Část I

Klasická teorie

Kapitola 1

Úvod

V poslední době se projevuje stále větší nutnost vytvořit pro potřeby jak vědeckých pracovníků, zabývajících se teorií parciálních diferenciálních rovnic, tak studentů MFF UK (ale nejen této fakulty) ucelený text v českém jazyce, který by odrážel současný stupeň znalostí v hlavních proudech studia parciálních diferenciálních rovnic. Ruku v ruce s tím jde rovněž potřeba moderního učebního textu pro pedagogy a studenty MFF UK i fakult technického či přírodovědného zaměření. O této potřebě výmluvně hovoří zejména skutečnost, že nejběžněji používané současné učebnice PDR v češtině pocházejí ze 70. let, ať již jde o skripta "O.John, J.Nečas: *Rovnice matematické fyziky*, SPN, Praha, 1972", či "P.Doktor: *Moderní metody řešení parciálních diferenciálních rovnic*, SPN, Praha, 1976", nebo o monografii "S.Fučík, A.Kufner: *Nelineární diferenciální rovnice*, SPN, Praha, 1978", případně o klasickou knihu "A.Kufner, O.John, S.Fučík: *Function Spaces*, SPN, Praha, 1978". Novější učební texty (např. "J.Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, VUT Brno, 1998", nebo "P.Drábek, G.Holubová: *Parciální diferenciální rovnice: Úvod do klasické teorie*, Plzeň 2001") se pak vesměs zabývají pouze klasickou teorií. Autoři tohoto projektu vycházejí ze všech těchto monografií a učebních textů vycházet. Jejich cílem však je nejen jakási jejich aktualizace či sumarizace, ale především ucelenější pohled na moderní aspekty celé problematiky a zahrnutí novějších výsledků.

Text ve své současné podobě je jakousi první ucelenější verzí při cestě za tímto cílem. Vychází ze sylabu přednášky z PDR, tak jak je v současné době na MFF UK přednášena, tedy z jejího dělení na klasickou a moderní část. Vznik celého textu byl rozplánován na období let 2002, 2003 a 2004 (s perspektivou vydání v roce 2005). Tomu odpovídala i doba, po kterou měl původně trvat grant GAUK 261/2002, tj. období let 2002-2004 včetně. Vzhledem k administrativnímu zkrácení všech grantů GAUK o jednu třetinu v době po jejich započetí bude se muset dokončení tohoto textu obejít bez podpory tohoto grantu.

V březnu 2004, autoři.

Kapitola 2

Věta Cauchyova–Kowalevské

2.1 Reálně analytické funkce

Na úvod připomeneme resp. zavedeme některá vžitá i méně užívaná označení:

- Pro $y \in \mathbb{R}^m$ budeme používat Eukleidovskou normu $\|y\| := \sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2}$ a maximovou normu $|y|_M := \max_j\{|y_j|\}$.
- Pro $\rho > 0$ označíme krychlové m-dimenzionální okolí bodu $y^0 \in \mathbb{R}^m$ symbolem $I_\rho^m(y^0) := \{y \in \mathbb{R}^m;\ |y - y^0|_M < \rho\}$. Nebude-li uveden střed této krychle, rozumí se, že je krychle umístěna v počátku, tedy $I_\rho^m := I_\rho^m(0)$. Rovněž někdy můžeme vynechat označení pro dimenzi m, bude-li z kontextu zřejmé.
- Pro multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme tato standardní označení:

$$
\begin{aligned}
|\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_m\,, && \text{(výška multiindexu)},\\
\alpha! &:= \alpha_1! \dots \alpha_m!\,, && \text{(faktoriál multiindexu)},\\
y^\alpha &:= y_1^{\alpha_1} \dots\, y_m^{\alpha_m}\,, && y \in \mathbb{R}^m\,,\\
D^\alpha v(y) &:= \frac{\partial^{|\alpha|} v(y)}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots\, \partial y_m^{\alpha_m}}\,, && \text{(derivace podle multiindexu)}.
\end{aligned}
$$

Následující lemma se nám bude hodit při důkazu hlavní věty tohoto paragrafu. Uvědomte si, že jde o zobecnění vám jistě známé binomické věty.

Lemma 2.1.1 *Buď $k \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom*

$$
(a_1 + \dots + a_m)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\, a^\alpha\,, \tag{2.1}
$$

přičemž $\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \in \mathbb{N}$.

<u>*Důkaz*</u>. Viz např. [18].

Dále zavedeme pojem reálně analytické funkce.

Definice 2.1.2 (Reálně analytická funkce) *Funkci $f : I_\rho^m(y^0) \to \mathbb{R}$ nazveme reálně analytickou v $I_\rho^m(y^0)$, pokud existují reálná čísla f_α taková, že řada*

$$\sum_\alpha f_\alpha (y - y^0)^\alpha \tag{2.2}$$

konverguje bodově pro všechna $y \in I_\rho^m(y^0)$ k součtu $f(y)$.

Poznámka 2.1.3 Podobně jako u mocninných řad lze ukázat, že (2.2) konverguje absolutně stejnoměrně na $I_\sigma^m(y^0)$ pro všechna $0 < \sigma < \rho$ a definuje v $I_\rho^m(y^0)$ nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou funkci f. Řadu (2.2) lze navíc ve všech vnitřních bodech $I_\rho^m(y^0)$ libovolněkrát derivovat člen po členu, a platí

$$f_\alpha = \frac{D^\alpha f(y^0)}{\alpha!}\,. \tag{2.3}$$

Důkazy těchto tvrzení je možno nalézt například v [18]. Navíc platí následující lemma.

Lemma 2.1.4 *Buď*

$$f(y) = \sum_\alpha f_\alpha (y - y^0)^\alpha$$

reálně analytická funkce v $I_\rho^m(y^0)$. Potom pro každé $0 < \sigma < \rho$ existuje $M > 0$ taková, že

$$|f_\alpha| \le \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}}\,. \tag{2.4}$$

<u>*Důkaz*</u>. Viz např. [18, str. 47].

2.2 Metoda majorizace a věta Cauchy–Kowalevské

Věta Cauchyova-Kowalevské stanoví lokální existenci (a jednoznačnost) lokální Cauchyovy úlohy pro systém kvazilineárních rovnic 1. řádu.

Věta 2.2.1 (Cauchy-Kowalevská) *Buďte $a_{ijr}(x,u)$, $b_r(x,u) : I_\rho^{d+s} \to \mathbb{R}$, kde $i = 1,\ldots,d$, $j = 1,\ldots,s$, reálně analytické pro nějaké $\rho > 0$. Pak existuje $0 < \rho' \le \rho$ a reálně analytické funkce $u_r : I_{\rho'}^{d+1} \to \mathbb{R}$, $r = 1,\ldots,s$, takové, že pro všechna $r = 1,\ldots,s$ platí*

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}(x,t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{d} a_{ijr}(x,u(x,t)) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x,t) + b_r(x,u(x,t)) \quad na\ I_{\rho'}^{d+1}\,, \tag{2.5}$$

$$u_r(x,0) = 0 \quad na\ I_{\rho'}^{d}\,. \tag{2.6}$$

Ve třídě reálně analytických funkcí je toto řešení určeno jednoznačně.

Důkaz se vede tzv. metodou majorizace, s jejíž základní terminologií se nyní seznámíme.

Definice 2.2.2 *Nechť f a g jsou reálně analytické na I_ρ^m, $f(y) = \sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$, $g(y) = \sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$. Řekneme, že g* majorizuje *f na I_ρ^m (též: g je majorantou f), pokud*

$$|f_\alpha| \leq g_\alpha \quad \forall\, \alpha\,, \tag{2.7}$$

tedy že $|D^\alpha f(0)| \leq D^\alpha g(0)$ pro všechny multiindexy α. V tom případě píšeme $f \preccurlyeq g$.

Definice 2.2.3 *Buďte $a_{ijr} \preccurlyeq \widetilde{a}_{ijr}$, $b_r \preccurlyeq \widetilde{b}_r$ na I_ρ^{d+s}. Pak řekneme, že úloha*

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}(x,t) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} \widetilde{a}_{ijr}(x, v(x,t))\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x,t) + \widetilde{b}_r(x, v(x,t)) \quad na\ I_{\rho'}^{d+1}\,, \tag{2.8}$$

$$v_r(x,0) = 0 \quad na\ I_{\rho'}^{d}\,. \tag{2.9}$$

$r = 1, \ldots, s$, je majorantní *k úloze (2.5)–(2.6).*

<u>*Důkaz Věty 2.2.1*</u>. Důkaz rozdělíme na několik kroků.

Jednoznačnost: Předpokládejme, že existují reálně analytické funkce $u_r : I_\rho^{d+1}$ splňující úlohu (2.5)–(2.6). Ukážeme, že jejich derivace jsou z rovnic (2.5)–(2.6) jednoznačně vyjádřitelné. Nechť α je multiindex o $d+1$ složkách. Označme $\alpha = (l, \beta)$, kde l je první složka multiindexu α (odpovídající časové proměnné) a β je multiindex o d složkách (odpovídající prostorovým proměnným). Ukážeme, že pro každé $\alpha = (l, \beta)$ a pro každé r existuje polynom $f_{r,\alpha}$ s nezápornými koeficienty (nezávislý na konkrétních datech úlohy) takový, že hodnotu $D^\alpha u_r(0)$ lze spočítat jako hodnotu polynomu $f_{r,\alpha}$, za jehož proměnné dosadíme hodnoty funkcí a_{ijk}, b_k a všech jejich derivací řádu menšího než $|\alpha|$ v bodě 0. Důkaz provedeme indukcí podle l.

I. Nechť $l = 0$. Jelikož podle (2.6) je $u_r(0,x) \equiv 0$, platí $D^\alpha u_r(0) = 0$ (derivujeme jen podle prostorových proměnných). Stačí tedy položit $f_{r,\alpha} \equiv 0$.

II. Nechť $l > 0$ a nechť máme všechny polynomy $f_{r,\alpha}$ pro α s první složkou menší než l. Pak

$$D^\alpha u_r = D^{(l-1,\beta)}\frac{\partial u_r}{\partial t} = D^{(l-1,\beta)}\left(\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} a_{ijr}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + b_r\right).$$

Na pravé straně rovnosti se po úpravě vyskytují pouze derivace funkcí a_{ijr}, b_r a u_j podle multiindexu s první složkou menší než l. Uvažujeme-li získanou rovnost v bodě 0, pak podle indukčního předpokladu lze za tyto derivace funkcí u_j dosadit polynomy v proměnných a_{ijk}, b_k a jejich derivací (s nezápornými koeficienty), čímž na pravé straně získáme polynom $f_{r,\alpha}$. Snadno se ověří, že jeho koeficienty jsou nezáporné a že jako proměnné jsou použity pouze derivace řádu menšího než $|\alpha|$. Tím je důkaz části o jednoznačnosti hotov.

1. krok k existenci: Ukážeme, že pokud nějaká majorantní úloha (2.8)–(2.9) má reálně analytická řešení v_r, pak existují i reálně analytická řešení u_r úlohy (2.5)–(2.6). Označme $g_{r,\alpha} = \frac{1}{\alpha!} f_{r,\alpha}$ (kde $f_{r,\alpha}$ jsou polynomy z předchozího kroku). Definujme čísla $u_{r,\alpha} = \frac{D^\alpha u_r(0)}{\alpha!}$, $v_{r,\alpha} = \frac{D^\alpha v_r(0)}{\alpha!}$. Pak je

$$|u_{r,\alpha}| = |g_{r,\alpha}(a_{ijk}(0), b_k(0), \dots)| \leq g_{r,\alpha}(|a_{ijk}(0)|, |b_k(0)|, \dots) \leq$$

$$\leq g_{r,\alpha}(\tilde{a}_{ijk}(0), \tilde{b}_k(0), \dots) = v_{r,\alpha}$$

(v první nerovnosti jsme podstatným způsobem využili nezápornosti koeficientů polynomu g_α). Jelikož suma $\sum\limits_\alpha v_{r,\alpha} y^\alpha$ konverguje na celém $I_{\rho'}^{d+1}$, podle Weierstrassova kritéria konverguje (dokonce absolutně) také suma $\sum\limits_\alpha u_{r,\alpha} y^\alpha$ a definuje nám na $I_{\rho'}^{d+1}$ reálně analytickou funkci $u_r(y)$. Z konstrukce čísel $u_{r,\alpha}$ je zřejmé, že levé a pravé strany rovností (2.8) a (2.9) se rovnají v bodě 0 včetně všech svých derivací a jsou si tedy rovny všude v $I_{\rho'}^{d+1}$ (jde o reálně analytické funkce). Funkce u_r jsou tedy řešením problému (2.5)–(2.6).

2. krok k existenci: Nalezneme speciální problém, majorizující naši obecnou úlohu. Nejdříve zvolíme $\sigma \in (0, \rho)$ libovolně. Podle Lemmatu 2.1.4 existuje konstanta $M > 0$ taková, že $|\frac{D^\alpha a_{ijr}}{\alpha!}| < \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}}$, $|\frac{D^\alpha b_r}{\alpha!}| < \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}}$ pro všechna α, i, j, r. Zvolíme-li $\rho' < \frac{\sigma}{d+s}$ libovolné kladné, bude pro nějaké $q < 1$ platit odhad

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_d + u_1 + \dots + u_s}{\sigma} \right| \leq q$$

kdykoliv $(x, u) \in I_{\rho'}^{d+s}$. Definujeme-li funkci

$$H(x, u) = \frac{M}{1 - \frac{x_1 + \dots + x_d + u_1 + \dots + u_s}{\sigma}} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma^k} (x_1 + \dots + x_d + u_1 + \dots + u_s)^k,$$

vidíme, že je reálně analytická na celém $I_{\rho'}^{d+s}$. Označme $y = (x_1 + \dots + x_d + u_1 + \dots + u_s)$, pak podle Lemmatu 2.1.1 je

$$H(x, u) = \sum_\alpha H_\alpha y^\alpha,$$

kde

$$H_\alpha = \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} \geq \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}}.$$

Zvolíme-li tedy $\tilde{a}_{ijr} = \tilde{b}_r = H$, dostaneme majorizující úlohu

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{M\sigma}{\sigma - (x_1 + \dots + x_d + v_1 + \dots + v_s)} \left(1 + \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

$$v_r(x, 0) = 0 \qquad r = 1, \dots, s.$$

3. krok k existenci: Zbývá nám nalézt nějaké reálně analytické řešení tohoto problému. Označíme si $X = x_1 + \cdots + x_d$. Budeme hledat řešení ve tvaru $v_r(x,t) = V(X,t)$. Problém se nám tedy zredukuje na jednu rovnici

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{M\sigma}{\sigma - X - sV}\left(1 + sd\frac{\partial V}{\partial X}\right),$$

$$V(X,0) = 0.$$

Je již jen technickou záležitostí ověřit, že tento problém má řešení

$$V(X,t) = \frac{\sigma - X - \sqrt{(\sigma - X)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}}{s(d+1)},$$

což je v dostatečně malém okolí nuly reálně analytická funkce. □

Cvičení 2.2.4 *Nalezněte jako cvičení funkci $V(X,t)$ metodou charakteristik.*

Poznámka 2.2.5 (*Lewyho protipříklad.*) Požadavek reálné analytičnosti funkcí a_{ijr}, b_r nelze vynechat. Lewy zkonstruoval následující protipříklad. Pro $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ označme

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - 2i(x+iy)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Potom existuje $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, která není analytická, a taková, že rovnice

$$Lu = f$$

nemá klasické řešení na žádné otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

2.3 O klasifikaci rovnic 2. řádu

Mějme lineární rovnici 2. řádu v $\mathbb{R}^d$

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x)\,. \tag{2.10}$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_{ij} = a_{ji}$. Dále, pro každé pevné x, je matice $A := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^d$ reálná, symetrická, a tedy diagonalizovatelná. Proto existují matice P ortogonální, a B diagonální, že

$$P^T A P = B\,.$$

Lze zařídit, aby B měla na diagonále jen prvky množiny $\{1,-1,0\}$, dokonce podle zákona o setrvačnosti kvadratické formy reprezentující matici A, je počet 1,-1,0 jednoznačně dán,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_d \end{pmatrix} .$$

Pomocí transformační matice P zavedeme novou proměnnou y a novou funkci v,

$$y = Px, \qquad v(y) = v(Px) = u(x) .$$

Po provedení složených parciálních derivací

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial y_k} p_{ki} ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h} p_{ki} p_{hj} ,$$

které dosadíme do původní rovnice, bude její hlavní část tvaru

$$\sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h} \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} p_{ki} p_{hj} \right) = \sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h} \delta_{kh} b_k .$$

Počet nenulových b_k označme m. Mohou nastat tyto případy:

- Rovnici (2.10) nazveme **eliptickou**, je-li $m = d$ a znaménka všech b_i jsou stejná. Rovnice má pak tvar $\Delta v + \ldots$, tedy $\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \ldots$.
- Rovnici (2.10) nazveme **hyperbolickou**, je-li $m = d$ a znaménka všech b_i až na 1 jsou stejná. Rovnice má pak tvar $\frac{\partial^2 v}{\partial y_d^2} = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \ldots$.
- Rovnici (2.10) nazveme **parabolickou**, je-li $m = d - 1$ (BÚNO $b_d = 0$) a znaménka všech ostatních b_i jsou stejná; koef. u $\frac{\partial v}{\partial y_d}$ je nenulový. Rovnice má pak tvar $\frac{\partial v}{\partial y_d} = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \ldots$.
- Rovnici (2.10) nazveme **parabolickou v širším slova smyslu**, je-li $m < d$.
- Rovnici (2.10) nazveme **ultrahyperbolickou** jestliže alespoň dvě b_i jsou kladná a alespoň dvě b_i jsou záporná, $m = d$.

Příklad 2.3.1 Tricomiho rovnice

$$x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

je pro $x_2 > 0$ eliptická, pro $x_2 < 0$ hyperbolická, tedy mění typ při přechodu osy x_1.

Kapitola 3

Laplaceova a Poissonova rovnice

3.1 Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice

Definice 3.1.1 *Buď Ω oblast v $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Rovnici*

$$-\Delta u = f \qquad v\ \Omega \tag{3.1}$$

pro neznámou funkci u nazýváme Poissonovou (Laplace-Poissonovou) rovnicí *v Ω. Je-li $f \equiv 0$ v Ω, mluvíme speciálně o* Laplaceově rovnici *v Ω.*

Definice 3.1.2 *(i) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast. Řekneme, že $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ je* harmonická v Ω*, pokud $\Delta u(x) = 0$ pro všechna $x \in \Omega$ (tj. u bodově řeší Laplaceovu rovnici v Ω).*

(ii) Řekneme, že $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je vnější oblast, pokud Ω je doplňkem uzávěru omezené oblasti v $\mathbb{R}^d$. Řekneme, že $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ je harmonická ve vnější oblasti Ω*, pokud $\Delta u(x) = 0$ pro všechna $x \in \Omega$ a navíc pokud $u(x) = \mathrm{O}(|x|^{2-d})$ pro $|x| \to \infty$.*

Poznámka 3.1.3

- Připomeňte si pojem $u(x) = \mathrm{O}(|x|^{2-d})$ pro $|x| \to \infty$.
- Existují i jiné definice pojmu harmonické funkce, například vyžadují pouze spojitost a splnění Laplaceovy rovnice v nějakém jiném než bodovém smyslu.

Příklad 3.1.4 (i) Konstanty jsou harmonické v libovolné oblasti v $\mathbb{R}^d$, lineární funkce jsou harmonické v libovolné omezené oblasti v $\mathbb{R}^d$ a řeší Laplaceovu rovnici v libovolné oblasti v $\mathbb{R}^d$.

(ii) Funkce $u(x, y) = x^2 - y^2$ řeší Laplaceovu rovnici v libovolné oblasti v $\mathbb{R}^2$. Na žádné vnější oblasti v $\mathbb{R}^2$ však není harmonická (rozmyslete si).

(iii) Definujme funkci $U(x)$ předpisem[1]

$$U(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(d-2)\varkappa_d\,|x|^{d-2}} & \text{pokud } d \geq 3\,, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|} & \text{pokud } d = 2\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

Buď nyní $\xi \in \mathbb{R}^d$ pevný bod. Potom funkce $U(x-\xi)$ je harmonická v libovolné (omezené či neomezené) oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, neobsahující bod ξ. Speciálně je $U(x-\xi)$ harmonická v $\mathbb{R}^d \setminus \{\xi\}$.

(iv) Buďte ξ, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pevné body, $d \geq 3$. Potom funkce $\frac{|\xi|^2-|x-x_0|^2}{|x-\xi|^d}$ je harmonická v libovolné oblasti, neobsahující bod ξ. Ukažte.

Poznámka: funkce (3.2) nazýváme elementární řešení Laplaceovy rovnice.

3.2 Věta o třech potenciálech

Věta 3.2.1 (O třech potenciálech) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast s "dostatečně" hladkou hranicí, $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Potom pro každé $y \in \Omega$ je*

$$u(y) = -\int_\Omega \Delta u(x)\,U(x-y)\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,U(x-y)\,dS_x + \int_{\partial\Omega} u(x)\,\frac{\partial U}{\partial \nu}(x-y)\,dS_x\,, \tag{3.3}$$

kde $U(x)$ je elementární řešení Laplaceovy rovnice, viz (3.2).

__Důkaz__. Již víme, že funkce $U(x-y)$ (jako funkce proměnné x) je harmonická v každé oblasti, která neobsahuje bod y. Speciálně jsou tedy funkce $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ resp. $\ln\frac{1}{|x|}$ harmonické v oblasti dimenze $d \geq 3$ resp. $d = 2$, pokud tato oblast neobsahuje bod 0.

Věnujme se nyní vlastnímu důkazu. Pro dimenzi $d \geq 3$ věta tvrdí:

$$\begin{aligned} u(y) = \frac{1}{\varkappa_d(d-2)}\Bigg(-\int_\Omega \frac{\Delta u(x)}{|x-y|^{d-2}}\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\frac{1}{|x-y|^{d-2}}\,dS_x \\ - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|x-y|^{d-2}}\right) u(x)\,dS_x \Bigg)\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dodejme, že derivování podle vektoru vnější normály ν se týká proměnné x. Bez újmy na obecnosti dokážme tvrzení pouze pro $y = 0$ ($y \neq 0$ dostaneme posunutím). Dále

[1]Symbolem $\varkappa_d$ značíme povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$, přičemž $\varkappa_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$. Pro Eulerovu funkci Γ platí $\Gamma(k) = (k-1)!$ a $\Gamma(k+\frac{1}{2}) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$, $k \in N$. Připomeňme, že $(2k-1)!! = (2k-1)\cdot(2k-3)\cdots 3\cdot 1$.

předpokládáme, že bod 0 leží v Ω. Protože integrál vlevo v následující rovnosti existuje jako Lebesgueův (uvědomte si to), máme

$$\int_\Omega \frac{\Delta u(x)}{|x|^{d-2}} dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} \frac{\Delta u(x)}{|x|^{d-2}} dx,$$

kde $B_\varepsilon(0)$ značí kouli se středem v bodě 0 o poloměru ε. Pokud integrujeme přes $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$, můžeme bez obav použít druhou Greenovu větu (integrovaná funkce je spojitá až do hranice $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$, která je dostatečně hladká). Proto lze pokračovat

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u(x) \Delta \frac{1}{|x|^{d-2}}\, dx - \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(0))} u(x) \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{1}{|x|^{d-2}} \right) dS_x \right.$$
$$\left. + \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(0))} \frac{1}{|x|^{d-2}} \frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\, dS_x \right).$$

První člen je nulový, neboť $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ je harmonická na $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$. Zbylé dva integrály přes $\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(0))$ rozdělíme zvlášť na integrál přes $\partial\Omega$ a $\partial B_\varepsilon(0)$ (pozor na orientaci). Na členy, ve kterých probíhá integrace přes $\partial\Omega$, nemá limita přes ε vliv, a stačí proto vyšetřit chování členů, kde integrace probíhá přes $\partial B_\varepsilon(0)$. Ukážeme, že

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{|x|^{d-2}} \frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\, dS_x = 0\,.$$

Platí totiž odhad (velikost x je na $\partial B_\varepsilon(0)$ rovna ε)

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{|x|^{d-2}} \frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\, dS_x \right| \le \max_{x\in\partial B_\varepsilon(0)} \left| \frac{\partial u}{\partial\nu}(x) \right| \varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{dS_x}{\varepsilon^{d-1}},$$

kde integrál vpravo je přesně $\varkappa_d$, tj. povrch jednotkové sféry v d dimenzích. Abychom zjistili, čemu se rovná limita výrazu $\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{1}{|x|^{d-2}} \right) dS_x$, vypočteme nejprve normálovou derivaci $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ (ν je jednotkový vektor a kvůli orientaci vnější normály $\nu \upharpoonleft\!\downharpoonright x$, tedy $x \cdot \nu = -|x|$):

$$\frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{1}{|x|^{d-2}} \right) = \nabla \frac{1}{|x|^{d-2}} \cdot \nu = -(d-2) \frac{1}{|x|^d}\, x \cdot \nu = (d-2) \frac{1}{|x|^{d-1}}\,.$$

Proto

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{1}{|x|^{d-2}} \right) dS_x = -\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)(d-2) \frac{dS_x}{\varepsilon^{d-1}},$$

což rozepíšeme jako

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(0)(d-2) \frac{dS_x}{\varepsilon^{d-1}} - \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \big(u(x) - u(0) \big) (d-2) \frac{dS_x}{\varepsilon^{d-1}}\,.$$

První integrál konverguje k $-u(0)(d-2)\varkappa_d$ a druhý konverguje k nule díky spojitosti $u(x)$. Konečně tedy (nesmíme zapomenout na integrály přes $\partial\Omega$, které jsme získali z $\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(0))$):

$$\int_\Omega \frac{\Delta u(x)}{|x|^{d-2}}\,dx = -\int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)dS_x + \int_{\partial\Omega}\frac{1}{|x|^{d-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS_x - u(0)(d-2)\varkappa_d,$$

z čehož po jednoduché úpravě dostaneme dokazované tvrzení (3.4) pro $u(0)$. Kdybychom vystartovali z výrazu $\int_\Omega \Delta u(x)\ln\frac{1}{|x|}\,dx$ a použili stejných úprav jako výše, provedli bychom důkaz pro dimenzi $d=2$. Čtenáři doporučujeme si to jako cvičení provést. □

Poznámky. Tři integrály v (3.3) se po řadě nazývají objemový potenciál s hustotou $-\Delta u$, potenciál jednovrstvy s hustotou $\frac{\partial u}{\partial\nu}$, potenciál dvojvrstvy s hustotou u.

Důsledek: $\mathcal{C}^2$ řešení Laplaceovy rovnice už jsou nutně třídy $\mathcal{C}^\infty$. Viz následující věta.

Věta 3.2.2 (Věta o regularitě) *Buď $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je oblast. Nechť $\Delta u = 0$ v Ω. Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Důkaz. Ponecháváme čtenáři s tímto návodem: Pro každý pevný vnitřní bod $y \in \Omega$ opíšeme kouli $B_R(y) \subset\subset \Omega$, pro ni napíšeme větu o tří potenciálech, využijeme $\Delta u = 0$ a vlastnosti integrálu s parametrem. □

3.3 Dirichletova úloha na kouli

Definice 3.3.1 (Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Řekneme, že u je klasickým řešením Dirichletovy úlohu pro Laplaceovu rovnici v Ω, pokud $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cup \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, a*

$$\Delta u = 0 \qquad v\ \Omega\,, \tag{3.5}$$

$$u = \varphi \qquad na\ \partial\Omega\,. \tag{3.6}$$

Pro kouli lze klasické řešení Dirichletovy úlohy psát explicitně. Toto explicitní řešení nyní odvodíme.

Představme si, že chceme vyřešit Dirichletovu úlohu na kouli o poloměru R se středem v bodě $x_0 = 0$. Množina Ω z předchozí definice je tedy $B_R(0)$. Připomeneme si formulaci Věty 3.2.1 o třech potenciálech pro $d \geq 3$:

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d(d-2)}\Bigg(-\int_\Omega \frac{\Delta u(\xi)}{|x-\xi|^{d-2}}\,d\xi + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\,dS_\xi - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\right)u(\xi)\,dS_\xi\Bigg)\,.$$

Funkci $u(x)$ bychom mohli najít užitím tohoto vztahu. První integrál totiž můžeme pokládat za nulový (viz. zadání úlohy) a poslední člen můžeme vyjádřit pomocí dat úlohy, neboť $u(\xi) = \varphi(\xi)$ na $\partial B_R(0)$. Problémy máme pouze s prostředním členem, protože $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)$ nejsme schopni vyjádřit z dat rovnice. Pokusme se nyní prostřední člen nějakým vhodným způsobem přepsat, abychom tuto obtíž odstranili. Druhá Greenova věta říká, že

$$\int\limits_{B_R(0)} (u\Delta w - w\Delta u)\, dx = \int\limits_{\partial B_R(0)} u\frac{\partial w}{\partial \nu} dS - \int\limits_{\partial B_R(0)} w\frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

Funkce u v právě citované verzi Greenovy věty bude odpovídat naší funkci $u(\xi)$. Představme si nyní, že funkce $w(\xi)$ je harmonická v *celé* $B_R(0)$. Pak bude levá strana Greenovy formule nulová a dostaneme

$$\int\limits_{\partial B_R(0)} u\frac{\partial w}{\partial \nu} dS = \int\limits_{\partial B_R(0)} w\frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

což nám umožní zbavit se integrálu, ve kterém vystupuje $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)$. Nyní zbývá najít funkci $w(\xi)$. Zkusme nejdříve za $w(\xi)$ (x je parametr a veškeré derivování se týká proměnné ξ) vzít rovnou funkci $\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}$, která vystupuje ve větě o třech potenciálech. Tato funkce je harmonická všude kromě bodu x, který naneštěstí leží uvnitř $B_R(0)$. Takto zvolená funkce není pro naše účely vhodná. Je tedy třeba vymyslet funkci $w(\xi)$, která je rovná $\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}$ na $\partial B_R(0)$ a je harmonická v $B_R(0)$. K tomuto účelu použijeme kulovou inverzi. Nechť $\hat{x}$ je bod, který je kulovou inverzí bodu x. Tento bod leží na přímce vedené z počátku bodem x a pro jeho vzdálenost od počátku platí

$$\frac{R}{|x|} = \frac{|\hat{x}|}{R},$$

což mimo jiné znamená, že polohový vektor bodu $\hat{x}$ je dán jako $\hat{x} = \nu\frac{R^2}{|x|} = x\frac{R^2}{|x|^2}$. Volbou bodu $\hat{x}$ podle předchozího je zaručena podobnost trojúhleníků a platí $\frac{|x-\xi|}{|\hat{x}-\xi|} = \frac{x}{R}$. Hledanou funkcí $w(\xi)$ je proto:

$$w(\xi) = \frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d-2}} \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}$$

Skutečně, tato funkce splňuje všechny naše požadavky. Je harmonická na $B_R(0)$, protože bod $\hat{x}$, ve kterém harmonická není, leží mimo $B_R(0)$ a navíc je na základě vlastností kulové inverze rovná $\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}$ pro $\xi \in \partial B_R(0)$. Užijeme zmíněnou větu o třech potenciálech, ve které provedeme úpravy pomocí druhé Greenovy věty a výsledkem je vzoreček:

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d(d-2)}\left(\int_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d-2}}\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\right)dS_\xi \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\partial B_R(0)} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\right)\varphi(\xi)dS_\xi\right).$$

Vypočteme normálové derivace

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d-2}}\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\right) = \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\nabla\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d-2}}\cdot\nu = +(d-2)\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d}}(\hat{x}-\xi)\cdot\nu$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\right) = \nabla\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\cdot\nu = +(d-2)\frac{1}{|x-\xi|^{d}}(x-\xi)\cdot\nu,$$

ve výrazu, kde vystupuje $\hat{x}$ přejdeme k původní proměnné x a dostaneme:

$$+(d-2)\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\frac{1}{|\hat{x}-\xi|^{d}}(\hat{x}-\xi)\cdot\nu = +(d-2)\frac{|x|^2}{R^2}\frac{1}{|x-\xi|^{d}}(x\frac{R^2}{|x|^2}-\xi)\cdot\nu$$

Konečně po dosazení

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d(d-2)}\int\limits_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\frac{(d-2)}{|x-\xi|^d}\left((x-\xi\frac{|x|^2}{R^2})-(x-\xi)\right)\cdot\nu dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{\varkappa_d}\int\limits_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^d}\left(\frac{R^2-|x|^2}{R^2}\right)\xi\cdot\nu dS_\xi = \frac{1}{\varkappa_d}\int\limits_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\frac{R^2-|x|^2}{R|x-\xi|^d}dS_\xi.$$

Čímž jsme obdrželi předpis pro řešení Dirichletovy úlohy na kouli se středem v bodě nula a poloměrem R. Zbývá zformulovat větu o řešení Dirichletovy úlohy a ukázat, že nalezená funkce je skutečně řešením naší úlohy.

Věta 3.3.2 (Řešení Dirichletovy úlohy na kouli) *Buď $B_R(x_0)$ koule v $\mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathcal{C}(S_R(x_0))$. Definujme*

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{pro } x \in S_R(x_0)\,, \\ \dfrac{1}{\varkappa_d R}\displaystyle\int_{S_R(x_0)} \varphi(\xi)\,\frac{R^2-|x-x_0|^2}{|x-\xi|^d}\,dS_\xi & \text{pro } x \in B_R(x_0)\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(B_R(x_0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)})$ a řeší klasickou Dirichletovu úlohu na kouli $B_R(x_0)$. Navíc platí $\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$.

Důkaz. Poznámky: Normy $\|\cdot\|_\infty$ jsou supremové normy v prostoru příslušných spojitých funkcí. Integrál ve (3.7) se nazývá Poissonův integrál. Navíc platí, že klasické řešení Dirichletovy úlohy na kouli je určeno jednoznačně (označte w rozdíl dvou řešení a upravte $\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla w$ pomocí Greenovy věty). Z tvaru Poissonova integrálu rovněž vidíme, že platí implikace $\varphi\geq 0 \Rightarrow u\geq 0$. Doplnit podrobnosti, zejména nabývání O.P. $\square$

3.4 Věty o střední hodnotě

Věta 3.4.1 (Věta o střední hodnotě (o průměru)) *Buď $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ oblast, $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u=0$ v Ω. Potom pro každou kouli $B_r(x_0)$ takovou, že $\overline{B_r(x_0)}\subset\Omega$, platí*

$$u(x_0)=\frac{1}{\varkappa_d\, r^{d-1}}\int_{S_r(x_0)} u(\xi)\, dS_\xi\,. \tag{3.8}$$

Poznámka 3.4.2 Pokud $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, platí vztah (3.8) i pro koule, které se zevnitř dotýkají hranice Ω. (Je-li $B_R(x_0)$ taková koule, užijeme Větu 3.4.1 pro kouli $B_{R-\varepsilon}(x_0)$ a ve formuli (3.8) pak provedeme limitní přechod $\varepsilon\to 0+$.)

Důkaz Věty 3.4.1. Doplnit. $\square$

Následující věta je "obrácením" té předchozí.

Věta 3.4.3 (Obrácená věta o střední hodnotě) *Buď $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ oblast, $u\in\mathcal{C}(\Omega)$. Nechť vztah (3.8) platí pro všechna $x_0\in\Omega$ a $r>0$, taková, že $\overline{B_r(x_0)}\subset\Omega$. Potom $u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $\Delta u=0$ v Ω.*

Důkaz. Užitím regularizátorů a věty o třech potenciálech. Doplnit. $\square$

3.5 Princip maxima

Princip maxima je jednou z nejdůležitějších vlastností harmonických funkcí (a později uvidíme, že v jisté podobě i vlastností řešení širší třídy rovnic).

Věta 3.5.1 (Principy maxima) *Buď $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ omezená oblast, $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u=0$ na Ω. Potom*

1. *platí tzv. slabý princip maxima:*

$$\max_{\overline{\Omega}} u=\max_{\partial\Omega} u\,,\qquad \min_{\overline{\Omega}} u=\min_{\partial\Omega} u\,; \tag{3.9}$$

2. platí tzv. silný princip maxima:

$$\text{existuje-li lokální extrém } u \text{ uvnitř oblasti } \Omega, \text{ je } u \text{ konstantní na } \overline{\Omega}. \tag{3.10}$$

Poznámka 3.5.2 Důsledkem (3.9) je tvrzení

$$\min_{\partial\Omega} u \le u(x) \le \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \Omega\,, \tag{3.11}$$

zatímco důsledkem (3.10) je tvrzení

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \Omega\,. \tag{3.12}$$

Čtenář se může právem ptát, proč na tomto místě uvádíme oba principy maxima, když slabý je důsledkem silného. Vede nás k tomu skutečnost, že pro obecnější eliptické rovnice, jak později uvidíme, platí pouze jakási verze slabého principu maxima (viz Věta 3.5.6). Proto jsme považovali za rozumné zformulovat jej i v této chvíli.

Důkaz. Protože (3.9) plyne z (3.10), stačí ukázat toto tvrzení.

Zvolme $r > 0$ takové, že koule $\overline{B(x_0, r)}$ leží v Ω. V důsledku věty o průměru platí $u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d r^{d-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} u(\xi) dS_\xi$.

Jelikož také $u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d r^{d-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} u(x_0) dS_\xi$, dostáváme po odečtení

$$\int\limits_{S(x,r)} (u(x_0) - u(\xi)) dS_\xi = 0\,.$$

Funkce $u(x_0) - u(\xi)$ je na $S(x_0, r)$ nezáporná a spojitá, a proto $u(x_0) = u(\xi)$ pro $x \in S(x, r)$.

Nechť dále $0 < r_1 < r$. Zopakováním předešlé úvahy dostaneme, že i pro $|x_0 - \xi| = r_1$ je $u(\xi) = u(x_0)$, a tedy množina $M := \{\xi; u(\xi) = u(x_0)\} \subseteq \overline{\Omega}$ je otevřená v $\overline{\Omega}$. Jelikož u je spojitá, musí být M i uzavřená, a tudíž $M = \overline{\Omega}$. □

Cvičení 3.5.3 Omezenost oblasti v předchozí větě potřebujeme mimo jiné k tomu, aby existovala níže uvedená maxima a minima (uzávěr omezené oblasti je kompakt). Rozmyslete si, zda by věta platila i pro neomezené oblasti za dodatečného předpokladu, že existují konečná suprema a infima funkce u na $\overline{\Omega}$. Předpoklad existence konečného suprema a infima u na hranici $\partial\Omega$ evidentně nestačí: uvažte funkci $u(x, y) = y$ na horní polorovině. Návod: uvažujte funkce $U(x)$ a $-U(x)$ (viz (3.2)) na $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_1(0)}$.

V dalším se budeme zabývat zobecněním principu maxima pro širší třídu rovnic.

Definice 3.5.4 *Buďte $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $c(x) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast. Pro $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ definujme operátor $L : \mathcal{C}^2(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega)$ předpisem*

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^{d} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)\, u(x)\,. \tag{3.13}$$

Díky uvažovaným hladkostem můžme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega} \tag{3.14}$$

(rozmyslete si). Buď dále

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0 \quad \forall\, \xi \neq 0\,, \forall\, x \in \overline{\Omega}\,. \tag{3.15}$$

Pak nazvu operátor L eliptickým operátorem na Ω, a rovnici $Lu = f$, kde $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, eliptickou rovnicí na Ω.

Poznámka 3.5.5

- Pojem eliptičnosti rovnice ve výše uvedeném smyslu splývá s pojmem eliptičnosti, jak jsme jej uváděli v paragrafu o klasifikaci rovnic druhého řádu: matice $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{d}$ je symetrická a pozitivně definitní, tedy diagonalizovatelná, a navíc podobná jednotkové matici. Rozmyslete si podrobně.

- Existují různé varianty podmínek elipticity (3.15). Námi uvedená verze je poněkud nestandardní zjednodušujícím předpokladem, že (3.15) má platit na uzávěru Ω (většinou se požaduje splnění (3.15) pro $x \in \Omega$). Tento předpoklad již vlastně implikuje více: výraz
$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\xi_i}{\|\xi\|} \frac{\xi_j}{\|\xi\|}\,, \quad \xi \neq 0\,, \tag{3.16}$$
je kladný na kompaktní množině $(x, \eta) \in \overline{\Omega} \times S_1(0)$, $\eta_i = \xi_i / \|\xi\|$, proto na ní nabývá kladného minima $\alpha 0$. Tím jsme však dokázali, že
$$\exists\, \alpha > 0\,, \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > \alpha \|\xi\|^2 \quad \forall\, \xi \neq 0\,,\ x \in \overline{\Omega}\,, \tag{3.17}$$
tedy tzv. silnou [zkontroluj pojem, event. přidej další možné elipticity] elipticitu operátoru L.

Následující věta ukazuje zajímavou skutečnost, že chování maxim a minim řešení eliptické rovnice $Lu = f$ je ovlivněno nejvíce znaménkem funkcí $c(x)$ a $f(x)$ (Například nerovnost $Lu \geq 0$ lze chápat i takto: buď $f \geq 0$ a u takové, že $Lu = f$).

Věta 3.5.6 (Zobecněný slabý princip maxima) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Buď L eliptický operátor ve smyslu Definice 3.5.4. Potom platí:*

1. *Je-li* $c(x) \equiv 0$ *v* Ω, *pak*

$$Lu \geq 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u\,, \tag{3.18}$$

$$Lu \leq 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u\,, \tag{3.19}$$

$$Lu = 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}\,. \tag{3.20}$$

2. *Je-li* $c(x) \leq 0$ *v* Ω, *pak*

$$Lu \geq 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+\,, \tag{3.21}$$

$$Lu \leq 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-\,, \tag{3.22}$$

$$Lu = 0 \quad v\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|\,, \tag{3.23}$$

kde $u^+ := \max(u,0)$, $u^- := \min(u,0)$.

Poznámka 3.5.7 Užívá se i jiná definice pro u^-, rozmyslete si, že zde máme $u^- \leq 0$ a že v našem označení platí: $|u| = u^+ - u^-$, $u = u^+ + u^-$.

Tvrzení (3.22) lze zformulovat i takto: “Kladné maximum u nelze nabýt uvnitř Ω”, zatímco tvrzení (3.23) lze zformulovat i takto: “Záporné minimum u nelze nabýt uvnitř Ω.”

<u>*Důkaz*</u>. Buď $c(x) = 0, Lu \geq 0$. Chceme ukázat, že pro u platí slabý princip maxima.

Zvolme $j \in \{1,\dots,d\}$ pevně. Víme, že pro každé $\xi \in \mathbb{R}^d$ je $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0$ na $\overline{\Omega}$. Speciální volbou $\xi = (0,\dots,1,\dots,0)$ (volíme postupně všechny bázové vektroy), dostáváme $a_{jj} > 0$ pro $j = 1,\dots,d$. $\overline{\Omega}$ je kompaktní a tudíž existuje $\min\limits_{\overline{\Omega}} a_{jj}(x) > 0$.

Funkce $b_j(x)$ jsou na $\overline{\Omega}$ omezené, z čehož je vidět, že existuje $\gamma > 0$, že pro každé $x \in \overline{\Omega}$ platí $\gamma^2 a_{jj} + \gamma b_j > 0$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Definujme $u_\varepsilon := u(x) + \varepsilon e^{\gamma x_j}$. Potom $Lu_\varepsilon(x) = Lu(x) + \varepsilon(\gamma^2 a_{jj}(x) + \gamma b_j(x))e^{\gamma x_j} > 0$, neboť $Lu \geq 0$ a $\gamma^2 a_{jj}(x) + \gamma b_j(x) > 0$. Nechť u_ε nabývá svého maxima uvnitř Ω v bodě x_0. Potom $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = 0$ pro $i = 1,\dots,d$ a matice druhých derivací $(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}{}_{i,j})_{i,j}$ je negativně semidefinitní. Ukážeme, že platí ($a_{ij}(x_0)$ jsou čísla!)

$$Lu_\varepsilon(x_0) = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0.$$

Nechť A, B jsou libovolné symetrické matice, A pozitivně a B negativně semidefinitní. Máme $\sum\limits_{i,j} a_{ij}b_{ij} = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij}b_{ji} = \sum\limits_i c_{ii}$, kde $C = AB$ je součin matic A a B. Snadno se ověří, že C je negativně semidefinitní a tedy pro každé i je $c_{ii} \leq 0$. Tedy $\sum\limits_{i,j} a_{ij}b_{ij} \leq 0$.

Tím jsme ukázali, že $Lu_\varepsilon(x_0) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \le 0$ (tady jsme konečně využili, že L je eliptický). To je však spor s tím, že $L_\varepsilon(x) > 0$, což jsme ukázali výš. Tedy maximum funkce u_ε nemůže ležet uvnitř Ω, $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon$.

Z definice u_ε je hned vidšt, že u_ε konverguje na $\overline{\Omega}$ stejnoměrně k u pro $\varepsilon \to 0$. Funkce "hodnota maxima dané funkce" jako zobrazení z prostoru spojitých funkcí na kompaktu s maximovou metrikou do $\mathbb{R}$ je spojité zobrazení,[2] a proto $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \to \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ a $\max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon \to \max\limits_{\partial\Omega} u$ pro $\varepsilon \to 0$. Jelikož $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon$, limitní přechod dá $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$. Ukázali jsme (3.18).

Vztah (3.19) se plyne z (3.18) přechodem k $-u$, (3.20) je důsledek (3.18) a (3.19).

Nechť dále $c(x) \le 0$ a $L_u \ge 0$. Označme $\Omega_+ := \Omega \cap \{u(x) > 0\}$. Jestliže $\Omega_+ = \emptyset$, platí (3.20) triviálně. Nechť $\Omega_+ \ne \emptyset$. Uvědomme si, že je to otevřená množina a pro $x \in \Omega_+$ platí

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = Lu - c(x)u(x) \ge 0,$$

neboť $Lu \ge 0$, $u > 0$ a $c \le 0$ na Ω_+. Označme levou stranu poslední rovnosti $L'u$. L' je eliptický operátor, $L'u \ge 0$ na omezené oblasti Ω_+ a proto podle (3.18) je $\max\limits_{\overline{\Omega}_+} u = \max\limits_{\partial\Omega_+} u$. Tedy jestliže $\Omega_+ \ne \emptyset$, platí dokonce slabý princip maxima. Jestliže $\Omega_+ = \emptyset$, potom je $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \le 0 \le \max\limits_{\partial\Omega} u^+$.

Vztahy (3.22) a (3.23) jsou pak už snadným důsledkem. □

Příklad 3.5.8 Pro $c(x) \ge 0$ žádnou obdobu tvrzení (3.21)-(3.23) očekávat nelze. Uvažujme následující příklad. Buď $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x, y < \pi\}$ čtverec o straně π a uvažujme $u(x,y) := \sin x \sin y$. Potom $\Delta u + 2u = 0$ v Ω, $u = 0$ na $\partial\Omega$, a přitom $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$. Nepřítomnost principu maxima v tomto případě má za následek i nejednoznačnost řešení odpovídající Dirichletovy úlohy: stejné rovnici a stejným datům vyhovuje i funkce identicky nulová v Ω. Nemusí to však vždy být nevýhodou - diskuse o vlastních číslech a vlastních funkcích.

Na závěr tohoto paragrafu se budeme věnovat tzv. odstranitelné singularitě.

Následující lemma lze rovněž nazírat jako "princip maxima, pro funkce, harmonické s výjimkou jednoho bodu." Chování v okolí onoho bodu však musíme znát. Lemma využijeme v důkaze po něm následující věty.

Lemma 3.5.9 *Buď $g \in \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)} \setminus \{x_0\})$, $\Delta g = 0$ na $B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$. Buď navíc*

$$g(x) = \mathrm{o}(U(x - x_0)), \quad x \to x_0, \tag{3.24}$$

[2] Na rozdíl od funkce "Bod, ve kterém se maximum nabývá", rozmyslete si!

kde $U(x)$ je elementární řešení Laplaceovy rovnice (viz (3.2)). Potom platí implikace: $g \le 0$ na $S_R(x_0)$ $\Rightarrow$ $g \le 0$ na $\overline{B_R(x_0)} \setminus \{x_0\}$.

Důkaz. Vezměme pevné $z \in B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ a $\varepsilon > 0$, a najděme $r > 0$ takové, že $z \notin B_r(x_0)$ a zároveň (díky (3.24))

$$g(x) \le |g(x)| \le \varepsilon\, U(x - x_0) \quad \forall\, x \in \overline{B_r(x_0)}.$$

Pro funkci $h(x) := g(x) - \varepsilon U(x - x_0)$ tedy speciálně máme $h \le 0$ na $S_r(x_0)$. Z předpokladů lemmatu však také plyne $h \le 0$ na $S_R(x_0)$ a přitom $\Delta h = 0$ v mezikoulí $B_R(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$. Podle principu maxima (3.11) je tedy $h \le 0$ v onom mezikruží, speciálně v bodě z máme

$$g(z) \le \varepsilon U(z - x_0)\,.$$

Protože $\varepsilon > 0$ může být jakékoli, máme odtud $g(z) \le 0$, a protože bod $z \in B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ byl libovolný, je naše tvrzení dokázáno. □

Věta 3.5.10 (O odstranitelené singularitě) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $\Delta u = 0$ v $\Omega \setminus \{x_0\}$. Nechť navíc*

$$g(x) = \mathrm{o}(U(x - x_0))\,, \quad x \to x_0\,. \tag{3.25}$$

Potom existuje vlastní $\lim_{x \to x_0} u(x)$, a po dodefinování u v x_0 hodnotou této limity je $\Delta u = 0$ v Ω.

Důkaz. Volme $R > 0$ takové, aby $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Buď dále $v \in \mathcal{C}^2(B_R(x_0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)})$ taková, že $\Delta v = 0$ na $B_R(x_0)$ a $v = u$ na $S_R(x_0)$. Taková funkce v existuje: je definovaná Poissonovým integrálem z hodnot funkce u na $S_R(x_0)$. Protože v je omezená na $B_R(x_0)$, splňují funkce $g_1 := u - v$ i $g_2 := v - u$ předpoklady předchozího lemmatu. Proto je $u = v$ na $\overline{B_R(x_0)} \setminus \{x_0\}$ a funkce $\widetilde{u}$, definovaná předpisem

$$\widetilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{na } \overline{\Omega \setminus B_R(x_0)}\,, \\ \\ v(x) & \text{na } \overline{B_R(x_0)}\,, \end{cases}$$

je hledaným harmonickým rozšířením u na Ω. □

3.6 Věta Liouvilleova a věty Harnackovy

Z komplexní analýzy víme, že funkce, která je holomorfní a omezená v celém $\mathbb{C}$, je konstantní. Následující věta tvrdí něco podobného pro harmonické funkce v libovolné dimenzi.

Věta 3.6.1 (Liouville) *Buď $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ zdola (nebo shora) omezená na $\mathbb{R}^d$, $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^d$. Pak u je konstantní.*

Důkaz. Nechť u je například omezená zdola, $u \geq c$. Pak ovšem $u-c \geq 0$, $\Delta(u-c) = \Delta u$, a tedy bez újmy na obecnosti předpokládejme $u \geq 0$. Volme $x \in \mathbb{R}^d$ pevně, a ukažme $u(x) = u(0)$, tím bude důkaz proveden.

Volme $R > |x|$ a použijme na kouli $B_R(0)$ Poissonův vzorec (3.7):

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int_{S_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^d} \, dS_\xi \,.$$

Pro $\xi \in S_R(0)$ platí nerovnosti $R - |x| \leq |x - \xi| \leq R + |x|$ (x leží uvnitř koule, nakreslete si obrázek), které implikují

$$\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{d-1}} = \frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^d} \geq \frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^d} \geq \frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^d} = \frac{R-|x|}{(R+|x|)^{d-1}} \,.$$

Vynásobme tyto nerovnosti (kladným číslem) $u(\xi)/(\varkappa_d R)$ a integrujme dS_ξ přes $S_R(0)$:

$$\frac{1}{\varkappa_d R} \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{d-1}} \int_{S_R(0)} u(\xi) \, dS_\xi \geq u(x) \geq \frac{1}{\varkappa_d R} \frac{R-|x|}{(R+|x|)^{d-1}} \int_{S_R(0)} u(\xi) \, dS_\xi \,.$$

Oba krajní itegrály upravíme podle věty o průměru – viz (3.8):

$$u(0) \, \frac{R^{d-2} \, (R+|x|)}{(R-|x|)^{d-1}} \geq u(x) \geq u(0) \, \frac{R^{d-2} \, (R-|x|)}{(R+|x|)^{d-1}} \,. \tag{3.26}$$

Tyto nerovnosti platí pro všechna $R > |x|$, lze tedy v nich provést limitní přechod $R \to +\infty$, který dá $u(0) \geq u(x) \geq u(0)$, což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka 3.6.2
- Díky hladkosti u stačí předpokládat jednostrannou omezenost u vně nějaké koule. Důsledkem Liouvilleovy věty je například skutečnost, že pro nekonstantní $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, $\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^d$, nemůže existovat limita pro $|x| \to +\infty$.
- Nerovnosti (3.26) platí i pro harmonické funkce na omezených oblastech, obsahujících kouli $B_R(0)$. Podobného charakteru jsou i následující dvě tvrzení (připisovaná Harnackovi), která zde uvádíme pro ilustraci a bez důkazů. Ty je možno nalézt v …

  (i) Buď $u > 0$, $\Delta u = 0$ na $B_R(0)$. Potom pro všechna $0 < r < R$ a pro všechna $x, y \in B_r(0)$ platí $u(x) \leq u(y) \frac{R^2}{R^2-r^2} \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^d$.

  (ii) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $K \subset \Omega$ kompaktní. Pak existuje konstanta $c > 0$, že pro všechna $u > 0$, $\Delta u = 0$ na Ω a pro všechna x, $y \in K$ je $u(x) \leq c\, u(y)$.

V dalším se budeme zabývat studiem posloupností harmonických funkcí.

Věta 3.6.3 (První věta Harnackova) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $u_n \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u_n = 0$ v Ω. Pokud $u_n \rightrightarrows u_0$ na $\partial\Omega$, pak*

(i) *existuje* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ *v* Ω, $u = u_0$ *na* $\partial\Omega$*;*

(ii) $u_n \rightrightarrows u$ *v* $\overline{\Omega}$*;*

(iii) $u_n,\ u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$*, a pro všechny multiindexy* α *je* $D^\alpha u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} D^\alpha u$ *v* Ω*.*

[Tedy m.j.: stejnoměrná limita spojitých stop harmonických funkcí je stopou harmonické funkce.]

Důkaz. (i) Podle principu maxima je

$$\min_{\partial\Omega}(u_n - u_m) \leq u_n(x) - u_m(x) \leq \max_{\partial\Omega}(u_n - u_m) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}\,,$$

a tedy u_n je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Proto existuje $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, že $u_n \rightrightarrows u$ v $\overline{\Omega}$. Nutně je $u = u_0$ na $\partial\Omega$.

(ii) Pro všechna $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ a všechna n platí dle (3.8)

$$u_n(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d R^{d-1}} \int_{S_R(x_0)} u_n(\xi)\, dS_\xi\,.$$

Protože $u_n \rightrightarrows u$ na kompaktu $S_R(x_0)$, lze provést limitní přechod za integrálním znamením. Triviálně je také $u_n(x_0) \to u(x_0)$, a tedy pro všechna $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ dostáváme

$$u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d R^{d-1}} \int_{S_R(x_0)} u(\xi)\, dS_\xi\,.$$

Podle obrácené věty o střední hodnotě je tedy $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $\Delta u = 0$ v Ω.

(iii) Z vlastností u_n rovněž plyne $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Volme nyní kompakt $K \subset \Omega$. Pak je $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > h > 0$. Volme jako v důkaze obrácené věty o střední hodnotě regularizátor ω_h (s parametrem $h > 0$). Pak pro všechna $x \in K$ lze psát $u_n(x) = \int_\Omega u_n(\xi)\, \omega_h(|x - \xi|)\, d\xi$, $u(x) = \int_\Omega u(\xi)\, \omega_h(|x - \xi|)\, d\xi$ a tedy (rozmyslete si pečlivě derivování integrálu podle parametru):

$$D^\alpha u_n(x) = \int_\Omega u_n(\xi)\, D^\alpha \omega_h(|x - \xi|)\, d\xi\,, \qquad D^\alpha u(x) = \int_\Omega u(\xi)\, D^\alpha \omega_h(|x - \xi|)\, d\xi\,.$$

Hodnota integrálu $A := \int_{B_h(x)} \big|D^\alpha \omega_h(|x - \xi|)\big|\, d\xi$ závisí na α a h, ne však na $x \in K$. Dále: díky stejnoměrné konvergenci $u_n \rightrightarrows u$ existuje pro každé $\varepsilon > 0$ index n_0, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\sup_{\xi\in\Omega} \big|u_n(\xi) - u(\xi)\big| < \varepsilon/A$. Pak ovšem

$$\Big|D^\alpha u_n(x) - D^\alpha u(x)\Big| \leq \int_\Omega \big|u_n(\xi) - u(\xi)\big|\, \big|D^\alpha \omega_h(|x - \xi|)\big|\, d\xi < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon$$

stejnoměrně v $x \in K$, odkud plyne $D^\alpha u_n \rightrightarrows D^\alpha u$ v K, c.b.d. $\square$

Věta 3.6.4 (Druhá věta Harnackova) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ obecně neomezená oblast, $u_n \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u_n = 0$ v Ω. Pokud u_n je monotónní posloupnost funkcí a navíc existuje $x_0 \in \Omega$, že $u_n(x_0)$ konverguje, tak existuje $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ v Ω, že $u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} u$ v Ω.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že posloupnost u_n je neklesající. Volme $R > 0$ tak, aby $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ a dále volme $0 < r < R$. Ukážeme nejprve, že $u_n \rightrightarrows$ v $\overline{B_r(x_0)}$.

Buď $x \in \overline{B_r(x_0)}$. Z vyjádření hodnot $u_m(x)$, $u_n(x)$ Poissonovým integrálem (3.7) přes $B_R(x_0)$ (větší z obou koulí) plyne pro $m > n > n_0$:

$$0 \le u_m(x) - u_n(x) = \frac{1}{\varkappa_d} \int_{S_R(x_0)} \Big(u_m(\xi) - u_n(\xi)\Big) \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\,|x-\xi|^d}\, dS_\xi\,.$$

Protože $r < R$, máme $|x - \xi| \ge R - r > 0$, a tedy $\frac{R^2-|x-x_0|^2}{R\,|x-\xi|^d} \le \frac{R}{(R-r)^d}$, což v zápětí použijeme při odhadu předchozího integrálu. Vezměme ještě $\varepsilon > 0$ a najděme n_0, aby $u_m(x_0) - u_n(x_0) < \varepsilon$ pro $m > n \ge n_0$. Celkem máme:

$$\begin{aligned} 0 \le u_m(x) - u_n(x) &\le \frac{1}{\varkappa_d} \frac{R}{(R-r)^d} \int_{S_R(x_0)} \Big(u_m(\xi) - u_n(\xi)\Big)\, dS_\xi \\ &= \frac{R^{d-2}}{(R-r)^d} \Big(u_m(x_0) - u_n(x_0)\Big) \\ &\le c\,\varepsilon \qquad \text{pro } m > n \ge n_0\,. \end{aligned}$$

Na závěr jsme použili větu o průměru, tedy vztah (3.8). Konstanta $c = c(R, r, d)$ nezávisí na $x \in \overline{B_r(x_0)}$, a tedy posloupnost $u_n(x)$ je cauchyovská v $\mathcal{C}(\overline{B_r(x_0)})$. Odtud $u_n \rightrightarrows u$ na $\overline{B_r(x_0)}$. Stejně jako v předchozí větě lze ukázat, že $\Delta u = 0$.

Víme tedy, že posloupnost u_n konverguje stejnoměrně k harmonické funkci na každé kouli $B_r(x_0)$, která se i se svým uzávěrem vejde do Ω, přičemž x_0 je bodem konvergence posloupnosti $u_n(x_0)$. Odtud (pokrývacím argumentem) plyne, že $u_n \rightrightarrows u$ na každém kompaktu $K \subset \Omega$. Podrobnosti ponecháváme čtenáři. □

Než dokážeme další větu, připomeňme si slavnou větu Arzèla-Ascoliho ve verzi pro posloupnost funkcí (její důkaz najdete např. v [16]):

Věta 3.6.5 (Arzèla-Ascoli) *Buď $F \subset \mathcal{C}(K)$, kde K je kompaktní topologický prostor. Normu v $\mathcal{C}(K)$ označme $\|\cdot\|_\infty$. Nechť*

- *existuje $M > 0$, že $\|u_n\|_\infty \le M$ pro všechna $u_n \in F$ (tzv.* stejná omezenost fcí *u_n);*
- *$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, že $\forall\, u_n \in F$ a $\forall\, x, y \in K$ je $|x - y| < \delta \Rightarrow |u_n(x) - u_n(y)| \le \varepsilon$ (tzv.* stejná stejnoměrná spojitost fcí *u_n).*

Potom existuje podposloupnost $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ taková, že $u_{n_k} \rightrightarrows u$ na K.

Věta tedy tvrdí, že stejně omezená a stejně stejnoměrně spojitá posloupnost funkcí v $\mathcal{C}(K)$ je v tomto prostoru relativně kompaktní.

Věta 3.6.6 (Relativní kompaktnost harmonických funkcí) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast, $u_n \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u_n = 0$ v Ω. Pokud existuje $M > 0$, že $|u_n| \leq M$ stejnoměrně v Ω, tak existuje podposloupnost u_{n_k} a funkce $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ v Ω, že $u_{n_k} \overset{loc}{\rightrightarrows} u$ v Ω.*

Důkaz. Doplnit. □

Poznámka 3.6.7 Čtenář, znalý teorie Lebesgueova integrálu zná jistě tři nejdůležitější situace,ve kterých je možno uskutečnit limitní přechod za integrálním znamením: konverguje-li posloupnost funkcí stejnoměrně na množině konečné míry, nebo konverguje-li monotónně, nebo je-li stejnoměrně majorizována integrabilní funkcí. Všimněte si, že předchozí tři věty pojednávají o podobných situacích: stejnoměrná konvergence, monotónní konvergence, a situace, ve které je posloupnost funkcí stejnoměrně majorizována.

3.7 Řešení Dirichletovy úlohy Perronovou metodou

Věta 3.7.1 (O řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Potom existuje právě jedna funkce $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cup \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, že*

$$\Delta u = 0 \qquad v \quad \Omega\,, \tag{3.27}$$

$$u = \varphi \qquad na \quad \partial\Omega\,. \tag{3.28}$$

Pro tuto funkci navíc platí $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Poznámka 3.7.2

- Jednoznačnost už víme, je to důsledek obecného principu maxima. Pro jednoznačnost není potřeba žádná hladkost hranice, ta je potřeba pro existenci. V důkazu věty uvidíme, že je vlastně potřeba poněkud slabší vlastnost hranice (existence tzv. bariéry, kterou $\mathcal{C}^2$ hranice mají).

- Regularitu řešení Laplaceovy rovnice (tj. skutečnost, že $\Delta u = 0$ a $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ implikuje již $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$) jsme již také dokazovali (viz metodu regularizátorů v obrácené větě o střední hodnotě pro harmonické funkce).

- Důkaz věty povedeme tzv. metodou subharmonických a superharmonických funkcí, nazývanou též metoda harmonického zdvihu nebo Perronova metoda. Důkaz touto metodou lze nalézt například v [18]. Jinou možností je použít tzv. metodu potenciálů, viz například [10].

Zajímá nás existence a jednoznačnost řešení úlohy:

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 \quad \text{v } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi \end{aligned} \tag{3.29}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast a $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Řešení hledáme v $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
K důkazu příslušné věty bude třeba následujících definic, pozorování a tvrzení (převážně bez důkazu):

1. **Definice 3.7.3** *Řekneme, že oblast Ω má vlastnost (E) (existence) pokud:*

   $$\forall \xi \in \partial\Omega \quad \exists R > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R}^d : B_R(y) \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega \quad \wedge \quad \overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$$

   Poznámky:

   - $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2 \implies \Omega$ má vlastnost (E)
   - Ω je konvexní $\implies \Omega$ má vlastnost (E)
   - Nesplnění (E) byť v jednom bodě může dát neexistenci řešení.

2. **Definice 3.7.4** *Řekneme, že funkce $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je <u>subharmonická</u> v Ω pokud $\forall B$ koule, $\overline{B} \subset \Omega$:*

   $$\forall h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \triangle h = 0 \text{ v } B : v \leq h \text{ na } \partial B \implies v \leq h \text{ v } B \tag{3.30}$$

   Řekneme, že funkce $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je <u>superharmonická</u> v Ω pokud $\forall B$ koule, $\overline{B} \subset \Omega$:

   $$\forall h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \triangle h = 0 \text{ v } B : v \geq h \text{ na } \partial B \implies v \geq h \text{ v } B \tag{3.31}$$

3. $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ pak:

   $$v \text{ je subharmonická} \implies \triangle v \leq 0 \text{ v } \Omega \tag{3.32}$$
   $$v \text{ je superharmonická} \implies \triangle v \geq 0 \text{ v } \Omega \tag{3.33}$$

4. Důsledek: $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \wedge \triangle v = 0 \iff v$ je subharmonická i superharmonická
   .

5. Pro $W := \max(v_1, \ldots, v_n)$, $w := \min(v_1, \ldots, v_n)$, platí:

   $$v_1, \ldots, v_n \quad \text{jsou subharmonické} \implies W \quad \text{je subharmonická} \tag{3.34}$$
   $$v_1, \ldots, v_n \quad \text{jsou superharmonické} \implies w \quad \text{je superharmonická} \tag{3.35}$$

6. v_s je subharmonická v Ω, v^s je superharmonická v Ω a $v_s \leq v^s$ na $\partial\Omega \implies v_s \leq v^s$ v $\overline{\Omega}$.

7. **Definice 3.7.5** *Nechť v je subharmonická, B je koule, $\overline{B} \subset \Omega$. Dále nechť $\overline{v}$ je funkce na $\overline{B}$ daná Poissonovým integrálem z hodnot v na ∂B. (Pro $\overline{v}$ platí $\triangle \overline{v} = 0$ v B a $\overline{v} = v$ na ∂B.)*
   Pak funkci:
   $$V(x) := \begin{cases} v(x) & x \in \Omega \setminus B \\ \overline{v}(x) & x \in \overline{B} \end{cases}$$
   nazveme harmonickým zdvihem funkce v na Ω vzhledem k B.

   Pro V platí:

   - $\triangle V = 0$ v B ($\overset{4.}{\Longrightarrow}$ V je superharmonická v B) ...odtud "harmonický"
   - $v = V$ na ∂B $\overset{6.}{\Longrightarrow}$ $v \le V$ na $\overline{B}$ $\Longrightarrow$ $v \le V$ v Ω ...odtud "zdvih"
   - V je subharmonická v Ω

8. **Definice 3.7.6** *Řekneme, že $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je subřešení úlohy (3.29), jestliže:*

   - *v je subharmonická v Ω*
   - *$v \le \varphi$ na $\partial\Omega$*

   Řekneme, že $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je superřešení úlohy (3.29), jestliže:

   - *v je superharmonická v Ω*
   - *$v \ge \varphi$ na $\partial\Omega$*

9. Vždy existuje subřešení i superřešení úlohy (3.29). (např. $v \equiv \min_{\partial\Omega} \varphi$ je subřešení)

10. Pokud existuje u řešení úlohy (3.29), pak je to subřešení i superřešení.
    Z 6. pak plyne $v_s \le u \le v^s \quad \forall v_s$ subharmonická, v^s superharmonická.

Věta 3.7.7 *Buď Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^d$ mající vlastnost (E).*
Potom existuje právě jedno řešení $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ úlohy (3.29). Navíc $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Poznámky k důkazu:

1. Jednoznačnost plyne z principu maxima i bez vlastnosti (E).
2. $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \wedge \triangle u = 0 \implies u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ...viz. odstavec 3.2.
3. metody důkazu: Peronova (též metoda subřešení, metoda harmonického zdvihu) (lit. Renardy–Rogers) a metoda potenciálů (lit. John–Nečas)

<u>*Důkaz*</u>. Protože množina

$$A := \{v \text{ je subřešení úlohy (3.29); } \min_{\partial\Omega} \varphi \leq v \leq \max_{\partial\Omega} \varphi\}$$

je neprázdná (viz bod 9.), můžeme bodově definovat funkci

$$u(x) := \sup_{v \in A} v(x) \quad \forall x \in \Omega$$

o které dokážeme, že je řešením.

K tomu je třeba:

1. $$u \in \mathcal{C}^2(\Omega),\ \triangle u = 0 \text{ v } \Omega \qquad \text{(platí i bez (E))}$$

2. $$\text{(E)} \implies \forall \xi \in \partial\Omega : \lim_{x \in \Omega, x \to \xi} u(x) = \varphi(\xi)$$

ad 1. Nechť $x_0 \in \Omega$ je libovolné. Z definice u existuje $\{v_m\},\ v_m(x_0) \to u(x_0)$. Volme $R > 0$, aby $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, a označme V_m harmonický zdvih funkce v_m na Ω vzhledem k $B_R(x_0)$. Pro V_m platí:

1. $V_m \in A$
2. $v_m(x_0) \leq V_m(x_0) \leq u(x_0) \implies V_m(x_0) \to u(x_0)$
3. $\triangle V_m = 0$ na $B_R(x_0)$

Z 2. a 3. plyne podle Věty 3.6.4, že existuje vybraná posloupnost V_{m_k} tak, že

$$V_{m_k} \rightrightarrows v \text{ lokálně na } B_R(x_0)$$

Navíc o v víme, že $v \in \mathcal{C}^2(B_R(x_0))$ a $\triangle v = 0$ na $B_R(x_0)$. Dokážeme $v = u$ na $B_R(x_0)$. Z konstrukce v je zřejmě $v \leq u$. Pro důkaz opačné nerovnosti předpokládejme pro spor

$$\exists y \in B_R(x_0)\ \exists w \in A : v(y) < w(y) \leq u(y)\,. \tag{3.36}$$

Nyní položme $z_k := \max(w, V_k)$ a dále stejně jako při konstrukci v máme Z_k příslušné harmonické zdvihy a existuje vybraná Z_{k_j} a $Z_{k_j} \rightrightarrows z$ lokálně na $B_R(x_0)$. Nyní máme $v - z \leq 0$ a $\triangle(v - z) = 0$ na $B_R(x_0)$ a $(v - z)(x_0) = 0$ z čehož plyne, že $v - z$ nabývá v x_0 lokálního maxima. Podle principu maxima je $v - z \equiv 0$ na $B_R(x_0)$ a tedy $v(y) = z(y) \geq w(y)$ což je spor s (3.36).

ad 2. (Diskuse o hranici a nabývání dat)

Nechť $\forall \xi \in \partial\Omega \quad \exists w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$:

- $$\lim_{x\in\Omega, x\to\xi} w(x) = 0$$
- $w > 0$ na $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$
- w je superharmonická v Ω

potom funkci w nazveme bariérou. Z podmínky (E) plyne, že v každém bodě $\xi \in \partial\Omega$ existuje bariéra a to funkce:

$$w(x) := \begin{cases} \ln\frac{1}{R} - \ln\frac{1}{|x-y|} & \text{pro } d = 2\,, \\ \frac{1}{R^{d-2}} - \frac{1}{|x-y|^{d-2}} & \text{pro } d \geq 3\,, \end{cases}$$

kde y a R jsou střed a poloměr koule z podmínky (E). Nyní chceme dokázat, že pro libovolné pevné $\xi \in \partial\Omega$ platí:

$$\lim_{x\in\Omega, x\to\xi} u(x) = \varphi(\xi)$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ (ze spojitosti φ), aby

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \partial\Omega, |x - \xi| < \delta$$

Dále, protože w nabývá na $\overline{\Omega \setminus U_\delta(\xi)}$ kladného minima, existuje $K > 0$ tak, že

$$w(x) \geq \frac{2M}{K} \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, |x - \xi| \geq \delta$$

Nyní zavedeme $v_1(x) := \varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x)$. Tato funkce je superharmonická, a protože $v_1(x) \geq \varphi(\xi) + \varepsilon$ na $\partial\Omega$ je v_1 i superřešení. Podobně $v_2(x) := \varphi(\xi) - \varepsilon - Kw(x)$ je subřešení. Nyní máme $v_2(x) \leq u(x) \leq v_1(x)$ v Ω a odtud (jelikož $w(x) \xrightarrow{x\to\xi} 0$) plyne $|u(x) - \varphi(\xi)| \leq 2\varepsilon$. Tím je důkaz hotov. □

3.8 Harmonické funkce na vnějších oblastech

Budeme se nyní zabývat Dirichletovou úlohou pro Laplaceovu (resp. Laplace-Poissonovu) rovnici na některých neomezených oblastech. Oním "některých" budeme rozumět takzvané vnější oblasti, to jest takové, jejichž doplněk je sám uzávěrem nějaké (omezené) oblasti. Dále si povšimněme, že na takovýchto oblastech vyžadujeme, aby harmonická funkce splňovala kromě Laplaceovy rovnice ještě jakési limitní chování v nekonečnu.

Definice 3.8.1 (Harmonické funkce na vnější oblasti) *Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nazveme* vnější oblastí, *pokud existuje omezená oblast $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_1}$. Je-li Ω vnější oblast v $\mathbb{R}^d$, nazveme funkci $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonickou v Ω, pokud*

$$1) \quad \Delta u(x) = 0 \quad \textit{pro všechna } x \in \Omega; \tag{3.37}$$

$$2) \quad u(x) = \mathrm{O}(|x|^{2-d})\,, \quad |x| \to \infty. \tag{3.38}$$

Uvědomte si tento paradox: zatímco v dimenzích 3 a výše podmínka (3.38) říká, že harmonická funkce se “chová v nekonečnu jako elementární řešení Laplaceovy rovnice”, v dimenzi 2 toto tvrzení neplatí: (3.38) se tam redukuje na požadavek omezenosti v nekonečnu, zatímco elementární řešení $U(x) = -1/(2\pi)\ln|x|$ (srov. (3.2)) v nekonečnu logaritmicky klesá. Paradoxně tedy elementární řešení Laplaceovy rovnice není v dimenzi 2 harmonickou funkcí na žádné vnější oblasti. Jedním z odůvodnění této volby je například to, že ve třídě harmonických funkcí budeme v zápětí schopni ukázat (viz Věta 3.8.3) jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici.

Definice 3.8.2 (Dirichletova úloha na vnější oblasti) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ vnější oblast, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Funkci $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ nazvu klasickým řešením Dirichetovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici na Ω, pokud*

- $\Delta u = f$ *v* Ω;
- $u = \varphi$ *na* $\partial\Omega$;
- $u(x) = \mathrm{O}(|x|^{2-d})$, $|x| \to \infty$.

Věta 3.8.3 (Jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy na vnější oblasti) *Existuje nejvýše jedna funkce u, vyhovující Definici 3.8.2.*

Důkaz. Důkazy v dimenzi 2 a dimenzích větších než 2 jsou diametrálně odlišné. □

Existenčním důkazem se zde nebudeme zabývat. Zmíníme pouze jeden speciální případ, a sice Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici na vnějšku koule, neboť v tomto případě lze řešení stejně jako v případě vnitřku koule psát explicitně (srovnejte s Větou 3.3.2, resp. se vztahy (3.7)).

Věta 3.8.4 (Řešení Dirichletovy úlohy na vnějšku koule) *Buď $B_R(x_0)$ koule v $\mathbb{R}^d$, $\Omega := \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(x_0)}$, $\varphi \in \mathcal{C}(S_R(x_0))$. Definujme*

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{pro } x \in S_R(x_0)\,, \\ \dfrac{1}{\varkappa_d R}\displaystyle\int_{S_R(x_0)} \varphi(\xi)\,\frac{|x-x_0|^2 - R^2}{|x-\xi|^d}\,dS_\xi & \text{pro } |x| > R\,. \end{cases} \tag{3.39}$$

Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, je harmonická v Ω a je (jednoznačným) řešením klasické Dirichletovy úlohy na vnějšku koule $B_R(x_0)$.

Důkaz. Podobný důkaz jako pro vnitřek koule, s výjimkou klesání v nekonečnu a drobnou odlišností při důkazu nabývání hraničních dat. □

Poznámka 3.8.5 Pro chování derivací harmonické funkce u na libovolné vnější oblasti Ω platí:

$$D^\alpha u(x) = \mathrm{O}\big(|x|^{2-d-|\alpha|}\big)\,, \quad |x| \to \infty\,,$$

kde α je libovolný multiindex. Zkuste si to rozmyslet. Návod: vnější oblast Ω je doplňkem uzávěru omezené oblasti Ω_1. Zvolne $R > 0$, aby $\Omega_1 \subset B_R(0)$ a označme symbolem φ hodnoty, kterých u nabývá na $S_R(0)$. Z jednoznačnosti harmonického řešení Dirichletovy úlohy pro vnějšek koule plyne, že u je vně $B_R(0)$ vyjádřena integrálem (3.39). Dokončete úvahu.

Kapitola 4

Evoluční rovnice

Termín “evoluční rovnice” používáme pro parciální diferenciální rovnice, obsahující časovou derivaci,[1] nejčastěji pak rovnice rozřešené vzhledem k nejvyšší časové derivaci v nich obsažené. Zde se budeme zabývat dvěma význačnými představiteli takových rovnic: rovnicí vedení tepla jako reprezentantem třídy rovnic parabolických, a vlnovou (hyperblickou) rovnicí.

4.1 Rovnice vedení tepla

Definice 4.1.1 (Cauchyova úloha pro rovnici vedení tepla) *Buď* $\Omega = \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. *Řekneme, že* $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ *je klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla, pokud*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad \text{pro všechna } (x,t) \in Q_T\,, \tag{4.1}$$

$$u(\cdot,0) = \varphi \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{4.2}$$

a přitom $u \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(Q_T)$.

Definice 4.1.2 (Počátečně-okrajová úloha pro rovnici vedení tepla) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *omezená oblast,* $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$ *(tzv. časoprostorový válec),* $\Gamma := (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times \langle 0,T\rangle)$ *(tzv. parabolická hranice časoprostorového válce). Buď dále* $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$. *Řekneme, že* $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ *je klasickým řešením počátečně-okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla, pokud*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad \text{pro všechna } (x,t) \in Q_T\,, \tag{4.3}$$

$$u = \varphi \qquad \text{pro všechna } (x,t) \in \Gamma\,, \tag{4.4}$$

[1]Přítomnost času signalizuje evoluci; pokus o zavedení termínu “revoluční rovnice” nebyl podle autorových znalostí nikdy učiněn, i když některým dějinným epochám by to bylo podobné.

a přitom $u \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{Q_T} \setminus \Gamma)$.

Definice 4.1.3 (Greenova funkce pro rovnici vedení tepla) *Fundamentálním řešením (Greenovou funkcí) pro rovnici vedení tepla (RVT) nazvu funkci*

$$G(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0\,. \tag{4.5}$$

Poznámka 4.1.4 Greenovu funkci lze nalézt pomocí Fourierovy transformace jako řešení úlohy $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$, které ve smyslu distribucí splňuje $\lim_{t\to 0+} u(\cdot,t) = \delta$. Výpočet vyžaduje znalost chování Fourierovy transformace na prostoru temperovaných distribucí a zde jej zatím nebudeme provádět. Čtenář může konzultovat například [22] nebo [2].

Lemma 4.1.5 (Vlastnosti Greenovy funkce pro rovnici vedení tepla) *Funkce* G*, definovaná vztahem (4.5), splňuje* $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,+\infty))$*, a dále*

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0\,.$$

Ve smyslu distribucí navíc platí $\lim_{t\to 0+} G(\cdot,t) = \delta$*. Přitom v bodovém smyslu je*

$$\lim_{t\to 0+} G(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0\,, \\ +\infty & \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$$

O vlastnosti Greenovy funkce se opírá následující věta, která ukazuje, že jedno z řešení Cauchyovy úlohy (časem uvidíme, v jakém smyslu je takové řešení jednoznačné) lze pro vhodná data psát explicitně.

Věta 4.1.6 (Existence řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla) *Buď* $T > 0$, $Q_T = \mathbb{R}^d \times (0,T)$, $f \in \mathcal{C}^2(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ *omezené funkce. Nechť navíc jsou všechny prostorové derivace* f *až do řádu 2 včetně omezené na* Q_T*. Potom funkce* u*, definovaná předpisy* $u(x,0) := \varphi(x)$ *na* $\mathbb{R}^d$*, a*

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\,\varphi(y)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-\tau)\,f(y,\tau)\,dy\,d\tau \tag{4.6}$$

pro $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$*, je klasickým řešením Cauchyovy úlohy (4.1)–(4.2). Navíc platí, že*[2] $u \in \mathcal{C}_x^\infty(Q_T) \cap \mathcal{C}_t^2(Q_T)$*, a dále*

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{Q_T})} \le \|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} + T\,\|f\|_{\mathcal{C}(\overline{Q_T})}\,. \tag{4.7}$$

[2] Indexem u prostoru spojitých funkcí míníme to, že u derivujeme pouze podle x, resp. podle t.

<u>*Důkaz*</u>. Zavedeme označení

$$u_1(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)dy$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau)dyd\tau.$$

Tyto integrály upravíme substitucí $u = -\frac{x-y}{(4t)^{\frac{1}{2}}}$ s $dy = (4t)^{\frac{d}{2}}du$, resp. $u = -\frac{x-y}{(4(t-\tau))^{\frac{1}{2}}}$ s $dy = (4(t-\tau))^{\frac{1}{2}}du$, čímž dostaneme vyjádření

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} \varphi(x + 2u\sqrt{t})du\,,$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} f(x + 2u\sqrt{t-\tau}, \tau)dud\tau\,.$$

Jednu z výhod těchto úprav, a sice, že se závislost na čase přesunula ze jmenovatelů zlomků dodovnitř do funkcí φ resp. f, oceníme hned v následujícím kroku.

Krok 1: Odhady

Nejdříve provedeme odhady $\forall (x,t) \in Q_T$

$$|u_1(x,t)| \leq \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|u|^2} \varphi(x + 2u\sqrt{t}) \right| du \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}du = \|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}\,,$$

tudíž $\|u_1\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}$. Obdobně postupujeme v odhadu pro $u_2(x,t)$, jest

$$\begin{aligned} |u_2(x,t)| &\leq \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|u|^2} f(x + 2u\sqrt{t-\tau}, \tau) \right| dud\tau \\ &\leq \sup_{(y,\tau)\in Q_T} |f(y,\tau)| \int_0^t \left(\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}du \right) d\tau \\ &= \|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \int_0^t d\tau \leq t\,\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \leq T\,\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)}\,, \end{aligned}$$

odkud $\|u_2\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \leq T\,\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)}$. Protože $u(x,t)$ je součtem funkcí $u_1(x,t)$ a $u_2(x,t)$ na Q_T resp. je rovná $\varphi(x)$ pro $t = 0$, dostaneme použitím trojúhleníkové nerovnosti požadovaný odhad z věty.

Krok 2: Vlastnosti funkci u_1 a u_2

Dále se budeme zabývat funkcemi $u_1(x,t)$ a $u_2(x,t)$ odděleně. Budeme hojně využívat vět o spojitosti integrálu podle parametru a derivaci integrálu podle parametru. Můžeme si uvědomit, že snadné použití těchto vět bude důsledkem dodatečných předpokladů na funkce $f(x,t)$ a $\varphi(x)$ oproti původní formulaci Cauchyho úlohy v Definici (4.1.1).

Chtěli bychom ukázat, že funkce $u_1(x,t)$ řeší úlohu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 &= 0 \qquad \text{v } Q_T\,,\\ u_1(x,0) &= \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d\,,\end{aligned}$$

zatímco funkce $u_2(x,t)$ je řešením úlohy

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 &= f \qquad \text{v } Q_T\,,\\ u_2(x,0) &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d\,.\end{aligned}$$

V obou případech se počáteční podmínky nabývají ve smyslu limity. Díky linearitě rovnice vedení tepla pak bude součet funkcí u_1+u_2 řešením Cauchyho úlohy z Definice (4.1.1).

Krok 2a: Spojitost a nabývání okrajových podmínek pro u_1

Obraťme nyní svou pozornost na funkci $u_1(x,t)$. O její spojitosti v Q_T nelze pochybovat. Zde však požadujeme spojitost v $\overline{Q_T}$. Na hranici Q_T (tzn. v bodech $(x,0)$) je funkce $u(x,t)$ definována jako $\varphi(x)$. Je tedy třeba ukázat, že $\forall x_0 \in \mathbb{R}^d$ platí

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0+)\\(x,t)\in Q_T}} u_1(x,t) = \varphi(x_0),$$

aneb podle definice limity chceme ukázat, že vhodnou volbou okolí $\mathcal{U}_{x,t}(x_0,0)$ lze výraz $|u_2(x,t)-\varphi(x_0)|$ libovolně zmenšit. Uvědomíme si, že "velikost" okolí $\mathcal{U}_{x,t}$ je určena jeho "prostorovým" a "časovým" rozměrem. Začneme s odhady.

$$|u_1(x,t)-\varphi(x_0)| \le |u_1(x,t)-\varphi(x)| + |\varphi(x)-\varphi(x_0)|$$

Druhý sčítanec lze učinit menším než $\frac{\varepsilon}{3}$, pokud zvolíme dostatečně malý "prostorový" rozměr okolí $\mathcal{U}_{x,t}(x_0,0)$, neboť funkce $\varphi(x)$ je spojitá. Pro člen $|u_2(x,t)-\varphi(x)|$ máme

$$\begin{aligned}|u_1(x,t)-\varphi(x)| &= \left|\left(\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\varphi(x+2u\sqrt{t})du\right) - \varphi(x)\right|\\ &= \left|\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\Big(\varphi(x+2u\sqrt{t})-\varphi(x)\Big)\,du\right|,\end{aligned}$$

normu tohoto integrálu odhadneme shora integrálem z normy a ten rozepíšeme na

$$\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{|u|\ge R} e^{-|u|^2}\Big|\varphi(x+2u\sqrt{t})-\varphi(x)\Big|\,du + \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{|u|\le R} e^{-|u|^2}\Big|\varphi(x+2u\sqrt{t})-\varphi(x)\Big|\,du\,.$$

První z integrálů lze odhadnout $\frac{\varepsilon}{3}$ pokud zvolíme vhodné (rozuměj velké) R (neboť integrál přes celé $\mathbb{R}^d$ je konečný). Druhý integrál (zde již je u omezené) učiníme menším než $\frac{\varepsilon}{3}$ tak, že rozumně zvolíme poslední volný parametr – časový rozměr okolí $\mathcal{U}_{x,t}(x_0,0)$ – a využijeme stejnoměrné spojitosti φ.

Krok 2b: Funkce u_1 řeší rovnici, spojitost derivací

Dále bychom chtěli o $u_1(x,t)$ dokázat, že řeší rovnici vedení tepla s nulovou pravou stranou. Skutečně, použijeme–li větu o derivaci integrálu podle parametru, dostaneme

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial G(x-y,t)}{\partial t} - \Delta G(x-y,t) \right) \varphi(y) dy = 0,$$

neboť Greenova funkce je řešením rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou. Pokud jde o hladkost funkce $u_1(x,t)$, tak opět využijeme větu o derivaci integrálu podle parametru, čímž přeneseme veškeré derivování na Greenovu funkci, která je z $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,+\infty))$. Platí tedy $u_1 \in \mathcal{C}_x^\infty(Q_T) \cap \mathcal{C}_t^\infty(Q_T)$.

Krok 2c: Spojitost a nabývání okrajových podmínek pro u_2

O funkci $u_1(x,t)$ již víme vše, co jsme potřebovali, a proto se začneme zabývat funkcí $u_2(x,t)$. O spojitosti v Q_T nelze pochybovat, navíc lze dodefinovat $u_2(x,0) \equiv 0$. Tato funkce je evidentně spojitá v $\overline{Q_T}$, neboť

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0+)\\(x,t)\in Q_T}} u_2(x,t) = 0,$$

o čemž se lze přesvědčit z odhadu $|u_2(x,t)| \le t\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)}$, který jsme odvodili v Kroku 1.

Krok 2d: Funkce u_2 je řeší rovnici, spojitost derivací

Spojitost *prostorových* derivací funkce $u_2(x,t)$ je opět důsledkem věty o derivaci integrálu podle parametru, protože prostorové derivace přesuneme na Greenovu funkci, která má požadovanou nekonečnou hladkost. Je tedy $u_2 \in \mathcal{C}_x^\infty(Q_T)$. S časovými derivacemi je situace složitější. První časovou derivaci spočteme podle definice (bude se to hodit, až budeme dokazovat, že $u_2(x,t)$ řeší rovnici)

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) = \lim_{h\to 0} \frac{u_2(x,t+h) - u_2(x,t)}{h},$$

diferenční podíl rozepíšeme jako součet dvou členů, a sice $\frac{u_2(x,t+h)-u_2(x,t)}{h} = I_1 + I_2$,

$$I_1 = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} \frac{f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau},\tau) - f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)}{h} du d\tau$$

a

$$I_2 = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau},\tau) du \right)}_{\mathcal{F}(\tau)} d\tau.$$

Co lze udělat s prvním členem? V první členu jsme již zvolili zápis, který je připraven k použití Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Označme si $\Phi(\phi) := f(x + 2u\sqrt{(t+\phi)-\tau},\tau)$ funkci Φ na intervalu $\phi \in (0,h)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (je-li $\Phi(\phi)$ spojitá v uzavřeném intervalu $[0,h]$ a má spojitou derivaci v otevřeném intervalu $(0,h)$, pak existuje takové $\phi^* \in (0,h)$, že platí $\frac{\Phi(h)-\Phi(0)}{h} = \frac{d\Phi}{d\phi}(\phi^*)$), pak v našem případě dostaneme existenci $\phi^* \in (0,h)$ takového, že

$$\frac{f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau},\tau)-f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)}{h}$$
$$=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{(t+\phi^*)-\tau},\tau\right)\frac{u_i}{\sqrt{(t+\phi^*)-\tau}}.$$

V prvním členu nyní můžeme limitu pro $h\to 0$ (tudíž také $\phi^*\to 0$) zaměnit s integrálem, a dospějeme k výsledku pro I_1:

$$\lim_{h\to 0} I_1=\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{u_i}{\sqrt{t-\tau}}dud\tau$$

Při výpočtu členu I_2 použijeme první větu o střední hodnotě v integrálním počtu, která tvrdí, že je–li $\mathcal{F}$ spojitá na $[t,t+h]$, pak existuje takové $\tau^*\in(t,t+h)$, že platí

$$\int_t^{t+h}\mathcal{F}(\tau)d\tau=h\mathcal{F}(\tau^*),$$

Zápis I_2 byl opět zvolen tak, že použití věty je zřejmé. Provedeme–li limitu pro $h\to 0$ (tudíž také $\tau^*\to t$), dospějeme k výsledku pro I_2:

$$\lim_{h\to 0} I_2=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau^*},\tau^*)du=f(x,t)\,.$$

Celkem máme

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t)=\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{u_i}{\sqrt{t-\tau}}dud\tau+f(x,t)\,.$$

Chceme ověřit, že $u_2(x,t)$ řeší rovnici $\frac{\partial u_2}{\partial t}-\Delta u_2=f$, nezbyde nám proto nic jiného než spočíst Δu_2 a vyjádřit Δu_2 tak, aby to bylo srovnatelné s právě odvozeným vztahem pro $u_{2,t}$. Jest (opět derivujeme integrál podle parametru):

$$\Delta u_2(x,t)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2}(x,t)=\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)dud\tau\,.$$

Použijeme následující pozorování:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)=\frac{\partial}{\partial u_i}f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}$$

s jehož pomocí lze pokračovat

$$\Delta u_2(x,t)=\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\right)\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}dud\tau.$$

Nyní provedeme integraci per partes s derivací podle u_i (hraniční člen vymizí) a výsledkem bude

$$-\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^d \frac{\partial e^{-|u|^2}}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}dud\tau,$$

z čehož po provedení parciální derivace exponenciály plyne

$$\Delta u_2(x,t)=\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^d\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{t-\tau}\right)\frac{u_i}{\sqrt{t-\tau}}dud\tau.$$

Srovnáme-li tento vztah s dříve odvozeným vztahem pro $\partial u_2 - \partial t$, zjistíme, že skutečně platí $\frac{\partial u_2}{\partial t}-\Delta u_2=f$. □

Poznámka 4.1.7 Předpoklady na f lze zeslabit, pouhá spojitost však nestačí (podrobněji viz např. [10]). Hladkost u podle prostorových derivací je bez ohledu na hladkost f vždy nekonečná, hladkost u podle časových derivací je stejná, jako hladkost f podle časových derivací (to plyne přímo z rovnice, když si z ní vypočítáme $\frac{\partial u}{\partial t}$ a máme již dokázáno, že $u\in\mathcal{C}_x^\infty(Q_T)$).

Jednoznačnost řešení Cauchyovy rovnice ve vhodné třídě řešení bude plynout z principu maxima. Ten dokážeme nejprve pro případ počátečně-okrajové úlohy, tedy pro omezenou oblast Ω. V našem rychlokurzu rovnicí vedení tepla zůstane otevřena otázka existence klasického řešení na omezené oblasti. Čtenáře můžeme ujistit, že klasická řešení existují, a odkázat jej na vhodnou literaturu.

Věta 4.1.8 (Slabý princip maxima pro počátečně-okrajovou úlohu) *Buď u klasické řešení úlohy (4.3)–(4.4), ve které klademe $f\equiv 0$. Potom u nabývá svého maxima a minima na parabolické hranici Γ.*

Důkaz. Studentské texování.

Označme $M=\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q_T}}u(x,t)$ a $m=\max\limits_{(x,t)\in\Gamma}u(x,t)$, buď (x_M,t_M) bod ve kterém se nabývá hodnoty M. Důkaz provedeme sporem, předpokládáme tedy, že platí $m<M$, neboli $(x_M,t_M)\notin\overline{Q_T}\setminus\Gamma$. Definujeme funkci

$$v(x,t):=u(x,t)+\frac{M-m}{2h^2}\|x-x_M\|^2,$$

kde $h=\operatorname{diam}Q_T$ je průměr (omezené množiny) Q_T. Pro tuto funkci pak platí:

- $v(x_M,t_M)=u(x_M,t_M)=M$
- $\forall(x,t)\in\Gamma:\ v(x,t)\le u(x,t)+\frac{M-m}{2}\le m+\frac{M-m}{2}<M,$

z čehož plyne, že funkce $v(x,t)$ nabývá svého maxima někde v $\overline{Q_T} \setminus \Gamma$, nechť je to v bodě (x_V, t_V). Protože tento bod je maximem hladké funkce $v(x,t)$, musí v tomto bodě být

- $\forall i = 1, \dots, d: \ \frac{\partial^2 v}{\partial {x_i}^2}(x_V, t_V) \leq 0$
- $\frac{\partial v}{\partial t}(x_V, t_V) = 0$ pokud je $(x_V, t_V) \in Q_T$ resp. $\frac{\partial v}{\partial t}(x_V, t_V) \geq 0$ pokud $(x_V, t_V) \in \partial Q_T \setminus \Gamma$. Skutečně lze mluvit o hodnotách na $\partial Q_T \setminus \Gamma$, neboť $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{Q_T} \setminus \Gamma)$, viz Definice (4.1.2).

Odtud plyne, že
$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \right)(x_V, t_V) \geq 0.$$
Pokud ale počítáme přímo s definicí funkce $v(x,t)$ dostaneme (neboť $u(x,t)$ je řešením rovnice vedení tepla a $\Delta \|x - x_M\|^2 = 2d$)
$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \right)(x_V, t_V) = -d \frac{M - m}{h^2} < 0,$$
čímž jsme dospěli ke sporu. □

Důsledek 4.1.9 (Jednoznačnost počátečně-okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla) *Klasická úloha vedení tepla na omezené oblasti (4.3)–(4.4) má nejvýše jedno řešení.*

__*Důkaz*__. Pro rozdíl $w = u_1 - u_2$ dvou řešení (4.3)–(4.4) ukážeme pomocí Věty 4.1.8 snadno $w \equiv 0$. □

S využitím Věty 4.1.8 můžeme také ukázat princip maxima pro Cauchyovu úlohu.

Věta 4.1.10 (Slabý princip maxima pro Cauchyovu úlohu) *Buď u klasické řešení úlohy (4.1)–(4.2), ve které klademe $f \equiv 0$. Jsou-li navíc funkce u a φ omezené (na $\overline{Q_T}$ resp. $\mathbb{R}^d$), pak*
$$\inf_{\mathbb{R}^d} \varphi \leq u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^d} \varphi \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d\,,\ t \geq 0\,. \tag{4.8}$$

__*Důkaz*__. S využitím Věty 4.1.8. Důkaz zatím chybí, doplnit. □

Důsledek 4.1.11 (Jednoznačnost Cauchyovy úlohy pro RVT) *Klasická Cauchyova úloha vedení tepla na omezené oblasti (4.1)–(4.2) má ve třídě omezených řešení nejvýše jedno řešení. Toto řešení je pak nutně dáno vzorcem (4.6).*

Poznámka 4.1.12 Existují neomezená řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla, která vykazují růst $|u(x,t)| \approx c_1 \exp(c_2 x^{2+\epsilon})$, pro která neplatí princip maxima, a tedy nelze v této třídě řešení také zaručit jednoznačnost. Lze však ukázat, že ve třídě klasických řešení, charakterizovaných růstovou podmínkou $|u(x,t)| \leq c_1 \exp(c_2 x^2)$ již princip maxima, a tedy i jednoznačnost řešení, platí.

4.2 Vlnová rovnice

Definice 4.2.1 (Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici) *Buď $\Omega = \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, φ_0, $\varphi_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Buď $c > 0$. Řekneme, že $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ je klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici, pokud*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0\,, \tag{4.9}$$

$$u(\cdot,0) = \varphi_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = \varphi_1(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{4.11}$$

a přitom $u \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$, u, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$.

Poznámka 4.2.2 V případě vlnové rovnice se budeme zabývat pouze Cauchyovou úlohou a nikoli úlohou na omezené množině Ω. Důvodem je skutečnost, že u hyperbolické rovnice je zadání okrajových podmínek na hranici Ω obtížné z důvodů, které se pokusíme v této poznámce objasnit:

V souladu s druhou kapitolou (viz § **??**) lze nalézt charakteristické směry rovnice (4.9) jako nenulové vektory $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, splňující $\xi_0^2 = c^2 \sum_{j=1}^d \xi_j^2$. Takové vektory existují, existují tedy i charakteristické plochy (charakteristiky) naší rovnice. Například v jedné prostorové dimenzi, a uvažujeme-li pro jednoduchost $c = 1$, prochází každým časoprostorovým bodem $[x_0, t_0]$, $t_0 \geq 0$, dvojice charakteristik, kterými jsou (polo)přímky o směrnicích $+1$ a -1. Informace o hodnotě počáteční podmínky φ_0 se šíří ve směru charakteristik, "šikmo oběma směry". Kdyby byla zadána úloha na omezeném prostorovém intervalu, ležel by každý bod boční strany časoprostorového válce zároveň na nějaké charakteristice, nesoucí informaci o počáteční podmínce. K bokům časoprostorového válce by tak "ve vlnách" (což samozřejmě souvisí s názvem rovnice) přicházely informace o hodnotách řešení na nižších časových hladinách a jiných místech prostoru. Proto by na bocích časoprostorového válce nebylo možno předepsat libovolnou okrajovou podmínku. Bylo by samozřejmě možné uvažovat o tom, jak matematicky podchytit dvě rozdílné fyzikální představy, a sice, že boční stěna přicházející vlnu "pohltí", nebo "odrazí", takové úvahy jdou však nad rámec této přednášky, ve které se tedy budeme zabývat pouze případem celého prostoru.

Rozmyslete si, že v obecném d-rozměrném případě jsou charakteristickými plochami kuželové plochy, a že daným časoprostorovým bodem $[x_0, t_0]$ procházejí (až na případ $t_0 = 0$) dvě takové, jedna "stojící na špičce", kterou je bod $[x_0, t_0]$ — ta je "otevřená směrem nahoru" ve směru časů $t > t_0$. Pokud je $t_0 > 0$, je onou druhou plochou omezená kuželová plocha, jejíž základna leží na časové hladině $t = 0$ a jejímž vrcholem je bod $[x_0, t_0]$.

V následujícím ukážeme, že Cauchyova úloha (4.9)–(4.11) má ve třídě dostatečně hladkých funkcí nejvýše jedno klasické řešení. Pro potřeby následující věty, která k tomuto výsledku bezprostředně vede, si uvědomme, že bez újmy na teoretické obecnosti[3] lze v (4.9) klást $c = 1$. Skutečně, po zavedení nové časové proměnné $t' = ct$ a nové funkce $\widetilde{f} = f/c^2$ přejde (4.9) v rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} - \Delta u = \widetilde{f}$.

Označme nyní pro $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$Z_r(x_0) := \{[x,t]\,;\ 0 < t < r\,,\ |x - x_0| < r - t\}\,. \tag{4.12}$$

Věta 4.2.3 *Nechť* $u \in \mathcal{C}^2(\overline{Z_r(x_0)})$ *splňuje v* $Z_r(x_0)$ *rovnici* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$. *Nechť dále* $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ *pro* $|x - x_0| \le r$. *Potom* $u \equiv 0$ *v* $\overline{Z_r(x_0)}$.

<u>*Důkaz*</u>. Zatím chybí. □

Důsledek 4.2.4 (Jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici) *Ve třídě* $\mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$ *má Cauchyova úloha (4.9)–(4.11) nejvýše jedno řešení.*

<u>*Důkaz*</u>. Jsou-li u_1, u_2 dvě taková řešení, položíme $w := u_1 - u_2$. Buď $[x,t] \in \mathbb{R}^d \times (0,T)$ libovolný bod. Pak existuje kužel $Z_r(x_0)$, jehož vrcholem je bod $[x,t]$. Podle předchozí Věty 4.2.3 $w \equiv 0$ v $\overline{Z_r(x_0)}$, speciálně tedy $w(x,t) = 0$, což jsme chtěli dokázat. □

Na závěr tohoto paragrafu, v jeho "existenční části", si uvedeme explicitní vzorce pro řešení Cauchyovy úlohy v dimenzích 1, 2 a 3, a naznačíme způsob, jakým se dají odvodit. Zájemce o přesnější odvození odkazujeme na [22] nebo [2].

Buď $c > 0$. Analogicky jako pro rovnici vedení tepla, najdeme i v případě vlnové rovnice její tzv. elementární řešení (Greenovu funkci) $E(x,t)$, splňující ve smyslu distribucí Cauchyovu úlohu (4.9)–(4.11), ve které klademe $f = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \delta$. Metodou Fourierovy transformace lze ukázat, že (až na konstanty, které souvisejí s konkrétní volbou konstant u transformace) pro Fourierovu transformaci $\widehat{E}(\xi,t)$ funkce $E(x,t)$ platí (transformace probíhá mezi proměnnými $x \mapsto \xi$):

$$\widehat{E}(\xi,t) = \frac{\sin(2\pi c|\xi|t)}{2\pi c|\xi|}\,.$$

Ukazuje se, že nalezení zpětné Fourierovy transformace této funkce je technický, ale proveditelný problém, jehož realizace je závislá na dimenzi prostoru. Po nalezení $E(x,t)$ pak lze ukázat, že řešení problému (4.9)–(4.11) je dáno formální konvolucí (obecně počítanou ve smyslu distribucí, index pod znamením konvoluce naznačuje, přes jaké proměnné konvoluci počítáme)

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(E \underset{x}{*} \varphi_0\Big) + (E \underset{x}{*} \varphi_1) + \Big(Y(t)\, E \underset{x,t}{*} f\Big) =: u_0 + u_1 + u_2\,, \tag{4.13}$$

[3] Později nás budou zajímat explicitní vzorce pro řešení, kde již, pro pohodlí jejich uživatelů, budeme uvažovat obecné $c > 0$.

srovnejte se vzorcem (4.6). Zde $Y(t)$ označuje Heavisideovu funkci v proměnné t, $Y(t) = 1$ pro $t \geq 0$, $Y(t) = 0$ pro $t < 0$.

Po dalších technických výpočtech lze odvodit explicitní tvar řešení $u(x,t)$ v závislosti na konkrétní dimenzi. Výsledky těchto výpočtů jsme shrnuli do Tabulky 4.1 — viz str. 45. Předpokládáme v ní, že funkce f, φ_0, φ_1 jsou spojité a takové, že uvedené integrály konvergují. Řešení u získáme vždy součtem jednotlivých jeho částí u_0, u_1, u_2, které odpovídají datům f, φ_0, φ_1. Obecné řešení úlohy (4.9)–(4.11) v jedné prostorové dimenzi je tedy například dáno známým d'Alembertovým vzorcem:

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0(x-ct)+\varphi_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau\,. \tag{4.14}$$

Pro $f \equiv 0$ lze tento vzorec snadno odvodit i elementárně: v jedné dimenzi řešíme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{4.15}$$

Zavedením nových souřadnic

$$\eta = \frac{x+ct}{2}\,, \qquad \xi = \frac{x-ct}{2}$$

přejde rovnice (4.15) v rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0\,,$$

jejíž obecné řešení je $u(\eta,\xi) = F(\xi) + G(\eta)$, kde F a G jsou libovolné dostatečně hladké funkce. V původních proměnných tedy dostáváme, že rovnici (4.15) vyhovuje každá funkce tvaru

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)\,,$$

kde F a G jsou libovolné dostatečně hladké funkce. S využitím počátečních podmínek odtud dostaneme (4.14) s $f = 0$. Čtenář se jistě nebude zlobit, když jej autor nechá tento oblíbený výpočet dokončit.

V následující tabulce uvádíme pro přehlednost řešení vlnové rovnice v různých dimenzích pro různé varianty zadání dat.

Tabulka 4.1: Řešení vlnové rovnice v různých dimenzích pro různá data.

Dimenze	Zadaná data	Řešení odpovídající datům
$d = 1$:	φ_0	$u_0(x,t) = \dfrac{\varphi_0(x-ct) + \varphi_0(x+ct)}{2}$
	φ_1	$u_1(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(y)\,dy$
	f	$u_2(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau$
$d = 2$:	φ_0	$u_0(x,t) = \dfrac{1}{2\pi c}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\lvert y\rvert \le ct} \dfrac{\varphi_0(x-y)}{\sqrt{c^2t^2 - y^2}}\,dy$
	φ_1	$u_1(x,t) = \dfrac{1}{2\pi c}\displaystyle\int_{\lvert y\rvert \le ct} \dfrac{\varphi_1(x-y)}{\sqrt{c^2t^2 - y^2}}\,dy$
	f	$u_2(x,t) = \dfrac{1}{2\pi c}\displaystyle\int_0^t \int_{\lvert y\rvert \le c\tau} \dfrac{f(x-y,t-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2 - y^2}}\,dy\,d\tau$
$d = 3$:	φ_0	$u_0(x,t) = \dfrac{1}{4\pi ct}\displaystyle\int_{S_{ct}(0)} \left(\dfrac{\varphi_0}{ct} + \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right)(x-y)\,dS_y$
	φ_1	$u_1(x,t) = \dfrac{1}{4\pi c^2 t}\displaystyle\int_{S_{ct}(0)} \varphi_1(x-y)\,dS_y$
	f	$u_2(x,t) = \dfrac{1}{4\pi c^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{f\left(x-y, t-\frac{\lvert y\rvert}{c}\right)}{\lvert y\rvert}\,dy$

Kapitola 5

Appendix

5.1 Fundamentální řešení RVT

V předcházející kapitole jsme ukázali užitečnost fundamentálního řešení Laplaceovy-Poissonovy rovnice. Ukážeme dva způsoby - metodu Fourierovy transformace a metodu škálování - odvození fundamentálního řešení rovnice vedení tepla.

5.1.1 Metoda Fourierovy transformace

V prostoru $S'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ hledáme řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta_{(x,t)} = \delta_x \otimes \delta_t \tag{5.1}$$

(indexy x a t je označena Diracova míra s nosičem v počátku v příslušných proměnných.) Předpokládejme, že distribuce u je funkcí proměnné t s hodnotami v $S'(\mathbb{R}^d)$. Označíme-li

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t) e^{-i(x,\xi)}\, dx, \tag{5.2}$$

řeší funkce $\hat{u}$ rovnici

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + |\xi|^2 \hat{u} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \delta_t. \tag{5.3}$$

V této rovnici je ξ parametr a řešení indukuje následující

Lemma 5.1.1 (Fundamentální řešení obyčejné rovnice) *Buďte $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$, z řešící rovnice*

$$z^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^{(i)} = 0, \tag{5.4}$$

splňující počáteční podmínky $z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-2)}(0) = 0$, $z^{(n-1)}(0) = 1$. Pak funkce u

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \le 0\,, \\ z(t) & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

je řešením rovnice

$$u^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{(i)} = \delta_x \, .$$

Důkaz. Důkaz plyne ihned z definice distributivní derivace. □

Použijeme-li lemma, dostáváme, že

$$\hat{u}(\xi, t) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-|\xi|^2 t} & \text{pro } t > 0\, , \\ 0 & \text{pro } t \leq 0\, . \end{cases} \tag{5.5}$$

Zpětnou Fourierovou transformací spočítáme

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{pro } t > 0\, , \\ 0 & \text{pro } t \leq 0\, . \end{cases} \tag{5.6}$$

Cvičení 5.1.2 *Zformulujte a dokažte obdobné tvrzení pro fundamentální řešení s nosičem v intervalu* $(-\infty, 0]$.

5.1.2 Metoda škálování

Snadno zjistíme, že je-li funkce u řešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0\, , \tag{5.7}$$

pak i funkce

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^2 t) \tag{5.8}$$

řeší RVT pro jakékoliv pevné kladné λ. Předpokládejme, že $u = 0$ pro $t < 0$. Zvolíme-li (pro kladné t) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$, hledáme funkci v, která závisí pouze na proměnné $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$ tak, že

$$G(x, t) = \frac{1}{t^{\alpha/2}} u(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1) = v(\frac{x}{\sqrt{t}}) \frac{1}{t^{\alpha/2}}\, . \tag{5.9}$$

Laplaceův operátor je invariantní vzhledem k otočení soustavy souřadné v $\mathbb{R}^d$, zkusme tedy najít i řešení, které závisí pouze na vzdálenosti od počátku v $\mathbb{R}^d$. Označme

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{t}} \in (0, \infty) \tag{5.10}$$

a hledáme $w : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$G(x, t) = \frac{1}{t^{\alpha/2}} \cdot w(\frac{|x|}{\sqrt{t}}) \tag{5.11}$$

řešila RVT na poloprostoru $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$. Dostáváme

$$-\frac{1}{t^{\alpha/2+1}}\left(\frac{\alpha}{2}w(y) + \frac{1}{2}yw'(y) + \frac{d??-1}{y}w'(y) + w''(y)\right) = 0\,. \tag{5.12}$$

Zvolme $\alpha = d$. Pak lze rovnici upravit na tvar

$$\frac{1}{2}(y^d w)' + (y^{d-1}w')' = 0\,. \tag{5.13}$$

Odkud je

$$\frac{1}{2}y^d w + y^{d-1}w' = \text{konst} \tag{5.14}$$

na $(0, \infty)$.

Chceme-li, aby výsledné řešení bylo diferencovatelné na nadrovině $t = 0$ ve všech bodech $[x, 0]$ kromě $x = 0$, budeme požadovat, aby se $w(\frac{x}{\sqrt{t}})$ i $w'(\frac{x}{\sqrt{t}})$ dostatečně rychle blížily k nule pro $t \to 0_+$. Pak je konstanta v poslední rovnici nulová a dostáváme, že

$$w' = -\frac{1}{2}yw\,, \tag{5.15}$$

tj.

$$w(y) = C \cdot e^{\frac{-y^2}{4}}\,. \tag{5.16}$$

Dostáváme tak, že funkce

$$G(x,t) = \begin{cases} C \cdot \frac{1}{t^{d/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{pro } t > 0\,, \\ 0 & \text{pro } t < 0 \text{ a pro } t = 0, x \neq 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

řeší rovnici vedení tepla na $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{[0,0]\}$.

Lemma 5.1.3 *(Vlastnosti fundamentánlího řešení pro rovnici vedení tepla) Funkce G, definovaná vztahem (ODKAZ 4.5), je nekonečně diferencovatelná a nezáporná na $R^{d+1} \setminus \{[0,0]\}$ a platí*

1. *G řeší rovnici vedení tepla na $R^{d+1} \setminus \{[0,0]\}$*
2. *pro každé $t > 0$ je $\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\,dx = 1$*
3. $$\lim_{t \to 0_+} G(x,t) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x \neq 0\,, \\ \infty & \textit{pro } x = 0 \end{cases} \tag{5.18}$$
4. *ve smyslu distribucí platí*
$$\lim_{t \to 0_+} G(x,t) = \delta_x \tag{5.19}$$

<u>*Důkaz*</u>. Diferencovatelnost funkce G plyne ihned z vlastností exponenciální funkce.

1. je zřejmé pro $[x,t]$ s $t \leq 0$. Buď $t > 0$. Pak je

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(x,t) &= -\left(\tfrac{d}{2t} + \tfrac{|x|^2}{4t^2}\right)\tfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,, \\ \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,t) &= \left(\tfrac{x_i}{2t}\right)\tfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned} \tag{5.20}$$

a

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{5.21}$$

2. Použijeme-li substituce $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$, dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\,dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx = \frac{1}{\pi^{d/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|z|^2}\,dz \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^d} \cdot \prod_{j=0}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_j^2}\,dz_j = 1. \end{aligned} \tag{5.22}$$

3. Zřejmé z vlastností exponenciální funkce.

4. Buď $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dokážeme, že

$$\lim_{t\to 0_+} \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\varphi(x)\,dx = \varphi(0). \tag{5.23}$$

Zvolme $\epsilon > 0$. Ze spojitosti funkce φ existují $\delta > 0$ takové, že pro $x \in \mathcal{B}(0,\delta)$ je $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \epsilon$. Označme $K = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$ a nalezněme $R > 0$ tak velké, aby

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{B}(0,R)} e^{-|z|^2}\,dz \quad < \quad \frac{\epsilon}{2K}\pi^{d/2}. \tag{5.24}$$

Pak z 2 plyne, že

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\varphi(x)\,dx &= \varphi(0) + \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx \\ &= \varphi(0) + \left(\int_{\mathcal{B}(0,\delta)} + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{B}(0,\delta)}\right) G(x,t)(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx \\ &= \varphi(0) + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Odhadneme

$$|I_1| \leq \int_{\mathcal{B}(0,\delta)} G(x,t)\,|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx < \epsilon \tag{5.25}$$

a

$$|I_2| \leq 2K \cdot \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{B}(0,\delta)} G(x,t)\,dx = \frac{2K}{\pi^{d/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{B}(0,\frac{\delta}{4t})} e^{-|z|^2}\,dz < \epsilon \tag{5.26}$$

pro všechna $t > 0$, pro něž $\frac{\delta}{4t} \geq R$, tj. $t \leq \frac{\delta}{4R}$.

□

Poznámka 5.1.4 *Povšimněme si, že v důkazu jsme využili pouze spojitost a omezenost funkce φ, rovnost 5.23 tedy platí pro jakoukoliv omezenou $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.*

5.2 Fourierova metoda pro řešení rovnice vedení tepla

5.2.1 Nulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

Mějme zadanou následující úlohu pro rovnici vedení tepla (rovnice s nulovou pravou stranou, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka):

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T) \\ \text{počáteční podmínka} & u(x, 0) = \varphi(x) & x \in [0, L] \\ \text{okrajová podmínka} & u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in [0, T] \end{array} \tag{5.27}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$.

Nyní si předvedeme, jakým způsobem lze najít obecnou formuli pro řešení takovéto úlohy. Zdůrazňujeme, že se (zatím) v žádném případě nesnažíme o *odvození*, tzn. nekontrolujeme správnost prováděných operací. Pouze se snažíme předvést úvahy, které nás k výsledné formuli mohou dovést.

Představme si nyní, že funkci $u(x, t)$ závislou na čase (t) i prostoru (x), lze zapsat jako součin dvou funkcí $X(x)$ a $T(t)$, z nichž každá je funkcí pouze jedné proměnné

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

dosadíme-li takto definovanou funkci do rovnice (5.27) dostaneme

$$X(x)\frac{dT(t)}{dt} - \kappa^2 T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} = 0,$$

což napíšeme takto:

$$\frac{1}{\kappa^2 T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

Nyní si prohlédneme obě strany rovnice. Levá strana je evidentně pouze funkcí proměnné t, zatímco pravá strana je závislá pouze na proměnné x. Rovnice má platit pro $x \in (0, L)$ a pro $t \in (0, T)$, čehož můžeme při zmíněných funkčních závislostech dosáhnout pouze tehdy, jsou-li obě strany rovnice rovné konstantě. Označme si tuto konstantu λ. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=\lambda \tag{5.28}$$

$$\frac{1}{\kappa^2T(t)}\frac{dT(t)}{dt}=\lambda \tag{5.29}$$

Uvědomíme si, že k obyčejné diferenciální rovnici (5.28) máme z zadání (5.27) i okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(L) = 0$ (odpovídá $u(0,t) = 0$ a $u(L,t) = 0$). To je dost informací na to, abychom našli řešení rovnice (5.28). Pro pořádek si novou úlohu zformulujeme: hledáme řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda X(x), \tag{5.30}$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} X(0)&=0 \\ X(L)&=0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Řešení této rovnice se bude principiálně lišit podle znaménka konstanty λ:

- je-li $\lambda > 0$, pak je řešením rovnice (5.30) funkce

  $$X(x) = c_1e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2e^{-x\sqrt{\lambda}},$$

  kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek (5.31). Je zřejmé, že okrajové podmínky můžeme splnit pouze volbou $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, tzn. $X(x) \equiv 0$. Tento výsledek je pro řešení původní úlohy (5.27) nezajímavý.

- je-li $\lambda = 0$, pak je řešením rovnice (5.30) funkce

  $$X(x) = c_1x + c_2,$$

  kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek (5.31). Je zřejmé, že okrajové podmínky můžeme opět splnit pouze volbou $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, tzn. $X(x) \equiv 0$. Tento výsledek je pro řešení původní úlohy (5.27) nezajímavý.

- je-li $\lambda < 0$, pak je řešením rovnice (5.30) funkce

  $$X(x) = c_1e^{ix\sqrt{|\lambda|}} + c_2e^{-ix\sqrt{|\lambda|}},$$

  resp. (pro naše účely vhodnější zápis)

  $$X(x) = c_1\sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) + c_2\cos\left(x\sqrt{|\lambda|}\right)$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek (5.31). Má platit

$$X(0) = 0 \to c_2 = 0$$
$$X(L) = 0 \to c_1 \sin\left(L\sqrt{|\lambda|}\right) + c_2 \cos\left(L\sqrt{|\lambda|}\right) = 0$$

Opět máme triviální řešení $c_1 = 0,\ c_2 = 0$. Rovnice lze ale také splnit jinak. Okrajové podmínky budou splněny i v případě, že zaručíme $\sin\left(L\sqrt{|\lambda|}\right) = 0$, pak může být c_1 nenulové a budeme mít netriviální řešení. Hledáme tedy takové λ záporné, aby platilo

$$\sin\left(L\sqrt{|\lambda|}\right) = 0, \text{ neboli } L\sqrt{|\lambda|} = n\pi,\ n \in \mathbf{N}$$

Bude-li konstanta λ ve tvaru

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{5.32}$$

pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ dostaneme netriviální řešení rovnice (5.30) s okrajovými podmínkami (5.31) ve tvaru

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \tag{5.33}$$

jinak: pro každé přirozené číslo n a libovolnou příslušnou konstantu c_n je funkce (5.33) řešením rovnice (5.30) s podmínkami (5.31).

Tímto jsme se vypořádali s rovnicí (5.28), stále nám zbývá rovnice (5.29). Nyní už máme kokrétní návrh jaká musí být konstanta λ, abychom dostali netriviální řešení v (5.28). Vyberme si tedy nějaké přirozené číslo n, najděme k němu příslušnou konstantu λ_n dle (5.32) a příslušnou funkci $X_n(x)$ dle (5.33). Vezmeme takto zvolené λ_n, dosadíme ho do rovnice (5.29) a dostaneme

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \lambda_n \kappa^2 T_n(t),$$

řešením této rovnice je funkce

$$T_n(t) = a_n e^{\lambda_n \kappa^2 t} = a_n e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t}, \tag{5.34}$$

kde a_n je konstanta.

Nyní spojíme všechny dílčí výsledky dohromady. Připomeneme si, že funkci $u(x,t)$, řešící rovnici (5.27) jsme hledali ve tvaru $u(x,t) = X(x)T(t)$. Na předchozích řádcích jsme našli funkce $u_n(x,t)$, které pro libovolné přirozené číslo n splňují rovnici a okrajovou podmínku (součin konstant c_n a a_n jsme označili c_n).

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(x) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \tag{5.35}$$

K úplnému řešení problému (5.27) je ještě třeba splnit počáteční podmínku. Představme si, že řešení celého problému můžeme napsat jako nekonečnou sumu funkcí $u_n(x,t)$, aneb

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),$$

takto navržená funkce nepochybně splňuje okrajové podmínky a možná ji lze derivovat člen po členu, tzn. řeší i rovnici. Zbývá vyřešit otázku nabývání počáteční podmínky. Chceme, aby platilo $u(x,0) = \varphi(x)$, aneb

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = \varphi(x), \text{ pro } x \in [0,L],$$

což neznamená nic jiného, než že koeficienty c_n je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady (možná, že se Fourierova řada chová dobře). Koeficient c_n tedy spočteme jako

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx \tag{5.36}$$

Shrňme si: v ideálním případě (naznačené kroky obstojí i při rigorózním postupu) je řešením problému (5.27) funkce

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t}\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \text{ kde } c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx \tag{5.37}$$

5.2.2 Nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\ \text{počáteční podmínka} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\ \text{okrajová podmínka} & u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0,T] \end{array} \tag{5.38}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, f funkce proměnných x a t.

Již umíme řešit rovnici s nulovou pravou stranou a nulovou okrajovou podmínkou (5.37). Předpokládejme nyní, že pravou stranu lze rozvést do sinové Fourierovy řady vůči prostorové proměnné, aneb

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \text{ kde } f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx$$

Řešení problému (5.38) budeme hledat metodou variace konstant, představíme si, že koeficienty c_n v rozvoji funkce $u(x,t)$ nejsou konstantní, ale jsou to funkce času

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

a dosadíme takto navrženou funkci do rovnice (5.38), opět derivujeme čistě formálně člen po členu ... Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{dc_n(t)}{dt} e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} - f_n(t) \right) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = 0,$$

což má platit pro každé $x \in (0,L)$ a $t \in (0,T)$. Pro každé n proto musí být splněna obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = f_n(t) e^{\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t},$$

jejímž řešením je

$$c_n(t) = c_n(0) + \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 \tau} d\tau$$

Dosadíme–li takto vypočtené koeficienty $c_n(t)$ do rozvoje funkce $u(x,t)$, bude výsledkem

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(0) + \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 \tau} d\tau \right) e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),$$

konstanty $c_n(0)$ určíme z počáteční podmínky úlohy (5.38). Chceme, aby platilo $u(x,0) = \varphi(x)$, aneb

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = \varphi(x)$$

což neznamená nic jiného, než že koeficienty $c_n(0)$ je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady.

Shrňme si: v ideálním případě (naznačené kroky obstojí i při rigorózním postupu) je řešením problému (5.38) funkce

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 t} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) + \left(\int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi\kappa}{L}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \tag{5.39}$$

kde

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) dx$$

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x,t) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) dx$$

5.2.3 Nulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nulová počáteční podmínka

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\ \text{počáteční podmínka} & u(x,0) = 0 & x \in [0,L] \\ \text{okrajová podmínka} & u(0,t) = l(t) & t \in [0,T] \\ & u(L,t) = p(t) & \end{array} \tag{5.40}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$.

S nenulovými okrajovými podmínkami se vypořádáme tak, že úlohu (5.40) převedeme na úlohu (5.38). Jak toho dosáhneme? Funkci $u(x,t)$ si představíme jako součet dvou funkcí

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t),$$

kde funkci $v(x,t)$ definujeme takto

$$v(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) l(t) + \frac{x}{L} p(t),$$

pak platí, že

$$\begin{aligned} v(0,t) &= l(t) \\ v(L,t) &= p(t) \end{aligned}$$

Funkce $v(x,t)$ tedy splňuje okrajové podmínky problému (5.40). Dosadíme–li rozepsanou funkci $u(x,t)$ do zadání rovnice (5.40), dostaneme

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

resp. po vypočtení pravé strany dle definice funkce $v(x,t)$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dl(t)}{dt} + \frac{x}{L} \frac{dp(t)}{dt}\right).$$

Nyní zformulujeme nový problém pro funkci $w(x,t)$:

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial w}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dl(t)}{dt} + \frac{x}{L} \frac{dp(t)}{dt}\right) & \\ & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) & \\ \text{počáteční podmínka} & w(x,0) = -v(x,0) = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) l(0) + \frac{x}{L} p(0)\right) & x \in [0,L] \\ \text{okrajová podmínka} & w(0,t) = 0 & t \in [0,T] \\ & w(L,t) = 0 & f \end{array} \tag{5.41}$$

Tento problém již dokážeme řešit (zadání viz. (5.38), řešení viz. (5.39)). Je–li $w(x,t)$ řešení právě definovaného problému, pak je $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ řešení původního problému (5.40), skutečně tato funce řeší rovnici a splňuje počáteční a okrajové podmínky.

5.2.4 Nenulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T) \\
\text{počáteční podmínka} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0, L] \\
\text{okrajová podmínka} & u(0,t) = l(t) & t \in [0, T] \\
 & u(L,t) = p(t) &
\end{array}
\tag{5.42}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, f funkce proměnných x a t.

Řešení problému převedeme na řešení již známých případů. Hledanou funkci $u(x,t)$ rozdělíme na dvě funkce, funkci $u_h(x,t)$, která zajistí splnění okrajových podmínek, a funkci $u_r(x,t)$, která zajistí splnění rovnice. Definujeme tedy rozklad $u(x,t) = u_h(x,t) + u_r(x,t)$ a příslušné problémy

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u_r}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T) \\
\text{počáteční podmínka} & u_r(x,0) = \varphi(x) & x \in [0, L] \\
\text{okrajová podmínka} & u_r(0,t) = 0 & t \in [0, T] \\
 & u_r(L,t) = 0 &
\end{array}
$$

Toto je problém, který již umíme řešit (zadání viz. (5.38), řešení viz. (5.39)).

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial u_h}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T) \\
\text{počáteční podmínka} & u_h(x,0) = 0 & x \in [0, L] \\
\text{okrajová podmínka} & u_h(0,t) = l(t) & t \in [0, T] \\
 & u_h(L,t) = p(t) &
\end{array}
$$

Tento problém jsme již také zkoumali (5.40).

Z linearity úlohy je zřejmé, že funkce $u(x,t)$, která je součtem funkcí $u_h(x,t)$ a $u_r(x,t)$ je řešením původní úlohy (5.42).

5.3 Fourierova metoda řešení vlnové rovnice

5.3.1 Nulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulové počáteční podmínky

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0, L)\,, t \in (0, T) \\
\text{počáteční podmínky} & u(x,0) = \varphi(x) & x \in [0, L] \\
 & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \\
\text{okrajové podmínky} & u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0, T]
\end{array}
\tag{5.43}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$.

Budeme postupovat stejným způsobem jako při řešení problému (5.27). Předpokládejme, že funkci $u(x,t)$ lze zapsat jako součin

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

dosadíme toto vyjádření funkce $u(x,t)$ do rovnice (5.43) a výsledkem je

$$X(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2} - c^2T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} = 0,$$

což napíšeme takto:

$$\frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

Levá strana rovnice je opět pouze funkcí t, pravá strana je závislá pouze na x. Aby rovnice měla řešení, musí se obě strany rovnat konstantě, kterou pojmenujeme λ. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda \tag{5.44}$$

$$\frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \lambda \tag{5.45}$$

K rovnici (5.44) máme navíc ze zadání (5.43) okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(L) = 0$ (odpovídá $u(0,t) = 0$ a $u(L,t) = 0$). Stejnou rovnici jsme již řešili v části věnované rovnici vedení tepla (5.28), a proto můžeme okamžitě použít známý výsledek (5.33): Rovnici (5.44) řeší každá funkce ve tvaru

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \tag{5.46}$$

kde n je libovolné přirozené číslo. Konstanta λ musí být zvolena jako

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{5.47}$$

Nyní k danému přirozenému číslu n nalezneme příslušnou funkci $X_n(x)$ a konstantu λ_n. S touto konstantou vyřešíme rovnici (5.45)

$$\frac{d^2T_n(t)}{dt^2} = \lambda_n c^2 T_n(t),$$

řešením je funkce

$$T_n(t) = g_n \sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n \cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right),$$

kde g_n a e_n jsou libovolné konstanty.

Spojíme oba částečné výsledky $X_n(x)$ a $T_n(t)$ v jeden a dostaneme funkci $u_n(x,t)$, která řeší rovnici v problému (5.43) a splňuje okrajové podmínky (přeznačili jsme konstanty)

$$u_n(x,t) = X_n(t)T_n(t) = \left(g_n \sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n \cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

Řešení celého problému budeme opět hledat jako nekonečný součet funkcí $u_n(x,t)$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)+e_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),$$

Dále předpokládejme, že funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ lze rozvést do sinové Fourierovy řady, neboli

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(x\tfrac{n\pi}{L}\right),\ \text{kde}\ \varphi_n=\tfrac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\left(x\tfrac{n\pi}{L}\right)dx$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(x\tfrac{n\pi}{L}\right),\ \text{kde}\ \psi_n=\tfrac{2}{L}\int_0^L\psi(x)\sin\left(x\tfrac{n\pi}{L}\right)dx$$

Splnění počátečních podmínek znamená (derivujeme člen po členu . . .)

$$u(x,0)=\varphi(x)\to\sum_{n=1}^{\infty}e_n\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\to\sum_{n=1}^{\infty}g_n\frac{n\pi c}{L}\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

musí tedy být

$$e_n=\varphi_n$$
$$g_n=\frac{L}{n\pi c}\psi_n$$

Shrňme si: v ideálním případě (naznačené kroky obstojí i při rigorózním postupu) je řešením problému (5.43) funkce

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)+e_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),\tag{5.48}$$

kde

$$e_n=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

$$g_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^L\psi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

5.3.2 Nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulové počáteční podmínky

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f & \text{pro } x\in(0,L)\,,t\in(0,T) \\ \text{počáteční podmínky} & u(x,0)=\varphi(x) & x\in[0,L] \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) & \\ \text{okrajové podmínky} & u(0,t)=u(L,t)=0 & t\in[0,T] \end{array}\tag{5.49}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, f funkce proměnných x a t.

Řešení problému najdeme metodou variace konstant. Předpokládejme nyní, že pravou stranu lze rozvést do sinové Fourierovy řady vůči prostorové proměnné, aneb

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \text{ kde } f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) dx$$

Víme, že řešení úlohy s nulovou pravou stranou je dáno vzorcem (5.48), představme si nyní, že konstanty g_n a e_n závisí na čase

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(t)\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n(t)\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),$$

Dosadíme navrženou funkci do rovnice a provedeme úvahy obvyklé při řešení obyčejných diferenciálních rovnic metodou variace konstant (opět derivujeme člen po členu)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{dg_n}{dt}\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + \frac{de_n}{dt}\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)}_{\text{požadujeme rovné nule}} + g_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) - e_n \sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\times$$
$$\times\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$$

pak dosazení do rovnice dává

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\left(\frac{dg_n}{dt}\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + \frac{de_n}{dt}\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right),$$

celkem tedy požadujeme

$$\begin{aligned}\frac{dg_n}{dt}\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + \frac{de_n}{dt}\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) &= 0\\ \frac{n\pi c}{L}\left(\frac{dg_n}{dt}\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + \frac{de_n}{dt}\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right) &= f_n\end{aligned}$$

odkud

$$\frac{dg_n}{dt} = \frac{L}{n\pi c} f_n \cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) \rightarrow g_n(t) = g_n(0) + \frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\cos\left(\tau\frac{n\pi c}{L}\right) d\tau$$

$$\frac{de_n}{dt} = -\frac{L}{n\pi c} f_n \sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) \rightarrow g_n(t) = e_n(0) - \frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\tau\frac{n\pi c}{L}\right) d\tau$$

kde $g_n(0)$ a $e_n(0)$ jsou konstanty. Získaný výsledek dosadíme zpět do vyjádření funkce $u(x,t)$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(& g_n(0)\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n(0)\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\Bigg)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \\
& + \left(\frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\cos\left(\tau\frac{n\pi c}{L}\right)\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)d\tau\right. \\
& \left. - \frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\tau\frac{n\pi c}{L}\right)\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)d\tau\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)
\end{aligned}
$$

což je po malé úpravě goniometrickým vzorcem

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(& g_n(0)\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right) + e_n(0)\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\Bigg)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \\
& + \left(\frac{L}{n\pi c}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left((t-\tau)\frac{n\pi c}{L}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)
\end{aligned}
\tag{5.50}
$$

konstanty $g_n(0)$ a $e_n(0)$ určíme z počátečních podmínek stejným způsobem jako v předcházejícím případě

$$
e_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)
$$

$$
g_n(0) = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \psi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)
$$

a koeficienty f_n jsou koeficienty rozvoje funkce $f(x,t)$ do sinové Fourierovy řady v prostorové proměnné

$$
f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)dx.
$$

5.3.3 Nulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nulové počáteční podmínky

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\
\text{počáteční podmínky} & u(x,0) = 0 & x \in [0,L] \\
 & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \\
\text{okrajové podmínky} & u(0,t) = l(t) & t \in [0,T] \\
 & u(L,t) = p(t) &
\end{array}
\tag{5.51}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$.

Problém převedeme na úlohu s nenulovou pravou stranou, nenulovými počátečními podmínkami a nulovými okrajovými podmínkami (5.49), kterou již umíme řešit (5.50). Stejně jako v případě rovnice vedení tepla (5.40) si funkci $u(x,t)$ rozdělíme na dvě funkce

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$$

a funkci $v(x,t)$ definujeme jako

$$v(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) l(t) + \frac{x}{L} P(t),$$

pak platí, že

$$\begin{aligned} v(0,t) &= l(t) \\ v(L,t) &= p(t) \end{aligned}$$

Funkce $v(x,t)$ tedy splňuje okrajové podmínky problému (5.51). Dosadíme–li rozepsanou funkci $u(x,t)$ do zadání rovnice (5.51), dostaneme

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

resp. po vypočtení pravé strany dle definice funkce $v(x,t)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{d^2 l(t)}{dt^2} + \frac{x}{L} \frac{dP^2(t)}{dt^2}\right).$$

Nyní zformulujeme nový problém pro funkci $w(x,t)$:

$$\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{d^2 l(t)}{dt^2} + \frac{x}{L} \frac{dp^2(t)}{dt^2}\right) & \\
& \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) & \\
\text{počáteční podmínky} & w(x,0) = -v(x,0) = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) l(0) + \frac{x}{L} p(0)\right) & x \in [0,L] \\
& \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = -\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = -\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dl}{dt}(0) + \frac{x}{L} \frac{dr}{dt}(0)\right) & \\
\text{okrajové podmínky} & u(0,t) = 0 & t \in [0,T] \\
& u(L,t) = 0 &
\end{array}$$

Tento problém již dokážeme řešit (zadání viz. (5.49), řešení viz. (5.50)). Je–li $w(x,t)$ řešení právě definovaného problému, pak je $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ řešení původního problému (5.40), skutečně tato funce řeší rovnici a splňuje počáteční a okrajové podmínky.

5.3.4 Nenulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nenulové počáteční podmínky

$$\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) & \\
\text{počáteční podmínky} & u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in [0,L] & \\
& \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \\
\text{okrajové podmínky} & u(0,t) = l(t) \qquad t \in [0,T] & \\
& u(L,t) = p(t) &
\end{array} \tag{5.52}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, f funkce proměnných x a t.

Řešení problému převedeme na řešení již známých případů. Hledanou funkci $u(x,t)$ rozdělíme na dvě funkce, funkci $u_h(x,t)$, která zajistí splnění okrajových podmínek, a funkci $u_r(x,t)$, která zajistí splnění rovnice. Definujeme tedy rozklad $u(x,t) = u_h(x,t) + u_r(x,t)$ a příslušné problémy

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} = f & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\
\text{počáteční podmínky} & u_r(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \\
& \frac{\partial u_r}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \\
\text{okrajové podmínky} & u_r(0,t) = 0 & t \in [0,T] \\
& u_r(L,t) = 0 &
\end{array}
$$

Řešení této úlohy bylo popsáno v předcházejících částech (zadání viz. (5.49), řešení viz. (5.50)).

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0,L)\,, t \in (0,T) \\
\text{počáteční podmínky} & u_h(x,0) = 0 & x \in [0,L] \\
& \frac{\partial u_h}{\partial t}(x,0) = 0 & \\
\text{okrajové podmínky} & u_r(0,t) = l(t) & t \in [0,T] \\
& u_r(L,t) = p(t) &
\end{array}
$$

Touto úlohou jsme se také zabývali viz. (5.51).

Z linearity úlohy je zřejmé, že funkce $u(x,t)$, která je součtem funkcí $u_h(x,t)$ a $u_r(x,t)$ je řešením původní úlohy (5.52).

5.4 Fourierova metoda řešení Laplaceovy rovnice

5.4.1 Dirichletova okrajová podmínka

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) \\
\text{okrajová podmínka} & u(x,0) = g(x) & x \in [0,a] \\
& u(x,b) = 0 & \\
& u(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\
& u(a,y) = 0 &
\end{array}
\tag{5.53}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$, $g(0) = 0$, $g(a) = 0$.

Jako obvykle si funkci $u(x,y)$ představíme jako součin dvou funkcí

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

a dosadíme takto navrženou funkci do rovnice (5.53), výsledkem je

$$Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0$$

což zapíšeme takto:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}$$

Levá strana je závislá pouze na proměnné x, pravá strana je závislá pouze na proměnné y, a rovnost má platit pro $[x, y] \in (0, a) \times (0, b)$, obě strany rovnice proto musí být rovné konstantě, označme ji tradičně λ. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda \tag{5.54}$$

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \lambda \tag{5.55}$$

K první obyčejné diferenciální rovnici (5.54) máme ze zadání (5.53) i okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(a) = 0$ ($u(0, y) = 0$ a $u(a, 0) = 0$). Řešení této úlohy jsme již podrobně diskutovali (5.30), použijeme proto známý výsledek (5.33): pro každé přirozené číslo n existuje netriviální řešení rovnice (5.54) splňující příslušné okrajové podmínky

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right),$$

kde c_n je libovolná konstanta. Pro dané n je nutné volit λ jako

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Nyní pro λ_n vyřešíme rovnici (5.55)

$$\frac{d^2Y_n(y)}{dy^2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y),$$

řešením je

$$Y_n(y) = g_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + e_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

resp. (pro naše účely vhodnější zápis)

$$Y_n(y) = g_n \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + e_n \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right),$$

kde g_n a e_n jsou libovolné konstanty.

Ze zadání plyne, že musí být $Y(b) = 0$ (viz. okrajová podmínka $u(x, b) = 0$), chceme proto, aby platilo

$$g_n \sinh\left(b\frac{n\pi}{a}\right) + e_n \cosh\left(b\frac{n\pi}{a}\right) = 0,$$

odkud

$$e_n = -g_n \tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right).$$

Celkem máme (přejmenovali jsme konstanty)

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = c_n\left(\sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) - \tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)\cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)$$

Řešení celého problému (5.53) budeme hledat jako nekonečný součet funkcí $u_n(x,y)$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$$

takto definovaná funkce nepochybně splňuje okrajové podmínky $u(x,b) = 0$, $u(0,y) = 0$ a $u(a,y) = 0$, zbývá zajisti platnost okrajové podmínky $u(x,0) = g(x)$. Předpokládejme, že funkci $g(x)$ lze rozvést do sinové Fourierovy řady

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \text{ kde } g_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx$$

Podmínka $u(x,0) = g(x)$ je pak vyjádřena rovnicí

$$u(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)\cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right),$$

odkud plyne vztah mezi konstantou c_n a koeficienty Fourierova rozvoje g_n

$$c_n = -\frac{g_n}{\tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)}$$

Shrňme si: v ideálním případě (naznačené kroky obstojí i při rigorózním postupu) je řešením problému (5.53) funkce

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) - \tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)\cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \tag{5.56}$$

kde

$$c_n = -\frac{1}{\tanh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)}\frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx$$

V případě, že máme zadaný problém

$$\begin{array}{ll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pro } [x,y] \in (0,a)\times(0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & u(x,0) = g_1(x)\; x \in [0,a] \\ & u(x,b) = g_2(x) \\ & u(0,y) = g_3(x)\; y \in [0,b] \\ & u(a,y) = g_4(x) \end{array} \tag{5.57}$$

Přirozeně předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$, a že jsou okrajové podmínky zadány smysluplně, tzn. platí $g_1(0) = g_3(0)$, $g_1(a) = g_4(0)$, ... Jinak: funkce definované na sousedních stranách obdélníku se rovnají ve společném vrcholu. Okrajovou podmínku budeme také pro zkrácení zapisovat $u(x,y)|_\partial((0,a)\times(0,b)) = g(x,t)$

Pokud máme řešit tuto úlohu, můžeme využít předchozího problému (5.53). Nejprve přičteme k funkci $g(x,y)$ vhodnou funkci $c(x,y)$ tak, aby hodnota rozdílu $g(x,y) - c(x,y)$ v rozích obdélníka byla nulová. Navíc lze vždy tuto funkci zvolit tak, že je lineární vůči proměnné x i y, například tímto způsobem

$$c(x,y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x,$$

proč tuto konstrukci provádíme bude zřejmé z dalšího.

Nyní si představíme, že funkci $u(x,t)$ lze rozepsat jako součet

$$u(x,t) = v(x,t) + c(x,t)$$

po dosazení takto definované funkce $u(x,t)$ do rovnice (5.57) máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Definujeme si nový problém pro funkci $v(x,y)$

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & v(x,0) = -c(x,0) + g_1(x) & x \in [0,a] \\ & v(x,b) = -c(x,b) + g_2(x) & \\ & v(0,y) = -c(0,y) + g_3(x) & y \in [0,b] \\ & v(a,y) = -c(a,y) + g_4(x) & \end{array} \tag{5.58}$$

Z linearity úlohy (5.57) je zřejmé, že pokud $v(x,t)$ řeší právě zadaný problém, pak funkce $u(x,y) = v(x,y) + c(x,y)$ řeší úlohu (5.57).

Zbývá tedy nalézt postup k řešení problému pro funkci $v(x,y)$. To je ale jednoduché. Funkci $v(x,y)$ si představíme jako součet čtyř funkcí

$$v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) + v_3(x,y) + v_4(x,y),$$

kde každá z funkcí $v_i(x,y)$ řeší problém typu (5.53), například problém pro $v_1(x,y)$ je

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) \\ \text{okrajová podmínka} & v_1(x,0) = -c(x,0) + g_1(x) & x \in [0,a] \\ & v_1(x,b) = 0 & \\ & v_1(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\ & v_1(a,y) = 0 & \end{array}$$

Pro $v_2(x,y)$ by okrajové podmínky byly

$$\begin{array}{lll} \text{okrajová podmínka} & v_2(x,0) = 0 & x \in [0,a] \\ & v_2(x,b) = -c(x,b) + g_2(x) & \\ & v_2(0,y) = 0 & y \in [0,b] \\ & v_2(a,y) = 0 & \end{array}$$

a obdobně pro zbývající dvě funkce. Právě zde využíváme nulovosti funkce $g(x,y) - c(x,y)$ v rozích obdélníku. Výše definovaná okrajová podmínka je právě díky konstrukci s funkcí $c(x,y)$ spojitá na hranici obdélníku.

Z linearity je opět zřejmé, že součet funkcí $v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) + v_3(x,y) + v_4(x,y)$ je řešením úlohy pro $v(x,y)$

5.4.2 Dirichletova okrajová podmínka, nenulová pravá strana

$$
\begin{array}{lll}
\text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \text{ pro } [x,y] \in (0,a) \times (0,b) & \\
\text{okrajová podmínka} & u(x,0) = 0 \quad x \in [0,a] & \\
 & u(x,b) = 0 & \\
 & u(0,y) = 0 \quad y \in [0,b] & \\
 & u(a,y) = 0 &
\end{array}
\tag{5.59}
$$

Přirozeně předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$, f funkce proměnných x a y.

Předpokládejme, že funkci $f(x,y)$ lze rozvést do sinové Fourierovy řady vůči proměnné x

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \text{ kde } f_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right) dx,$$

dále předpokládejme, že řešení $u(x,y)$ můžeme hledat ve tvaru

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)$$

Právě zavedená funkce zřejmě splňuje okrajové podmínky $u(0,y) = 0$ a $u(a,y) = 0$. Dosadíme–li takto definovanou funkci $u(x,t)$ do rovnice, dostaneme (derivujeme po členech)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 c_n(y)}{dy} - c_n(y)\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right),$$

odkud plyne požadavek

$$\frac{d^2 c_n}{dy} - c_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = f_n$$

Okrajové podmínky k této obyčejné diferenciální rovnici získáme z okrajových podmínek původního problému $u(x,0) = 0$ a $u(x,b) = 0$, požadujeme proto $c_n(0) = 0$ a $c_n(b) = 0$. Obyčejnou diferenciální rovnici vyřešíme metodou variace konstant, řešení homogenní rovnice je

$$c_n(y) = g_n \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + e_n \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)$$

variací konstant získáme rovnice

$$
\begin{aligned}
\frac{dg_n}{dy} \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + \frac{de_n}{dy} \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) &= 0 \\
\frac{n\pi}{a}\left(\frac{dg_n}{dy} \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + \frac{de_n}{dy} \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)\right) &= f_n
\end{aligned}
$$

odkud

$$\frac{dg_n}{dy} = \frac{a}{n\pi} f_n \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) \rightarrow g_n(y) = \gamma_n + \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(\chi)\cosh\left(\chi\frac{n\pi}{a}\right)d\chi$$

$$\frac{de_n}{dy} = -\frac{a}{n\pi} f_n \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) \rightarrow e_n(y) = \epsilon_n - \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(\chi)\sinh\left(\chi\frac{n\pi}{a}\right)d\chi$$

právě získané vyjádření "konstant" g_n a e_n dosadíme do homogenního řešení $c_n(y)$ a výsledkem je (použili jsme součtový vzorec pro hyperbolické funkce)

$$c_n(y) = \left(\gamma_n \sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right) + \epsilon_n \cosh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)\right) + \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(\chi)\sinh\left((y-\chi)\frac{n\pi}{a}\right)d\chi$$

Použitím okrajových podmínek $c_n(0) = 0$ a $c_n(b) = 0$ určíme konstanty γ_n a ϵ_n

$$c_n(0) = 0 \rightarrow \epsilon_n = 0$$

$$c_n(b) = 0 \rightarrow \gamma_n = -\frac{1}{\sinh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)}\frac{a}{n\pi}\int_0^b f_n(\chi)\sinh\left((y-\chi)\frac{n\pi}{a}\right)d\chi,$$

čímž jsme vyřešili obyčejnou diferenciální rovnici pro $c_n(y)$. Získané $c_n(y)$ dosadíme zpět do vyjádření funkce $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)$ a dostaneme řešení původního problému (5.59)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a}{n\pi}\frac{\sinh\left(y\frac{n\pi}{a}\right)}{\sinh\left(b\frac{n\pi}{a}\right)}\int_0^b f_n(\chi)\sinh\left((y-\chi)\frac{n\pi}{a}\right)d\chi + \frac{a}{n\pi}\int_0^y f_n(\chi)\sinh\left((y-\chi)\frac{n\pi}{a}\right)d\chi\right)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \tag{5.60}$$

kde

$$f_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx,$$

5.5 Závěr

Na závěr našeho přehledu na téma "Fourierova metoda pro řešení parciální diferenciálních rovnic" poznamenejme, že jsme zdaleka neřešili všechny typy úloh se kterými se můžeme setkat, vůbec jsme například neuvažovali Neumannovy okrajové podmínky. Nicméně věříme, že z předložených příkladů zřetelně vystupuje schéma použité metody a setká–li se čtenář s případem, který zde nebyl popsán, bude schopen sám, na základě právě nabytých zkušeností, tento problém vyřešit.

Literatura

[1] P. Čihák, J. Kopáček: *Příklady z matematiky pro fyziky V*. Skriptum MFF UK, Matfyzpress Praha, 2002.

[2] P. Čihák a kol.: *Matematická analýza pro fyziky V*. Skriptum MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2001.

[3] E. DiBenedetto: *Partial Differential Equations*. Birkhäuser, 1995.

[4] P. Doktor, O. John, J. Kopáček: *Příklady z matematické analýzy VI, parciální diferenciální rovnice*. Skriptum MFF UK, SPN, Praha, 1983.

[5] L. C. Evans: *Partial differential equations*. AMS, Providence, 1998.

[6] H. Gajewski, K. Gröger and K. Zacharias: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie–Verlag, Berlin, 1974 (německy).

[7] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, San Diego, 2000 (6. vydání).

[8] L. L. Helms: *Introduction to potential theory*. John Wiley & Sons, 1969.

[9] V. Jarník: *Integrální počet II*. Academia, Praha, 1984.

[10] O. John, J. Nečas: *Rovnice matematické fyziky*. Skriptum MFF UK, SPN, Praha, 1977.

[11] J. Král, I. Netuka, J. Veselý: *Teorie potenciálu II*. Skriptum MFF UK, SPN, Praha, 1972.

[12] J. Kurzweil: *Obyčejné diferenciální rovnice*. TKI, SNTL, Praha, 1978.

[13] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy*. Karolinum, Praha, 1998.

[14] J. Lukeš, J. Malý: *Míra a integrál*. Univerzita Karlova, Praha, 1993. V anglické verzi *Measure and Integral*, Matfyzpress, Praha, 1995.

[15] J. Mařík: Dirichletova úloha. *Časopis pro pěstování matematiky*, **82**, č. 3, 257–282 (1957).

[16] J. Milota, S. Fučík: *Matematická analýza II. Diferenciální počet funkcé více proměnných.* Skriptum MFF UK, SPN Praha, 1980 (2. vydání).

[17] K. Rektorys: *Přehled užité matematiky I,II*, 6. přepracované vydání. Prometheus, Praha, 1995.

[18] M. Renardy, R.C. Rogers: *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[19] L. Schwartz: *Matematické metody ve fyzice.* SNTL, Praha, 1972.

[20] A. N. Tichonov, A. A. Samarskij: *Uravnenija matematiceskoj fiziki.* Moskva, 1951.

[21] V. S. Vladimirov: *Obobščennyje funkcii v matematičeskou fizike.* Nauka, Moskva, 1976.

[22] V. S. Vladimirov: *Uravnenija matematiceskoj fiziki.* 4. přepracované a doplněné vydání, Nauka, Moskva, 1981.

[23] K. Yosida: *Functional Analysis.* Springer–Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.