Úvodní kurz z matematiky

Posloupnosti

Dalibor Šmíd

MFF UK

Posloupnost je v matematice soubor prvků nějaké množiny, který je lineárně uspořádán a prvky v něm se mohou opakovat.

Příklady:

- $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13)$ je sedmičlenná posloupnost prvků množiny přirozených čísel
- (Příliš, žluťoučký, kůň, úpěl, ďábelské, ódy) je šestičlenná posloupnost českých slov
- $((-1, 1), (0, 3), (\pi, e))$, je tříčlenná posloupnost dvoučlenných posloupností reálných čísel

Posloupnost může být i nekonečná, například $(2, 4, 8, 16, \ldots)$, což můžeme zapsat jako $(2^n)_{n=1}^{\infty}$, případně $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Obecnou posloupnost prvků nějaké množiny X indexovanou přirozenými čísly zapisujeme jako

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \equiv (a_n)_1^{\infty}, \text{ kde } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in X$$

Na takovou posloupnost se můžeme dívat jako na zobrazení $f : \mathbb{N} \to X$, které číslu n přiřazuje prvek a_n. Můžeme uvažovat i posloupnosti nekonečné na obě strany $(a_n)_{-\infty}^{\infty}$, které odpovídají zobrazením množiny $\mathbb{Z}$ všech celých čísel do množiny X. Podobným způsobem lze zapsat i konečné posloupnosti:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_N) \equiv (a_n)_{n=1}^{N}$$

odpovídá zobrazení $f : \{1, \ldots, N\} \to X,\ f(n) := a_n$.

V dalším budeme předpokládat, že $X = \mathbb{R}$. Na reálných číslech máme definovány operace sčítání, odčítání a násobení, pomocí nichž můžeme definovat analogické operace na posloupnostech:

$$\begin{aligned}
(a_n)_1^\infty + (b_n)_1^\infty &:= (a_n + b_n)_1^\infty \\
(a_n)_1^\infty - (b_n)_1^\infty &:= (a_n - b_n)_1^\infty \\
(a_n)_1^\infty (b_n)_1^\infty &:= (a_n b_n)_1^\infty \\
\lambda (a_n)_1^\infty &:= (\lambda a_n)_1^\infty,
\end{aligned}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Operace definované člen po členu jsou v souladu se standardním zavedením operací na reálných funkcích, např. pro $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$:

$$(f + g)(n) := f(n) + g(n)$$

Posloupnost lze zadat explicitně, tedy vlastně předpisem pro funkci f.

Příklady:

- $f(n) \equiv a_n := d(n-1) + c$ aritmetická posloupnost s diferencí d a prvním členem $a_1 = c$
- $f(n) \equiv a_n := bq^{n-1}$ geometrická posloupnost s kvocientem q a prvním členem $a_1 = b$
- $f(n) \equiv a_n := nq^n$ aritmeticko-geometrická posloupnost
- $f(n) \equiv a_n := \frac{1}{n}$ harmonická posloupnost
- $f(n) \equiv a_n := \binom{n+1}{2} \equiv \frac{(n+1)n}{2} = 1 + 2 + \ldots + n$ posloupnost součtů prvních n přirozených čísel

Posloupnost lze zadat také *rekurentně*, tedy vztahem udávajícím n-tý člen pomocí některých předchozích.

Příklady:

- $a_{n+1} := a_n + d$, $a_1 = c$ aritmetická posloupnost s diferencí d
- $a_{n+1} := a_n q$, $a_1 = b$ geometrická posloupnost s kvocientem q
- $a_{n+1} := a_n + (n+1)$, $a_1 = 1$ posloupnost součtů prvních n přirozených čísel
- $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$, Fibonacciho posloupnost
- $a_{n+1} := a_n + \frac{1}{n+1}$, $a_1 = 1$, posloupnost částečných součtů harmonické řady (tedy součtů prvních n členů harmonické posloupnosti)

Ve všech třech případech je předpis platný pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Limita posloupnosti $(a_n)_1^\infty$ je reálné číslo L takové, že libovolně malý interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ obsahuje pro určité N všechny členy posloupnosti s $n > N$. Zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Příklady:

- Aritmetická posloupnost má limitu, jen je-li diference $d = 0$ (tj. posloupnost je konstantní).
- Geometrická posloupnost má limitu 0, pokud je kvocient $q \in (-1, 1)$. Pro $q = 1$ je to opět konstantní posloupnost, pro ostatní q limitu nemá.
- Harmonická posloupnost má limitu 0, posloupnost částečných součtů harmonické řady limitu nemá.

Limita posloupnosti částečných součtů nekonečné řady se nazývá **součtem řady**. Základní příklad je geometrická řada s kvocientem $q \in (-1, 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} bq^{n-1} = \lim_{N\to\infty} b\frac{q^N - 1}{q - 1} = \frac{b}{1-q}$$

V druhé rovnosti jsme využili vztah

$$(1 + q + q^2 + \ldots + q^{N-1})(q-1) = q^N - 1,$$

který se dá ověřit roznásobením levé strany.

Vlastnosti limity, přesná definice, její rozšíření na nevlastní případ („$L = \infty$“), sčítání řad a další aplikace a zobecnění limity tvoří klíčový obsah matematické analýzy v prvním ročníku.

Vyjádřit rekurentně zadanou posloupnost explicitně může být velmi náročná úloha. Snazší je dokázat, že explicitní vzorec nalezený heuristicky skutečně dané rekurentní posloupnosti odpovídá. Je to jedno z klasických použití *matematické indukce*.

Příklad
Součet prvních n přirozených čísel je popsán rekurencí $a_{n+1} = a_n + (n+1)$, $a_1 = 1$. Z prvních pár součtů odhadneme, že $a_n = \binom{n+1}{2}$. Pro $n = 1$ vzorec s rekurencí souhlasí. Předpokládejme, že souhlasí pro $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$a_{n+1} = \binom{n+1}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \binom{n+2}{2}$$

Tedy vzorec je pravdivý i pro $n + 1$. Musí tudíž platit pro všechna přirozená čísla.

Hlavolam *Hanojské věže* spočívá v přesunutí disků navlečených na jedné ze tří tyček na jinou tyčku. Jedním tahem je možné vzít jen jeden disk a přesunout jej buď na prázdnou tyčku, nebo na věž z disků navlečenou na jiné tyčce, jejíž vrchní disk má větší průměr než disk, který přesouváme.

Označme h_n nejmenší počet tahů, který je potřeba k vyřešení hlavolamu pro n disků (na obrázku je $n = 9$). Jistě platí $h_1 = 1$.

Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ známe h_n. Máme-li hlavolam s $n+1$ disky, určitě někdy přesouváme největší z nich ze startovní na cílovou tyčku a předtím musíme přesunout zbylých n menších disků na tyčku „pomocnou“. Na to je potřeba optimálně h_n tahů, dalších h_n tahů je pak potřeba na přesunutí n disků z pomocné na cílovou tyčku. Celkem tedy

$$h_{n+1} = h_n + 1 + h_n = 2h_n + 1$$

Pro prvních pár n dá rekurence hodnoty $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$, což vypadá jako $h_n = 2^n - 1$. Dokážeme indukcí: $h_1 = 2^1 - 1 = 1$ platí a pokud pro $n \in \mathbb{N}$ předpokládáme $h_n = 2^n - 1$, pak

$$h_{n+1} = 2h_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Vzorec tedy platí i pro $n+1$ a tudíž musí platit pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Vyřešili jsme tedy úlohu tak, že jsme nejprve sestavili rekurentní vztah, pak jsme odhadli explicitní vzorec, a následně použili matematickou indukci pro důkaz, že vzorec rekurenci vyhovuje.