

Kombinatorika

Antonín Slavík

Úvodní kurz z matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha
21. září 2020

- 1 Kombinatorická pravidla součtu a součinu
- 2 Variace, permutace a kombinace bez opakování
- 3 Variace, permutace a kombinace s opakováním
- 4 Vlastnosti kombinačních čísel a Pascalův trojúhelník
- 5 Binomická věta

Počet uspořádaných k -tic, jejichž i -tý člen lze vybrat n_i způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Jestliže $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny, přičemž každé dvě jsou disjunktní, pak platí

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|.$$

Nechť je dána množina $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Počet uspořádaných k -tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v k -tici vyskytne nejvýše jednou, je roven

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1).$$

Nechť je dána množina $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Počet uspořádaných n -tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v n -tici vyskytne právě jednou, je roven

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!.$$

Nechť je dána množina $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Počet neuspořádaných k -tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v k -tici vyskytne nejvýše jednou, je roven

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Nechť je dána množina $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Počet uspořádaných k -tic sestavených z prvků A je roven n^k .

Nechť je dána množina $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Počet uspořádaných k -tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek a_i se v k -tici vyskytne k_i -krát (přičemž $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a $k_1 + \dots + k_n = k$), je roven

$$\frac{k!}{k_1! \dots k_n!}.$$

Nechť je dána množina $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Počet neuspořádaných k -tic sestavených z prvků A je roven

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

- Pro $n, k \in \mathbb{N}_0$ a $k \leq n$ platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- Pro $n, k \in \mathbb{N}$ a $k < n$ platí

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1 \end{array}$$

Binomická věta

Pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.\end{aligned}$$