u \in X$ tak, že

$$B(u,v) = (Au,v) = (w,v) = \langle F, v\rangle_{X^\star,X}\ \forall v \in X.$$

□

Odvození slabé formulace
Definuj $\mathcal{V} \equiv \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}); \varphi|_{\Gamma_1} = 0\}$ jako prostor testovacích funkcí.

Mysleme si, že u je řešením (klasickým) úlohy (6.1). Násobme základní rovnici z (6.1) libovolným prvkem $\varphi \in \mathcal{V}$ a integrujme přes Ω. Dostaneme

$$\int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} = \int_\Omega bu\varphi\,\mathrm{dx} - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\,\mathrm{dx} =$$
$$= \int_\Omega bu\varphi\,\mathrm{dx} + \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{dx} - \int_{\partial\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j\varphi\,\mathrm{ds}.$$

Protože $a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j = \frac{\partial u}{\partial n}$ a $\varphi = 0$ na Γ_1, dostáváme z hraničních podmínek

$$\int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} = \int_\Omega \left(bu\varphi + a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\mathrm{dx} - \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} g\varphi\,\mathrm{ds} + \int_{\Gamma_3}\sigma u\varphi\,\mathrm{ds}. \tag{6.4}$$

Označíme-li

$$B(u,\varphi) \equiv \int_\Omega \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + bu\varphi\right)\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_3}\sigma u\varphi\,\mathrm{ds}, \tag{6.5}$$

přejde rovnost (6.4) na tvar:

$$B(u,\varphi) = \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} g\varphi\,\mathrm{ds}.$$

Nyní do této rovnice dosadíme za u ze vztahu

$$v \equiv u - \tilde{u}_0, \tag{6.6}$$

kde $\tilde{u}_0$ je definováno v (A5) a zavedeme ještě

$$\langle F, \varphi \rangle \equiv \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{dx} + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} g\varphi \, \mathrm{ds} - B(\tilde{u}_0, \varphi). \tag{6.7}$$

Snadno nahlédneme, že v je řešením úlohy

$$\begin{aligned} v|_{\Gamma_1} &= 0 \\ B(v, \varphi) &= \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

Pozorování 6.1.4 *Všimněme si, že platí*

$$B(u,u) = \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_\Omega bu^2 + \int_{\Gamma_3} \sigma u^2 \geq C_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = C_1 \|\nabla u\|_2^2$$

To nám naznačuje, ve kterém prostoru bychom měli $\mathcal{V}$ uzavřít. Definujeme proto

$$V \equiv \ \textit{uzávěr } \mathcal{V} \textit{ ve } W^{1,2}\textit{–normě.}$$

Definice 6.1.5 *(Slabého řešení úlohy (6.1)) Řekneme, že u je slabým řešením (6.1), pokud*

$$\begin{aligned} &u - \tilde{u}_0 \in V \\ &B(u, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} g\varphi \, ds \ \ \textit{je splněno pro } \forall \varphi \in V \\ &v \in V \\ &B(v, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V \quad \textit{kde } v := u - \tilde{u}_0 \end{aligned}$$

Abychom mohli aplikovat Lax–Milgramovu větu, potřebujeme ukázat, že

[1]	V	je Hilbertův
[2]	$B(\cdot,\cdot)$	je bilineární forma na V
[3]	$B(\cdot,\cdot)$	je V–eliptická
[4]	$B(\cdot,\cdot)$	je omezená
[5]	$F \in V^\star$	spojitý lineární funkcionál na V

ad [1] V je Hilbertův

V je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $W^{1,2}(\Omega)$. Tedy V je také Hilbertův.

ad [2] $B(\cdot,\cdot)$ je bilineární forma na V

Elementární, plyne z linearity integrálu.

ad [3] $B(\cdot,\cdot)$ je V–eliptická

Lemma 6.1.6 *Nechť platí (A1) — (A4). Pak $B(\cdot,\cdot)$ je V–eliptická, pokud je splněna alespoň jedna z následujících čtyř podmínek*

$$(A6)\quad \begin{cases} (\alpha) & \text{míra } \Gamma_1 > 0, \\ (\beta) & b > 0 \text{ na podmnožině množiny } \Omega \text{ kladné } d\text{–míry} \\ (\gamma) & \sigma > 0 \text{ na podmnožině množiny } \Gamma_3 \text{ kladné } (d-1)\text{–míry} \end{cases}$$

$$(A7)\qquad (\delta)\qquad \fint_\Omega u\,dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx = 0.$$

__*Důkaz*__. Tvrzení: $\exists C > 0$ tak, že $B(v,v) \geq C\,\|v\|_{1,2}^2\ \ \forall v \in V$
Sporem: Nechť tvrzení neplatí. Pak $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ v^n \in V$ tak, že $\|v^n\|_{1,2}^2 > nB(v^n,v^n)$. Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit $\|v^n\|_{1,2} = 1$. Prostor $W^{1,2}$ je Hilbertův a tedy reflexivní a posloupnost v^n je omezená. Z funkcionální analýzy víme, že v reflexivním prostoru lze z každé omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost. Existuje tedy $v \in V$ tak, že pro jistou vybranou posloupnost platí

$$v^{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{ve } V, \quad \text{tj. ve } W^{1,2}.$$

Z věty o kompaktním vnoření (po případném přechodu na další posloupnost) plyne

$$v^{n_k} \to v \quad \text{v } L^2.$$

Z pozorování 6.1.4 víme, že

$$C_1\,\|\nabla v^{n_k}\|_2^2 \leq B(v^{n_k},v^{n_k}) < 1/n_k$$

a limitním přechodem v nerovnosti pro $k \to \infty$ dostáváme (za použití slabé zdola polospojitosti normy) rovnost

$$\|\nabla v\|_2 = \lim_{k\to\infty}\|\nabla v^{n_k}\|_2 = 0,$$

z čehož vyplývá

$$\nabla v^{n_k} \to \nabla v = 0 \quad \text{v } L^2.$$

Zjistili jsme tedy, že $v^{n_k} \to v$ ve $W^{1,2}$ a že $v \equiv$ const. Dále

$$1 = \lim_{k\to\infty}\|v^{n_k}\|_{1,2} = \|v\|_{1,2}\,.$$

Funkce v je konstantní $v = C$ a má jednotkovou normu. Ale:

(α) je–li míra $\Gamma_1 > 0$, pak musí být $C = 0$. Jedině při této volbě má v nulovou stopu na Γ_1 a tedy leží ve V. Jenže $\|0\|_{1,2} = 0$. (spor)

$(\beta),(\gamma)$ $B(v,v)=\lim B(v^{n_k},v^{n_k})=0$. Z definice ovšem plyne (při $\nabla v=0$)

$$B(v,v)=\int_\Omega b|v|^2+\int_{\Gamma_3}\sigma|v|^2=|C|^2\left(\int_\Omega b+\int_{\Gamma_3}\sigma\right)$$

Výraz v závorce je kladný, tudíž $B(v,v)=0$ jedině při $C=0$ (spor).

(δ) $\oint_\Omega v=0$, tedy nutně $C=0$ (spor).

□

ad [4] $B(\cdot,\cdot)$ je omezená

Lemma 6.1.7 *Nechť (A2) platí. Pak* $\exists M>0 |B(u,\varphi)|\le M\left\|u\right\|_{1,2}\left\|v\right\|_{1,2}$.

<u>Důkaz</u>. Cvičení č. 9. (užij Hölderovu nerovnost, (A2), ale i větu o stopách). □

ad [5] $F\in V^\star$ spojitý lineární funkcionál na V

Lemma 6.1.8 *Nechť (A2), (A3), (nebo (A3*)) a (A5) platí. Pak* $F\in V^\star$ *a* $\exists C_F>0$ *tak, že*

$$\left\|F\right\|_{V^\star}\le C_F\left[\left\|f\right\|_2+\left\|g\right\|_{L^2(\Gamma_2\cup\Gamma_3)}+\left\|\tilde u_0\right\|_{1,2}\right] \tag{6.8}$$

$$\left(\textit{nebo } C_F\left[\left\|f\right\|_{V^\star}+\left\|g\right\|_{(W^{\frac12,2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3))^\star}+\left\|\tilde u_0\right\|_{1,2}\right]\right)$$

<u>Důkaz</u>. Cvičení č. 10. □

Věta 6.1.9 *Buď* $\Omega\in C^{0,1}$. *Nechť* (A1) — (A5) *platí. Nechť dále jedna z podmínek* (A6) *je splněna. Pak existuje právě jedno slabé řešení u úlohy (6.1), které splňuje*

$$\left\|u\right\|_{1,2}\le C\left[\left\|f\right\|_{2,\Omega}+\left\|g\right\|_{2,\Gamma_2\cup\Gamma_3}+\left\|\tilde u_0\right\|_{1,2}\right] \tag{6.9}$$

<u>Důkaz</u>. Polož $v=u-\tilde u_0\in V$. Dle Lax–Milgramova lemmatu $\exists! v\in V$ jakožto řešení úlohy $B(v,\varphi)=\langle F,\varphi\rangle$ a navíc $\left\|v\right\|_V\le\frac{M}{m}\left\|F\right\|_{V^\star}$. Odsud

$$\left\|u\right\|_{1,2}=\left\|u-\tilde u_0+\tilde u_0\right\|_{1,2}\le\left\|v\right\|_{1,2}+\left\|\tilde u_0\right\|_{1,2}\le$$
$$\le C\left[\left\|f\right\|_{2,\Omega}+\left\|g\right\|_{2,\Gamma_2\cup\Gamma_3}+\left\|\tilde u_0\right\|_{1,2}\right]$$

Samozřejmě jsme využili lemmat 6.1.6, 6.1.7 a 6.1.8. □

Důsledek 6.1.10 *Protože úloha je lineární, tak zobrazení* $\mathcal F:[f,g,\tilde u_0]\longmapsto u$ *jakožto zobrazení z* $L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_2\cup\Gamma_3)\times W^{1,2}(\Omega)$ *do* V *je omezené a spojité.*

Není–li splněna ani jedna z podmínek (A6) pak řešíme Neumannovu úlohu

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) &= f \quad \text{v } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.10}$$

Slabým řešením této úlohy nazveme $u \in W^{1,2}(\Omega)$ splňující

$$\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\mathrm{dx} = \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g\varphi\,\mathrm{ds} \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \tag{6.11}$$

Příklad 6.1.11 *Jednodimenzionální prototyp našich úloh jsou rovnice*

- $u'' = 0$ *na* (a, b)
- $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$ *Dirichlet*
- $u'(a) = \alpha$ *a* $u(b) = \beta$ *smíšená úloha*
- $u'(a) = \alpha$ *a* $u'(b) = \beta$ *Neumann*

Obecné řešení má tvar $AX + b$.

Lemma 6.1.12 *Nutná podmínka existence slabého řešení Neumannovy úlohy:*

$$\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,ds = 0 \tag{A8}$$

<u>*Důkaz*</u>. Vezmi $\varphi \equiv 1$ v (6.11). □

Věta 6.1.13 *Nechť platí* (A1) — (A3), $\Omega \in C^{0,1}$. *Nechť navíc* f, g *splňují* (A8). *Pak existuje právě jedno slabé řešení* $u \in W := \{v \in W^{1,2}(\Omega); \oint_\Omega v = 0\}$ *Neumannovy úlohy. Platí pro něj*

$$\|u\|_{1,2} \le C\left[\|f\|_{2,\Omega} + \|g\|_{2,\partial\Omega}\right] \tag{6.12}$$

Ostatní řešení jsou ve tvaru

$$u + \ \textit{konstanta}$$

<u>*Důkaz*</u>. $B(u, v)$ je dána vztahem $\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{dx}$. Tato forma je bilineární, omezená a dle lemmatu 6.1.8 (podmínka (A7)) také W–eliptická. Funkcionál F definovaný vztahem $\langle F, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g\varphi\,\mathrm{ds}$ je spojitý, lineární funkcionál na $W^{1,2}(\Omega)$, tedy $F \in W^\star$ (i $F \in (W^{1,2}(\Omega))^\star$). Dle Lax–Milgramovy věty dostáváme tvrzení i odhad (6.12). Je jasné, že $u +$ const. je také slabé řešení. Opačně, jsou-li u a v dvě slabá řešení (6.10), pak $B(u - v, \varphi) = 0\ \forall\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Volbou $\varphi = u - v$ dostaneme $\|\nabla(u - v)\|_2 = 0$. Tedy $\nabla(u - v) = 0$ skoro všude. Odsud $u = v +$ const. □

6.1.2 Existence slabého řešení pro úlohy s obecnými lineárními eliptickými operátory – Fredholmova alternativa

Uvažujme nyní obecnější formu na $W_0^{1,2}(\Omega)$ než $B(u,\varphi)$, a to:

$$a(u,\varphi) \stackrel{df.}{\equiv} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} + \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\,\mathrm{dx} + \int_\Omega c_i u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega bu\varphi\,\mathrm{dx} \tag{6.13}$$

To odpovídá operátoru

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(c_i u) + bu$$

s okrajovou podmínkou $u = 0$ nebo $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ na $\partial\Omega$ ale i operátoru

$$L^\star \varphi \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\varphi) + c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + b\varphi$$

s okrajovou podmínkou $\varphi = 0$ nebo $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ na $\partial\Omega$.
Opět předpokládáme podmínku elipticity (A1). Dále

$$a_{ij}, b_i, c_i, b \in L^\infty(\Omega) \quad \text{(žádný předpoklad na znaménko } b\text{!!)} \tag{A}$$

Platí

Lemma 6.1.14 *Existují $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$, a $\gamma > 0$ tak, že pro $\forall u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ platí*

$$|a(u,\varphi)| \le \tilde{C}_1 \|u\|_{1,2} \|\varphi\|_{1,2} \tag{6.14}$$

$$\tilde{C}_2 \|u\|_{1,2}^2 \le a(u,u) + \gamma \|u\|_2^2 \tag{6.15}$$

Důkaz. (6.14) zřejmý (ověřte si)
(6.15)

$$\begin{aligned}
\alpha \|\nabla u\|_2^2 \le \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} = \\
= a(u,u) - \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u\,\mathrm{dx} + \int_\Omega c_i u \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} + \int_\Omega bu^2\,\mathrm{dx} \le \\
\le a(u,u) + \left(\max_{i=1,\dots,d} \|b_i\|_\infty + \max_{i=1,\dots,d} \|c_i\|_\infty\right) \|u\|_2 \|\nabla u\|_2 + \|b\|_\infty \|u\|_2^2 \le \\
\le a(u,u) + \frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \left[\frac{1}{2\alpha}\left(\max_{i=1,\dots,d}\|b_i\|_\infty + \max_{i=1,\dots,d}\|c_i\|_\infty\right)^2 + \|b\|_\infty\right] \|u\|_2^2
\end{aligned}$$

kde jsme využili nerovnost $2ab \le a^2 + b^2$. Přičteme-li ke vzniklé nerovnosti $\frac{\alpha}{2}(\|u\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2)$, dostáváme požadovanou nerovnost. $\square$

Věta 6.1.15 (1. existenční) *Existuje $\gamma \geq 0$ tak, že pro každé*

$$\nu \geq \gamma$$

a pro $\forall f \in L^2(\Omega)$ (mohlo by být $(W_0^{1,2}(\Omega)^\star)$ $\exists!$ slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ úlohy

$$\begin{aligned} Lu + \nu u &= f \quad v\,\Omega \\ u &= 0 \ na\ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.16}$$

<u>*Důkaz*</u>. Vezmi γ z (6.14) v Lemmatu 6.1.14. Pak $a_\nu(u,\varphi) = a(u,\varphi) + \nu(u,\varphi)$ splňuje předpoklady Lax–Milgramovy věty, což dává tvrzení. □

Bez důkazu uvádíme následující důležitou větu z funkcionální analýzy:

Věta 6.1.16 (Fredholmova alternativa) *Buď H Hilbertův, a $K : H \to H$ lineární, kompaktní, omezený. Pak*

$$\begin{array}{ll} (i) & N(I-K) \quad \textit{je konečnědimenzionální} \\ (ii) & \mathbb{R}(I-K) \quad \textit{je uzavřený} \\ (iii) & \mathbb{R}(I-K) = N(I-K^\star)^\perp \\ (iv) & N(I-K) = \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{R}(I-K) = H \\ (v) & \dim N(I-K) = \dim N(I-K^\star) \end{array}$$

Fredholmova alternativa: Buď $Kh - h = f$ v H má řešení pro každé $f \in H$ nebo $\exists$ netriviální řešení $Kh = h$.

Věta 6.1.17 (2. existenční) (i) *Buď $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists!$ (slabé) řešení*

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad v\,\Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.17}$$

nebo existuje netriviální (slabé) řešení úlohy

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad v\,\Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.18}$$

(ii) *Existuje-li netriviální (slabé) řešení úlohy (6.18), označíme $N \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ množinu jejích řešení a dále $N^\star \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ množinu řešení adjungované úlohy*

$$\begin{aligned} L^\star v &= 0 \quad v\,\Omega \\ v &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.19}$$

Platí: dimenze N je konečná a rovná se dimenzi $N^\star$.
(iii) *Pro dané $f \in L^2(\Omega)$ má úloha (6.17) řešení $\Leftrightarrow (f,v)_2 = 0\ \forall v \in N^\star$.*

Důkaz. (i) Volme γ jako v Lemmatu 6.1.14. Definujme

$$a_\gamma(u,\varphi) \equiv a(u,\varphi) + \gamma(u,\varphi)$$

odpovídající operátoru

$$L_\gamma u = Lu + \gamma u.$$

Dle věty 6.1.15. $\Rightarrow \forall g \in L^2(\Omega)$ $\exists!$ slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ splňující

$$a_\gamma(u,\varphi) = (g,\varphi)_2 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{6.20}$$

Označme $u = L_\gamma^{-1} g$, platí-li mezi u a g vztah (6.20).
(ii) Platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} & u \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \text{řeší (6.17)} \\ \Leftrightarrow \quad & a_\gamma(u,\varphi) = (\gamma u + f,\varphi) \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \Leftrightarrow \quad & u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f) \\ \Leftrightarrow \quad & u - Ku = h, \quad \text{kde } Ku \equiv \gamma L_\gamma^{-1} u \text{ a } h \equiv L_\gamma^{-1} f \end{aligned}$$

(iii) Tvrdíme: $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je omezený, lineární, kompaktní (K je γ–násobek L_γ^{-1}, a L_γ^{-1} řeší (6.20)). Víme:

$$\frac{\alpha}{2} \|u\|_{1,2}^2 \le a_\gamma(u,u) = (g,u) \le \|g\|_2 \|u\|_2 \le c \|g\|_2 \|\nabla u\|_2 ,$$

což dává

$$\|u\|_{1,2} \le \tilde{c} \|g\|_2 ,$$

tedy $L_\gamma^{-1} : L^2 \to W_0^{1,2}(\Omega)$, což je prostor, který je kompaktně vnořen do $L^2 \Rightarrow K$ je omezený, kompaktní.
(iv) Aplikuj obecné výsledky z FA. Mimo jiné víme:

$$u - Ku = h \quad \text{má řešení } \Leftrightarrow (h,v)_2 = 0 \ \forall \text{ řešení } v \text{ úlohy } K^\star v = v.$$

Počítejme

$$(h,v)_2 = \left(L_\gamma^{-1} f, c\right) = \frac{1}{\gamma}(Kf,v) = \frac{1}{\gamma}(f,K^\star v) = \frac{1}{\gamma}(f,v),$$

což dává (iii). □

Věta 6.1.18 (3. existenční věta) (i) *Existuje nejvýše spočetná množina $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tak, že je ekvivalentní*

$$\lambda \notin \Sigma \Leftrightarrow \forall f \in L^2(\Omega) \ \exists! u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

řešící

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u + f \quad v\ \Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.21}$$

(ii) *Je–li Σ nekonečná, pak se Σ skládá z $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ s $\lambda_k \to \infty$.*

Definice 6.1.19 *Σ se nazývá (reálné) spektrum operátoru L. Poznamenejme: speciálně úloha*

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u \quad v\ \Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

má netriviální řešení $w \not\equiv 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma$. Pak λ je vlastní číslo L a w odpovídající vlastní vektor.

<u>*Důkaz*</u>. (i) Volme γ jako v Lemmatu 6.1.14. Dle věty 6.1.15 lze předpokládat $\lambda > -\gamma$ (jinak víme, že (6.21) má jednoznačné řešení). Lze též předpokládat, že $\gamma > 0$.
(ii) Dle Fredholmovy alternativy máme následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} u \text{ řeší (6.21)} &\Leftrightarrow \exists \text{ jen triviální slabé řešení} \\ &\quad \begin{cases} Lu &= \lambda u \text{ v } \Omega \\ u &= 0 \text{ v } \partial\Omega \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \text{ jen triviální slabé řešení} \\ &\quad \begin{cases} L\gamma &= (\lambda+\gamma) u \text{ v } \Omega \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \text{ úloha } u = L_\gamma^{-1}((\lambda+\gamma)u) = \frac{\gamma+\lambda}{\gamma} Ku \text{ má jen nulové řešení} \\ &\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\gamma+\lambda} \text{ není vlastním číslem operátoru } K \end{aligned}$$

(iii) Nyní FA $\Rightarrow K$ má nejvýš spočetně mnoho vlastních čísel hromadících se k $\{0\}$, avšak $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda_k} \to 0 \Leftrightarrow \lambda_K \to \infty$ □

Věta 6.1.20 (omezenost inverze) *Jestliže $\lambda \notin \Sigma$, pak existuje C tak, že*

$$\|u\|_2 \le C \|f\|_2 \tag{6.22}$$

kdykoliv $f \in L^2(\Omega)$ a u je jediné slabé řešení úlohy (6.21).

<u>*Důkaz*</u>. Sporem: Pokud (6.22) neplatí, pak

$$\exists f_k \in L^2(\Omega) \text{ a } u_k \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ tak, že } \begin{cases} Lu_k &= \lambda u_k + f_k \text{ v } \Omega \\ u &= 0 \text{v} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

a

$$\left.\begin{aligned} \|u_k\|_2 > k \|f_k\|_2 \\ \|u_k\|_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad f_k \to 0 \text{ silně v } L^2(\Omega)$$

$$\left.\begin{aligned} \{u_k\} \text{ omezená ve } W_0^{1,2}(\Omega) \\ \text{(z apriorních odhadů)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad \text{ve } W^{1,2} \\ u_k &\to u \quad \text{silně v } L^2 \end{aligned}$$

Pak u řeší

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u \quad \text{v } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Protože $\lambda \notin \Sigma \Rightarrow u \equiv 0$ ale $\|u\|_2 = 1$. □

6.1.3 Regularita slabého řešení

Uvědomme si nejdříve, že věta o existenci jediného slabého řešení úlohy

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu &= f \qquad \text{v } \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \\ u &= u_0 \qquad \text{na } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u &= g \qquad \text{na } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ a_{ij}, b \in L^\infty(\Omega), \sigma &\in L^\infty(\Gamma_3) \\ b \geq 0 \text{ v } \Omega, \sigma \geq 0 \text{ na } \Gamma_3, &\sigma = 0 \text{ na } \Gamma_2 \\ \exists \alpha > 0 : a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad &\forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \tag{6.23}$$

platí za slabších předpokladů na data z úlohy, tj. na u_0, f, g.
Připomeň:

$$\begin{aligned} V &\equiv \text{ uzávěr } \{\varphi \in C^1(\bar{\Omega}); \varphi = 0 \text{ na } \Gamma_1\} \text{ ve } W^{1,2}(\Omega), \\ W &\equiv \left\{\varphi \in W^{1,2}(\Omega); \fint_\Omega \varphi \,\mathrm{dx} = 0\right\}. \end{aligned}$$

Uvaž podmínky:

(i) $\Gamma_1 \ldots$ neprázdná množina

(ii) $b > 0$ na $H \subset \Omega, |H|_d > 0$

(iii) $\sigma > 0$ na $\Gamma_H \subset \Gamma_3, |\Gamma_H|_{d-1} > 0$.

Zobecněním věty 6.1.9 je následující věta

Věta 6.1.21 (α) *Nechť*

$$g \in \left(W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2 \cup \Gamma_3)\right)^\star, f \in V^\star, u_0 \in W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_1).$$

a nechť jedna z podmínek (i) — (iii) *platí. Pak* $\exists! u \in W^{1,2}(\Omega)$ *tak, že*

$$\begin{aligned} u - \tilde{u}_0 \in V \quad &(\tilde{u}_0 \textit{ je rozšíření } u_0 \textit{ na } \Omega) \\ ((u,\varphi)) = \langle f, \varphi\rangle_{V^\star,V} + \langle g, \varphi\rangle_{(W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3))^\star} \quad &\forall \varphi \in V. \end{aligned}$$

(β) Je–li Γ_1 prázdná, $b_1 \equiv 0$ v Ω a $\sigma \equiv 0$ na $\partial\Omega$ a pokud

$$\langle f, 1\rangle_{(W^{1,2}(\Omega))^\star} + \langle g, 1\rangle_{(W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))^\star} = 0,$$

pak $\exists! u \in W$ splňující

$$((u,\varphi)) = \langle f, \varphi\rangle_{(W^{1,2}(\Omega))^\star} + \langle g, \varphi\rangle_{(W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))^\star} \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$$

Důkaz. Je–li $u_0 \in W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_1)$, pak existuje právě jedno rozšíření $\tilde{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že $\tilde{u}_0 = u_0$ na Γ_1 ve smyslu stop. Nalezení u je (srovnej s důkazem věty 6.1.9.) ekvivalentní nalezení $\omega \in V$ tak, že

$$((\omega,\varphi)) = ((-\tilde{u}_0,\varphi)) + \langle f,\varphi\rangle_{V^\star} + \langle g,\varphi\rangle_{W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_2\cup\Gamma_3)} \equiv \langle F,\varphi\rangle$$

Protože

$$((\omega,\varphi)) \stackrel{df.}{\equiv} \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} + \int_\Omega b\omega\varphi\,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_3}\sigma\omega\varphi\,\mathrm{ds}$$

je omezená, bilineární, V–eliptická forma a $F \in V^\star$ (ověř!), Lax–Milgramova věta dává tvrzení (α). V případě Neumanovy úlohy (viz. (β)) postupujeme podobně (srovnej s větou 6.1.13.). □

Teorie regularit slabého řešení hledá odpověď na následující otázku: Nechť jsou data úlohy hladší (lepší) než požaduje existenční věta, je pak slabé řešení také hladší?

Pro lineární eliptické (a také parabolické) úlohy je odpověď *kladná*, teorie je však technicky komplikovaná. Proto se omezíme na jednodušší situaci, kdy $\Omega = \mathbb{R}^d$. Tzn., studujeme úlohu "bez hranice":

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu = f \quad \text{v } \mathbb{R}^d \tag{6.24}$$

Dokažte si větu (použijte větu 6.1.21):

Věta 6.1.22 *Nechť $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^d), b \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \geq 0$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$. Je–li $f \in (W^{1,2}(\mathbb{R}^d))^\star$, pak $\exists! u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ takové, že*

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} bu\varphi\,dx = \langle f,\varphi\rangle_{(W^{1,2}(\Omega))^\star} \quad \forall\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d). \tag{6.25}$$

Nyní předpokládejme, že data jsou hladší, tj.

$$a_{ij} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d), b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d) \quad \text{a } f \in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{6.26}$$

Je pak slabé řešení $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$?

Věta 6.1.23 *Nechť a_{ij}, b a f splňují (6.26). Pak jednoznačně definované slabé řešení $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ úlohy (6.24) patří do $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ a platí*

$$\|u\|_{2,2} \leq C\,\|f\|_2\,. \tag{6.27}$$

Důkaz. 1. Formální. Označ pro pevné $l \in \{1, 2, \ldots, d\} : Z' \equiv \frac{\partial Z}{\partial x_l}$ pro funkci Z. Derivujme rovnici (6.24) dle $x_l : \left(\frac{\partial}{\partial x_l}(6.24)\right) \Rightarrow$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u'}{\partial x_j}\right) + bu' = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a'_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - b'u + f'. \tag{6.28}$$

Násob (6.28) u', integruj přes $\mathbb{R}^d$ a užij integraci per–partes (Greenova věta). Dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}\frac{\partial u'}{\partial x_j}\frac{\partial u'}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}^d} b(u')^2\,\mathrm{dx} =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^d} a'_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u'}{\partial x_i} - \int_{\mathbb{R}^d} b'uu'\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}^d} f'u'\,\mathrm{dx} \tag{6.29}$$

Protože u je slabé řešení, tak

$$\|u\|_{1,2} \leq C\,\|f\|_2\,. \tag{6.30}$$

Levá strana (6.29): podmínka elipticity $+b \geq 0 \Rightarrow$ LS(6.29)$\geq \alpha\,\|\nabla u'\|_2^2$
Pravou stranu (6.29) nejdříve upravíme: $\int f'u'\,\mathrm{dx} = -\int fu''\,\mathrm{dx}$ a pak odhadujeme

$$|\mathrm{PS}\ (6.29)| \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ i,j=1,\ldots,d}} |a'_{ij}(x)|\,\|\nabla u\|_2\,\|\nabla u'\|_2 + \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|b'|\,\|u\|_2\,\|u'\|_2 +$$
$$+\,\|f\|_2\,\|u''\|_2 \leq C\,\|f\|_2\,\|\nabla u'\|_2 + C\,\|f\|_2^2 + \|f\|_2\,\|\nabla u'\|_2 \leq \tilde{C}\,\|f\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\,\|\nabla u'\|_2^2\,. \tag{6.31}$$

Dáme–li dolní odhad LS (6.29) dohromady s horním odhadem PS (6.29) obdržíme

$$\alpha\,\|\nabla u'\|_2^2 \leq C\,\|f\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\,\|\nabla u'\|_2^2\,, \text{což implikuje (6.27).}$$

□

Tento důkaz je formální (nesprávný), neboť vycházel z klasické formulace úlohy. My však nevíme, že slabé řešení $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ splňuje rovnici (6.24) skoro všude (či bodově) v $\mathbb{R}^d$. Musíme tedy k důkazu vyjít ze slabé formulace (6.25).

Důkaz. 2. Rigorózní. Věta A.3.92 říká

$$u \in W^{1,2} \equiv u \in L^2 \& \frac{1}{|h|}\,\|r_h u - u\|_2 \leq C < \infty \quad \forall |h| \leq h_0.$$

Chceme ukázat, že $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$. K tomu stačí (neboť $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla u(x + he^i) - \nabla u(x)|^2}{|h|^2}\,\mathrm{dx} \leq C\,\|f\|_2^2 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, d, \tag{6.32}$$

kde vektor $e^i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots)$ je i-tý vektor Euklidovské báze v $\mathbb{R}^d$.

Tvrzení (6.27) pak plyne z věty A.3.92 a ze skutečnosti, že

$$v_K \rightharpoonup v \text{ v } X \text{ (reflexivní, Banach)} \Rightarrow \|v\|_X \le \liminf_{K\to\infty} \|v_K\|_X .$$

Označme $\Delta^h u(x) = u(x+he^i) - u(x)$, kde i je pevné. Protože $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, tak $\Delta^h u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$.

Označ $r_{-h}\varphi = \varphi(x-he^i)$. Je–li $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow r_{-h}\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ a můžeme ji použít jak testovací funkci v (6.25). Po substituci dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}(x+he^i)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x+he^i)\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}^d} b(x+he^i)u(x+he^i)\varphi(x)\,\mathrm{dx} = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+he^i)\varphi(x). \quad (6.33)$$

Nyní od (6.33) odečteme (6.25) a do výsledku dosadíme za $\varphi := \Delta^h u$. Po úpravách dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}\frac{\partial\Delta^h u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\Delta^h u(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} + \int_{\mathbb{R}^d} b(x)|\Delta^h u(x)|^2\,\mathrm{dx} = \\ = -\int_{\mathbb{R}^d}[a_{ij}(x+he^i) - a_{ij}(x)]\frac{\partial u(x+he^i)}{\partial x_j}\frac{\partial\Delta^h u(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} - \\ - \int_{\mathbb{R}^d}(b(x+he^i) - b(x))u(x+he^i)\Delta^h u(x)\,\mathrm{dx} + \\ + \int_{\mathbb{R}^d}[f(x+he^i) - f(x)]\Delta^h u(x)\,\mathrm{dx}. \quad (6.34)$$

Substitucí upravme poslední člen na tvar

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\Delta^{-h}(\Delta^{+h}u(x))\,\mathrm{dx} = \\ = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)[u(x+he^i) - 2u(x) + u(x-he^i)]\,\mathrm{dx}.$$

Podělme výslednou rovnici h^2. Protože $\frac{\Delta^h u}{h} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ $\forall h$, plyne z věty A.3.92, že $(g = 1/h\Delta^h u)$

$$\frac{1}{h}\left\|\Delta^{-h}\left(\frac{\Delta^h u}{h}\right)\right\|_2 = \frac{1}{h}\left\|\Delta^{-h}g\right\|_2 \le c\left\|\nabla g\right\|_2 = c\left\|\nabla\frac{\Delta^h u}{h}\right\|_2.$$

Tak poslední člen v (6.34) je odhadnut shora členem

$$c\left\|f\right\|_2\left\|\nabla\frac{\Delta^h u}{h}\right\|_2.$$

Ostatní členy v (6.34) jsou odhadnuty podobně (= stejně) jako ve formálním důkazu. Např. levá strana (6.34):

$$\mathrm{LS}(6.34) \geq \alpha \left\| \nabla \frac{\Delta^h u}{h} \right\|_2 \quad \text{atd.}$$

Nerovnost (6.32) je dokázána. □

Máme–li úlohu v omezené oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, pak postupujeme podobně (nikoliv stejně): *musíme však dávat pozor, aby hodnoty $u(x+he^i)$ byly definovány.* To vede k rozdělení úlohy na zkoumání regularity

1. Vnitřní. Necítí hraniční podmínky, citlivá jen na koeficienty rovnice a f. Odhady se provádí na podoblasti množiny Ω a závisí na vzdálenosti této podoblasti od $\partial\Omega$.

2. Hraniční. Ta se dále dělí na regularitu derivací v tečných směrech (podél hranice) a regularitu derivací v normálových směrech.

Příkladem věty o vnitřní regularitě je následující tvrzení:

Věta 6.1.24 *Buď Ω omezená oblast. Nechť $u \in W^{1,2}(\Omega)$ splňuje*

$$\int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega b u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{6.35}$$

Nechť $f \in L^2(\Omega), a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega), b \in W^{1,\infty}(\Omega), b \geq 0$. Pak $\forall \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$

$$\|u\|_{2,2,\Omega'} \leq C(\Omega') \, \|f\|_{2,\Omega}$$

<u>*Důkaz*</u>. Buď $\xi \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \equiv 1$ na $\Omega', 0 \leq \xi \leq 1$. Polož místo φ v (6.35) $\varphi\xi^2$ a přepiš (6.35) pro veličinu $w = u\xi$, pak w rozšiř 0 vně Ω a vše lze chápat na $\mathbb{R}^d$ a užít větu 6.1.23. Přesněji, pokud $u \in W^{1,2}(\Omega)$ řeší

$$\int_\Omega \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + b u \varphi \right) \mathrm{dx} = \int_\Omega f \varphi \, \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g \varphi \, \mathrm{ds}, \tag{6.36}$$

pak vezmeme–li za φ v (6.36) $\varphi\xi^2$, kde $\xi \equiv 1$ v Ω', $\xi \in \mathcal{D}(\Omega), \xi(x) \in \langle 0, 1 \rangle$, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[a_{ij} \frac{\partial (u\xi)}{\partial x_j} \frac{\partial (\varphi\xi)}{\partial x_i} + b(u\xi)(\varphi\xi) \right] \mathrm{dx} = \\ = \int_\Omega (f\xi)(\varphi\xi)\, \mathrm{dx} - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} u \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right) \varphi\xi \, \mathrm{dx} - \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \varphi\xi \end{aligned} \tag{6.37}$$

Dodefinujeme–li $a_{ij}, b, f, \varphi\xi, u\xi$ vně Ω nulou a označíme–li $w = u\xi, \psi = \varphi\xi$ a $g \equiv f\xi - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} u \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right) - a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}$, dostáváme z (6.36)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + b w \psi \right] = \int_{\mathbb{R}^d} g \psi \, \mathrm{dx} \quad \forall \psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d), \text{ supp } \psi \subseteq \overline{\Omega}_0.$$

Nyní lze s úspěchem využít větu 6.1.23. □

Mluvíme–li o globální regularitě (tj. vnitřní i hraniční dohromady), pak platí následující tvrzení:

Věta 6.1.25 *Nechť Ω je třídy $C^{k-1,1}, k \geq 2$. Buď $a_{ij} \in W^{k-1,\infty}(\bar{\Omega}), b \geq 0, a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$. Buď $u_0 \in W^{k-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ a $f \in W^{k-2,2}(\Omega)$. Pak u, jediné slabé řešení Dirichletovy úlohy*

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu = f \quad v\ \Omega$$
$$u = u_0 \quad na\ \partial\Omega,$$

patří do $W^{k,2}(\Omega)$ a platí

$$\|u\|_{k,2\Omega} \leq C\left(\|f\|_{k-2,2,\Omega} + \|u_0\|_{k-\frac{1}{2},2,(\partial\Omega)}\right)$$

Bez důkazu.

Poznámka 6.1.26

- *Je–li $d = 3$ pak z věty A.3.59 o spojitém vnoření dostáváme $u \in C^{2,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$ (pro $k = 4$). Tedy u je klasickým řešením původní úlohy.*
- *Pro Neumannův problém platí podobná věta:*

$$g \in W^{k-\frac{3}{2},2}(\partial\Omega) \Rightarrow u \in W^{k,2}(\Omega), \quad k \geq 2$$

- *Pro smíšenou úlohu: pozor!! Singularita může vzniknout na přechodu mezi Γ_2 a Γ_1 apod.*

6.1.4 Spektrum symetrického lineárního operátoru

Motivace: Fourierova metoda pro smíšený parabolický problém. Formálně: hledejme řešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu = 0 \quad \text{v } Q_T = (0,T)\times\Omega,$$
$$a_{ij} = a_{ji}, \exists\alpha > 0 : a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\varphi|^2$$

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{na } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) &= u_0(x) && x \in \Omega \end{aligned} \tag{6.38}$$

ve tvaru $u(t,x) = v(x)h(t)$. Po dosazení dostaneme (hledáme netriviální řešení)

$$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - bv}{v}$$

Rovnost je možná jen jsou–li obě strany rovny konstantě $\Rightarrow$

$$\dot{h} = -\delta h \quad u_0(x) = h(0)v(x) \tag{6.39}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + bv = \delta v \quad \text{v } \Omega \quad v = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \tag{6.40}$$

(6.40) je úloha na spektrum. Dle věty 6.1.27 níže (viz též FA) existuje báze vlastních funkcí $\{v_i\}, v_i \in W_0^{1,2}$, odpovídajících vlastním číslům $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \quad \lambda_k \to \infty$.

Uvažujme úlohu (6.40) ve slabé formě: Hledáme $w^r \in W_0^{1,2}$ a $\lambda_r \in \mathbb{R}$ tak, že ($a_{ij} = a_{ji}, \exists \alpha > 0 : a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, b \geq 0$)

$$((w^r, \varphi)) = \lambda_r(w^r, \varphi) \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{6.41}$$

Věta 6.1.27 *Existuje spočetná množina $\{\lambda_r\}_{r=1}^{\infty}$ a vlastní vektory $\{w^r\}_{r=1}^{\infty}$ splňující (6.41) tak, že*

- $(w^r, w^s)_2 = \delta \quad \forall r, s \in N$. *Také* $\left(\left(\frac{w^r}{\sqrt{\lambda_r}}, \frac{w^s}{\sqrt{\lambda_s}}\right)\right) = \delta_{rs}$
- $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \dots$ *a* $\lambda_r \to \infty$ *pro* $r \to \infty$
- $\{w^r\}_{r=1}^{\infty}$ *tvoří bázi ve* $W_0^{1,2}(\Omega)$

Navíc, definujeme–li $H^N \equiv$ *lin. obal* $\{w^1, \dots, w^N\}$ *a* $P^N v \equiv \sum_{r=1}^{N}(v, w^r)w^r$ *dostáváme*

$$\|P^N\|_{\mathcal{L}(W^{1,2}, W^{1,2})} \leq C \quad \|P^N\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq C.$$

6.1.5 Princip maxima pro slabá řešení

Tato část se týká výlučně skalárních rovnic. Víme–li, že řešení naší úlohy je hladké = regulární, pak lze využít vět o slabém a silném principu maxima zavedené v klasické teorii PDR. Cílem této části je ukázat, že slabý princip maxima platí i pro slabá řešení.

Uveďme si nejdříve tvrzení o složení hladkého zobrazení s funkcí ze Sobolevova prostoru a zajímavých důsledcích tohoto tvrzení.

Věta 6.1.28 *(i) Buď $F \in C^1(\mathbb{R})$ taková, že $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Je–li $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pak $F \circ w \in W^{1,p}(\Omega)$ a platí*

$$\frac{\partial(F \circ u)}{\partial x_i} = (F' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad s.v.\ v\ \Omega \tag{6.42}$$

(ii) Je–li $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pak také u^+, u^- a $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ a platí

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \textit{s.v. na } \{u > 0\} \\ 0 & \textit{s.v. na } \{u \le 0\} \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \textit{s.v. na } \{u \ge 0\} \\ -\nabla u & \textit{s.v. na } \{u < 0\} \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u & \textit{s.v. na } \{u > 0\} \\ 0 & \textit{s.v. na } \{u = 0\} \\ -\nabla u & \textit{s.v. na } \{u < 0\} \end{cases}$$

(iii) $\nabla u = 0 \quad$ *s.v. na* $\{u = 0\}$

__Důkaz__. (i) Chceme ukázat že slabá derivace $F \circ u$ je L^p–integrovatelná a splňuje (6.42), tedy

$$-\int_\Omega (F \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega (F' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, \mathrm{dx} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{6.43}$$

$$\int_\Omega (F \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (F \circ u_\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{6.44}$$

kde $u_\varepsilon = u \star \mu_\varepsilon$ je regularizace. Užijeme–li skutečnosti, že $\frac{\partial (u_\varepsilon)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_\varepsilon$, tak máme

$$-\int_\Omega (F \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{dx} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (F \circ u_\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{dx} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (F' \circ u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \varphi \, \mathrm{dx} =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (F' \circ u_\varepsilon) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_\varepsilon \varphi \, \mathrm{dx} = \int_\Omega (F' \circ u) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi \, \mathrm{dx}.$$

(ii) Aproximujeme nyní funkci u^+ funkcemi $F_\varepsilon \circ u$, kde

$$F_\varepsilon(r) \begin{cases} (\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^2 & \text{pro } r > 0 \\ 0 & \text{pro } r \le 0. \end{cases}$$

Zřejmě $F_\varepsilon \circ u \to u^+, F'_\varepsilon(r) = \frac{r}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$ pro $r > 0$, a $F'_\varepsilon \circ u \to 1$ na množině $\{x \in \Omega; u(x) > 0\}$.
Dle části (i)

$$-\int_\Omega u^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (F_\varepsilon \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{dx} =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \cap \{u > 0\}} (F'_\varepsilon \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, \mathrm{dx} = \int_{\Omega \cap \{u > 0\}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, \mathrm{dx}.$$

Ostatní tvrzení jsou důsledkem vztahů

$$u^- = (-u)^+ \quad \text{a } |u| = u^+ + u^-.$$

(iii) $u = u^+ - u^-$ a $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$. Na množině $\{u = 0\}$ jsou jak ∇u^+, tak ∇u^- rovny nule skoro všude. Tedy i $\nabla u = 0$ s.v. na $\{u = 0\}$. □

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) &= 0 \quad \text{v } \Omega \\ u &= u_0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Víme, že (za příslušných předpokladů) existuje právě jedno slabé řešení $u \in W^{1,2}(\Omega)$ této úlohy tak, že

$$u - \tilde{u}_0 \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{6.46}$$

$$\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} = 0 \quad \text{pro každé } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{6.47}$$

Zformulujme nyní hlavní tvrzení.

Věta 6.1.29 *Je–li u slabé řešení úlohy (6.45). Pak*

$$\|u\|_{\infty,\Omega} \le \|u_0\|_{\infty,\partial\Omega}\,. \tag{6.48}$$

<u>Důkaz</u>. Pokud $\|u_0\|_{\infty,\partial\Omega} = \infty$, tvrzení zřejmě platí. V opačném případě označme $M := \|u_0\|_{\infty,\partial\Omega}$. Chceme ukázat, že

$$-M \le u(x) \le M \quad \text{s.v. v } \Omega. \tag{6.49}$$

Protože $(u - M)^+$ je dle věty 6.1.28 prvkem $W^{1,2}(\Omega)$ a stopa této funkce je nulová vidíme, že $(u - M)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Lze ji tedy použít jako testovací funkci v (6.47). S pomocí (6.47) a (ii) ve větě 6.1.28 dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial (u-M)^+}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} = \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial (u-M)^+}{\partial x_j}\frac{\partial (u-M)^+}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} \ge \\ \ge \alpha \left\|\nabla (u-M)^+\right\|_2^2 \ge \tilde{\alpha}\left\|(u-M)^+\right\|_{1,2}^2, \end{aligned}$$

kde jsme využili eliptičnost a ekvivalenci norem na $W_0^{1,2}(\Omega)$. Odsud,

$$(u - M)^+ = 0 \quad \text{s.v. v } \Omega; \quad \text{neboli } u \le M \quad \text{s.v. v } \Omega.$$

Protože $-u$ řeší stejnou rovnici s okrajovou podmínkou $-u_0$, plyne z právě dokázaného

$$(-u - M)^+ = 0 \quad \text{s.v. v } \Omega; \quad \text{neboli } u \ge -M \quad \text{s.v. v } \Omega.$$

Nerovnosti v (6.49) jsou tedy dokázány. □

6.1.6 Souvislost s variačním počtem

V této sekci si nejdříve ukážeme, že slabé řešení úlohy (6.1) je zároveň minimizér jistého kvadratického funkcionálu za předpokladu, že matice $\mathbb{A}(\cdot)$ je symetrická, tj.

$$a_{ij} = a_{ji} \quad i,j = 1,\dots,d. \tag{6.50}$$

Poté zformulujeme základní větu variačního počtu a ukážeme několik dalších příkladů, jak lze tuto větu využít k důkazu existence slabého řešení nelineárních (eliptických) diferenciálních rovnic.

Definujeme funkcionál $\phi : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\phi(u) \equiv \frac{1}{2}B(u,u) - \langle F, u\rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} B(u,\varphi) &= \int_\Omega \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + bu\varphi \right) \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} \sigma u\varphi \,\mathrm{ds} \\ \langle F,\varphi\rangle &= \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g\varphi\,\mathrm{ds} \end{aligned}$$

s úmluvou $g = 0$ na Γ_1 a $\sigma = 0$ na $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Věta 6.1.30 *Následující dva výroky jsou ekvivalentní:*

$$\begin{array}{lll} (1) \quad u - \tilde{u}_0 \in V & a\ B(u,\varphi) = \langle F,\varphi\rangle & \textit{pro každé } \varphi \in V \\ (2) \quad u - \tilde{u}_0 \in V & a\ \phi(u) \le \phi(u+h) & \textit{pro každé } h \in V. \end{array}$$

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Protože $B(u,h) = B(h,u)$ díky (6.50) a $B(h,h) \ge 0$ pro každé $h \in V$, přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} \phi(u+h) &= \frac{1}{2}B(u+h,u+h) - \langle F, u+h\rangle = \\ &= \frac{1}{2}B(u,u) - \langle F,u\rangle + \frac{1}{2}(B(u,h) + B(h,u)) - \langle F,h\rangle + \frac{1}{2}B(h,h) = \\ &= \phi(u) + \frac{1}{2}B(h,h) \ge \\ &\ge \phi(u). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Protože u je minimizér, nutně

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\phi(u+th)|_{t=0} = 0 \quad \text{pro každé } h \in V. \tag{6.51}$$

Přímý výpočet dává

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\phi(u+th)|_{t=0} = B(u,h) - \langle F,h\rangle$$

a (1) je ověřeno. $\square$

Definice 6.1.31 *Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův (nebo normovaný vektorový) prostor. Řekneme, že funkcionál $\phi : X \to \mathbb{R}$ je* koercivní*, právě když*

$$\phi(u) \to \infty \quad \textit{pokud } \|u\|_X \to \infty. \tag{6.52}$$

Definice 6.1.32 *Buď X reflexivní Banachův prostor. Řekněme, že funkcionál $\phi : X \to \mathbb{R}$ je* slabě zdola polospojitý*, právě když*

$$\textit{Jestliže } u_n \rightharpoonup u \textit{ slabě v } X (n \to \infty), \ \textit{pak } \phi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n). \tag{6.53}$$

Následující věta je často nazývána základní věta variačního počtu. Je příkladem přísloví "Těžko v definici, lehce ve větě".

Věta 6.1.33 *Buď X reflexivní Banachův prostor. Nechť funkcionál $\phi : X \to \mathbb{R}$ je koercivní, slabě zdola polospojitý a zdola omezený. Pak existuje $u \in X$ tak, že*

$$\phi(u) \leq \phi(v) \quad \forall v \in X \quad (u \textit{ je minimizér}). \tag{6.54}$$

Důkaz. Označme

$$m := \inf_{v \in X} \phi(v). \tag{6.55}$$

Protože ϕ je zdola omezený, je $m > -\infty$. Z definice m plyne existence posloupnosti $\{v^n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \phi(v^n) = m. \tag{6.56}$$

Protože ϕ je koercivní, existuje $R > 0$ (dostatečně velké) tak. že

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \, \|v^n\|_X \leq R. \tag{6.57}$$

Z reflexivity X a z (6.57) plyne existence $u \in X$ tak, že

$$v^{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{slabě v } X \quad (k \to \infty) \tag{6.58}$$

alespoň pro vybranou podposloupnost $\{v^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{v^n\}_{n=1}^{\infty}$. Z výše uvedeného a ze slabé zdola polospojitosti funkcionálu ϕ vyplývá

$$m \leq \phi(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \phi(v^{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \phi(v^{n_k}) = m.$$

Odsud

$$m = \phi(u)$$

a u je minimizér. □

Příklad 6.1.34 *Z funkcionální analýzy víme (viz též poznámka 6.1.35 níže), že norma $\|\cdot\|_X$ v úplném normovaném prostoru je slabě zdola polospojitá. Speciálně tedy pro $p \in (1,\infty)$ je*

$$\phi(v) = \frac{1}{p}\|\nabla v\|_p^p - \int_\Omega fv\, dx = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx - \int_\Omega fv$$

slabě zdola polospojitý funkcionál na $W_0^{1,p}(\Omega)$. Protože

$$\begin{aligned}\int_\Omega fv \le \left|\int_\Omega fv\right| \le \int_\Omega |fv|\, dx &\le \|f\|_{p'}\|v\|_p \le \\ &\le c\|f\|_{p'}\|\nabla v\|_p \le \\ &\le \frac{1}{2p}\|\nabla v\|_p^p + \tilde{c}\|f\|_{p'}^{p'}, \quad \left(p' = \frac{p}{p-1}\right)\end{aligned}$$

je

$$\phi(v) \ge \frac{1}{2p}\|\nabla v\|_p^2 - \tilde{c}\|f\|_{p'}^{p'}$$

a ϕ je koercivní ve $W_0^{1,p}$ i zdola omezený. Dle věty 6.1.33, existuje $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tak, že

$$\phi(u) \le \phi(v) \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Nutně tedy

$$0 = \frac{d}{dt}\phi(u+th)|_{t=0} \quad \forall h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Přímým výpočtem zjišťujeme, že u splňuje

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Tedy, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ je slabým řešením úlohy

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f \quad v\ \Omega \\ u &= 0 \quad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

Operátor $-\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ se nazývá p–Laplaceův operátor; pro $p = 2$ se redukuje na lineární Laplaceův operátor $-\Delta u$.

Poznámka 6.1.35 *Připomeňme následující tvrzení o oddělitelnosti:*
Buď $Y \subset\subset X$, X Banachův. Nechť $X_0 \in X - Y$. Pak existuje jediný $F \in X^\star$ tak, že $\|F\|_{X^\star} = 1, F = 0$ na Y a $F(X_0) =$ dist (X_0, Y). Pomocí tohoto tvrzení ukážeme, že

$$\text{Jestliže } X_n \rightharpoonup X \text{ slabě v } X, \text{ pak } \|X\|_X \le \liminf_{n\to\infty}\|X_n\|_X\,. \tag{6.59}$$

Důkaz. Protože $X_n \rightharpoonup X$ slabě v X, tak pro každé $F \in X^\star$

$$\langle F, X_n\rangle \to \langle F, X\rangle \text{ a také } |\langle F, X_n\rangle| \to |\langle F, X\rangle|. \tag{6.60}$$

Také víme, že

$$|\langle F, X_n\rangle| \le \|F\|_{X^\star} \|X_n\|_X .$$

Odsud a z (6.60) dostáváme přechodem k lim inf

$$|\langle F, X\rangle| \le \|F\|_{X^\star} \liminf_{n\to\infty} \|X_n\|_X .$$

Dle tvrzení o oddělitelnosti, aplikované pro $Y = \{0\}$ a $X_0 = X$, víme, že existuje $F \in X^\star$ tak, že $\|F\|_{X^\star} = 1$ a $\langle F, X\rangle = \|X\|$. Dosazením do poslední nerovnosti dostáváme (6.59). □

6.1.7 Nelineární verze Lax–Milgramovy věty

Uvažujme obecnější nelineární diferenciální rovnici 2. řádu s pravou stranou $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(\cdot, u, \nabla u)) + a_0(\cdot, u, \nabla u) = f \quad &\text{v } \Omega \\ u = u_0 \quad &\text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6.61}$$

kde sčítáme přes $i = 1, \dots, d$. Rovnici lze například získat z rovnováhy energie v klidu, kdy rychlost je nulová, vyjádřenou vztahem

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{q} + r = 0, \tag{6.62}$$

kde $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_d)$ reprezentuje tok tepla a r je zdroj tepla. Připouštíme zcela obecnou závislost q_i a r na poloze $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, teplotě u a jejím gradientu, tzn.

$$\begin{aligned} q_i(x) &= a_i(x, u(x), \nabla u(x)), \\ r(x) &= a_0(x, u(x), \nabla u(x)). \end{aligned}$$

Dosazením těchto konstitutivních vztahů do (6.62) získáme (6.61) s pravou stranou $f = 0$. Předpokládejme:

Pro $i = 0, 1, \dots, d$ jsou funkce $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Carathéodoryho funkce tzn. (A1)

- pro všechno $z \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{R}^d$ jsou $a_i(\cdot, z, p)$ měřitelné v Ω,
- pro s.v. $x \in \Omega$ jsou $a_i(x, \cdot, \cdot)$ spojité v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

a

Existují $C_i > 0, i = 0, 1, \dots, d,$ tak, že pro s.v $x \in \Omega$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^d |a_i(x, z, p)| \le C_i(1 + |z| + |p|).$ (A2)

Zatímco předpoklad (A1) je dostatečně obecný, předpoklad (A2) výrazně omezil uvažovanou třídu nelinearit: všechny mají tzv. lineární růsty jak v u tak v ∇u. Předpoklad (A2) tak připouští nelineární funkce, ty však mají stejné růsty jako operátory studované v předchozím sekcích. Snadno si však čtenář vymyslí nelinearity s polynomiálními, logaritmickými, exponenciálními růsty.

Definice 6.1.36 (slabého řešení úlohy (6.61)) *Řekneme, že $u \in W^{1,2}$ je slabé řešení úlohy (6.61) jestliže*

- $u - \tilde{u}_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$
- $$\int_\Omega \left(a_i(x,u,\nabla u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x,u,\nabla u)\varphi \right)\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{6.63}$$

Předpokládáme, že (A1) a (A2) platí a $f \in L^2(\Omega)$.

Cvičení 6.1.37 *Ukažte, že za předpokladu (A1) a (A2) je*

$$\int_\Omega \left[a_i(x,u,\nabla u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x,u,\nabla u)\varphi \right] dx < \infty \quad \text{pokud } u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Nyní je přirozeně zavést (nelineární!) $\tilde{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ předpisem

$$\langle \tilde{T}u, \varphi \rangle = \left[a_i(\cdot,u,\nabla u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(\cdot,u,\nabla u)\varphi \right] \mathrm{dx} \tag{6.64}$$

kde $\langle \cdot,\cdot \rangle$ označuje dualitu mezi $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^\star$ a $W_0^{1,2}(\Omega)$. Z cvičení plyne, že $\tilde{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \to \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^\star$ je omezený.

Nyní zformulujeme nelineární variantu Lax–Milgramovy věty.

Věta 6.1.38 *Buď X Hilbertův a $T : X \to X$ je lipschitzovsky spojitý, tzn.*

$$(\exists M > 0)(\forall u, v \in X) \quad \|Tu - Tv\|_X \le M \|u - v\|_X\,, \tag{6.65}$$

a silně monotónní, tzn.

$$(\exists m > 0)(\forall u, v \in X) \quad (Tu - Tv, u - v)_X \ge m \|u - v\|_X^2\,. \tag{6.66}$$

Pak pro každé $F \in X$ existuje právě jeden $u \in X$ tak, že

$$Tu = F. \tag{6.67}$$

<u>*Důkaz*</u>. Pozorujme nejdříve, že

$$m\|u - v\|_X^2 \le (Tu - Tv, u - v)_X \le \|Tu - Tv\|_X \|u - v\|_X \le M \|u - v\|_X^2$$

a tak $m \leq M$. Bez újmy na obecnosti, lze předpokládat, že $m < M$. (Jinak M zvětšíme.) Pro $\varepsilon > 0$ a $F \in X$ libovolné definujme operátor $A : X \to X$ předpisem

$$Au \equiv u - \varepsilon(Tu - F). \tag{6.68}$$

Ukážeme–li, že A je kontrakce v X pak důkaz věty plyne z Banachovy věty o pevném bodu. Pro každé $u, v \in X$ však máme

$$\begin{aligned}\|Au - Av\|_X^2 =&(u - v - \varepsilon(Tu - Tv), u - v - \varepsilon(Tu - Tv))_X = \\ =&(u - v, u - v)_X - 2\varepsilon(u - v, Tu - Tv)_X + \\ &+ \varepsilon^2(Tu - tv, Tu - Tv)_X = \\ =& \|u - v\|_X^2 - 2\varepsilon(Tu - Tv, u - v)_X + \varepsilon^2 \|Tu - Tv\|_X^2 .\end{aligned}$$

Využijeme–li lipschitzovskosti a silné monotonie T, dostaneme

$$\|Au - Av\|_X^2 \leq (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 M^2) \|u - v\|_X^2$$

Funkce $g(\varepsilon) := 1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 M^2$ nabývá minima pro $\varepsilon = \frac{m}{M^2}$ a $g\left(\frac{m}{M^2}\right) = 1 - \frac{m}{M^2} < 1$. Zobrazení A je tedy kontraktivní a tvrzení věty 6.1.38 je dokázáno. □

Vraťme se k naší úloze (6.61). Větu 6.1.38 nelze využít přímo na operátor $\tilde{T}$, neboť ten nezobrazuje $W_0^{1,2}(\Omega)$ do sebe. Můžeme však využít Rieszovu větu a k $\tilde{T} \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^\star$ přiřadit $T(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tak, že

$$\langle \tilde{T}u, \varphi \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} = (Tu, \varphi)_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \tag{6.69}$$

a

$$\|Tu\|_{1,2} = \left\| \tilde{T}u \right\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} . \tag{6.70}$$

K tomu, abychom ověřili, že $T : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ je lipschitzovský a silně monotónní, tedy stačí ukázat, že $\tilde{T} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ je lipschitzovský a silně monotónní, tzn.

$$(\exists \tilde{M} > 0)(\forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)) \left\| \tilde{T}u - \tilde{T}v \right\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} \leq \tilde{M} \|u - v\|_{1,2,\Omega} \tag{6.71}$$

a

$$(\exists \tilde{m} > 0)(\forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)) \langle \tilde{T}u - \tilde{T}v, u - v \rangle_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} \geq \tilde{m} \|u - v\|_{1,2}^2 . \tag{6.72}$$

Následující lemma dává postačující podmínky, kdy (6.71) a (6.72) platí.

Lemma 6.1.39 *(1) Jestliže*

$$\frac{\partial a_i}{\partial z} \text{ a } \frac{\partial a_i}{\partial p} \text{ jsou omezené v } \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, d, \tag{A3}$$

pak $\tilde{T}$ je lipschitzovsky spojitý.
(2) Jestliže platí

$$(\exists\alpha > 0)(s.v.\ x \in \Omega)\left(\forall\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}\right)$$
$$\sum_{\substack{i=0\\j=1}}^{d}\left(\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j + \frac{\partial a_i}{\partial z}\xi_i\xi_0\right) \geq \alpha|\xi|^2, \quad \text{(A4)}$$

pak $\tilde{T}$ je silně monotónní.

<u>*Důkaz*</u>. Základem důkazu obou tvrzení je následující identita

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{T}u - \tilde{T}v, \varphi\rangle &= \int_\Omega \Big(\left[a_i(\cdot, u, \nabla u) - a_i(\cdot, v, \nabla v)\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right] + \\
&\quad + \left[a_0(\cdot, u, \nabla u) - a_0(\cdot, v, \nabla v)\right]\varphi \Big)\,\mathrm{dx} = \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}} a_i(\cdot, v + s(u-v), \nabla v + s\nabla(u-v))\,\mathrm{ds}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \right.\\
&\quad \left. + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}} a_0(\cdot, v + s(u-v), \nabla v + s\nabla(u-v))\,\mathrm{ds}\,\varphi\right]\mathrm{dx} = \\
&= \int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial Z}(\dots)(u-v)\,\mathrm{ds}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \right.\\
&\quad \left. + \int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial p_l}(\dots)\frac{\partial(u_l - v)}{\partial x_l}\,\mathrm{ds}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right]\mathrm{dx} + \\
&\quad + \int_\Omega \varphi \int_0^1 \left[\frac{\partial a_0}{\partial z}(\dots)(u-v) + \frac{\partial a_0}{\partial p_l}(\dots)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_l}\right]\mathrm{ds}\,\mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

Zbytek důkazu je ponechán čtenáři. □

Věta 6.1.40 (existence, jednoznačnost a spojitá závislost na datech) *Nechť $f \in (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ a rozšíření $\tilde{u}_0$ hraniční podmínky u_0 splňuje*

$$\tilde{u}_0 \in W^{1,2}(\Omega) \ \textit{a stopa}\ \tilde{u}_0 = u_0.$$

Nechť koeficienty $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňují (A1) — (A4). *Pak existuje právě jedno slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ úlohy (6.61), které splňuje (6.63). Navíc, existuje $C > 0$ tak, že*

$$\|u\|_{1,2} \leq C\left[\|f\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2,\Omega}\right]. \tag{6.73}$$

<u>*Důkaz*</u>. Nejdříve zavedeme operátor $\tilde{T} : W^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ vztahem (6.64). Cílem je ukázat existenci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že

$$\begin{aligned} u - \tilde{u}_0 &\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ \langle\tilde{T}(u), \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle &\quad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned} \tag{6.74}$$

Hledejme u ve tvaru $u = \tilde{u}_0 + w$, kde $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Definujme operátor $\tilde{S} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ předpisem

$$\tilde{S}w = \tilde{T}(\tilde{u}_0 + w).$$

Ztotožníme–li $\tilde{S}$ s operátorem $S : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ a s $f \in (W^{1,2}(\Omega))^\star$ pomocí Rieszovy věty (viz. (6.69) — (6.70)) a užijeme–li lemma 6.1.39 a větu 6.1.38 dostáváme existenci a jednoznačnost úlohy

$$Sw = g \quad \text{v } (W^{1,2}(\Omega))^\star,$$

což dává tvrzení. Abychom dokázali (6.73), bereme nejdříve v (6.74) za $\varphi = u - \tilde{u}_0$ a pak k této rovnici přičteme $-\langle \tilde{T}(\tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0 \rangle$. Dostaneme

$$\langle \tilde{T}(u) - \tilde{T}(\tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0 \rangle = \langle f, u - \tilde{u}_0 \rangle - \langle \tilde{T}(\tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0 \rangle.$$

S využitím silné monotónie $\tilde{T}$ a lineárního růstu $a_i, i = 0, \ldots, d$, dostaneme

$$\|u - \tilde{u}_0\|_{1,2}^2 \leq C \left[\|f\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2} \right] \|u - \tilde{u}_0\|_{1,2}.$$

Protože $u = u - \tilde{u}_0 + \tilde{u}_0$, (6.73) je dokázáno. $\square$

6.2 Evoluční rovnice

V této části se budeme zabývat rovnicemi parabolického a hyperbolického typu. Protože tyto rovnice často popisují vývoj nějaké veličiny v čase, říká se jim též rovnice evoluční.

Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^d$ s hranicí $\partial\Omega$. Pro $T > 0$ označme časový interval $I \equiv (0, T)$ a množinu $Q_T \equiv I \times \Omega$ nazveme časoprostorový válec.

Pro dané funkce $a_{ij}, b_i, c : Q_T \to \mathbb{R}(i, j \in \{1, \ldots, d\})$ označíme symbolem $\mathcal{L}$ obecný lineární operátor 2. řádu

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + b_i\frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{6.75}$$

Jestliže

$$(\exists C_1 > 0)\left(\forall \xi \in \mathbb{R}^d\right)(\text{s.v. } (t, x) \in Q_T)\left(a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \geq C_1|\xi|^2\right) \tag{A1}$$

pak operátor $\mathcal{L}$ daný vzorcem (6.75) je eliptický (v souladu s předchozí kapitolou). Podmínka eliptičnosti může být zapsána i vektorovým způsobem (označíme $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^d$):

Existuje $C_1 > 0$ tak, že pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^d$ a skoro všechna $(t, x) \in Q_T$ platí $\quad \xi^T \cdot \mathbb{A}(t, x)\xi \geq C_1|\xi|^2$. (A1*)

Zaměříme se na dvě důležité úlohy.

(1) Pro dané funkce $f : Q_T \to \mathbb{R}, a_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ a $u_0 : (0, T) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ hledejme řešení