1) Chceme maximalizovat zisk. Označme x počet vyrobených výrobků X a y počet vyrobených výrobků Y. Pak formulujeme úlohu

$$\max \quad \underbrace{500x}_{\text{zisk za X}} + \underbrace{750y}_{\text{zisk za Y}} - \underbrace{\frac{13}{60}\cdot 250x - \frac{20}{60}\cdot 50x}_{\text{ztráta za práci na X}} - \underbrace{\frac{19}{60}\cdot 250y - \frac{29}{60}\cdot 50y}_{\text{ztráta za práci na Y}}$$

za podmínek

$\frac{13}{60}x + \frac{19}{60}y \le 40$ → podmínka na čas práce na stroji

$\frac{20}{60}x + \frac{29}{60}y \le 35$ → podmínka na čas práce ruční

$x \ge 10$ → objednávka výrobku X

$x,y\in\mathbb{Z}_0^+ \quad \begin{cases} x,y \ge 0 \\ x,y \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$x,y \ge 0$ → podmínka nezáporného počtu výrobků

$x,y \in \mathbb{Z}$ → výrobky z logiky úlohy nelze dělit

lze upravit

$$\max \to x\left(500 - \frac{13}{6}\cdot 25 - \frac{1}{3}\cdot 50\right) + y\left(750 - \frac{19}{6}\cdot 25 - \frac{29}{60}\cdot 50\right)$$

2) $f(x,y) = x^2 + y^2 + e^{xy}$, $x,y\in\mathbb{R}$

Počítejme derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + y^2e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = yxe^{xy} + e^{xy} = e^{xy}(yx+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + xe^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + x^2e^{xy}$$

Pak zřejmě $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + y^2e^{xy} > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y} = 2 + x^2e^{xy} > 0$

Matice druhých derivací:

$$H = \begin{pmatrix} 2+y^2e^{xy} & e^{xy}(yx+1) \\ e^{xy}(yx+1) & 2+x^2e^{xy} \end{pmatrix}$$

$$\det H = (2+y^2e^{xy})(2+x^2e^{xy}) - e^{2xy}(yx+1)^2 =$$

$$= 4 + 2x^2e^{xy} + 2y^2e^{xy} + \cancel{y^2x^2e^{2xy}} - \cancel{e^{2xy}y^2x^2} - 2xye^{2xy} - e^{2xy}$$

→ z toho ale nejrychlejší člen limitně je e^{2xy}, který je záporný, tedy pro velké hodnoty x, y dostaneme zápornou hodnotu determinantu, tedy funkce není konvexní

Platí totiž pro $x=y$ pošleme-li $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} 4 + 2x^2e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} - 2x^2e^{2x^2} - e^{2x^2} = \lim_{x\to\infty} x^2e^{2x^2}\Big(\underbrace{\frac{4}{x^2e^{2x^2}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{e^{x^2}}}_{\to 0} - 2 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\Big) = -\infty$$

Tedy H není pozitivně semidefinitní na celém def. oboru → fce není konvexní.

3)

$\min \; 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4$

s.t. $2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1$

$-3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Napíšeme duální úlohu:

	x_1 ≥ 0	x_2 ≥ 0	x_3 ≥ 0	x_4 ≥ 0		
$y_1 \in \mathbb{R}$	2	1	1	−1	=	1
y_2 ~~y~~$\in \mathbb{R}$	−3	1	2	1	=	2
	≤	≤	≤	≤		max
	6	2	4	1	min	

Duální úloha $\max \; \boxed{y_1 + 2y_2}$

s.t. $2y_1 - 3y_2 \leq 6$

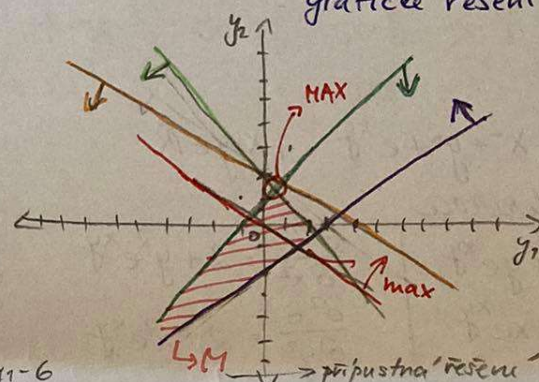
$y_1 + y_2 \leq 2$

$y_1 + 2y_2 \leq 4$

$-y_1 + y_2 \leq 1$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

grafické řešení:



$3y_2 = 2y_1 - 6$

1) $y_2 = \frac{2}{3}y_1 - 2$

2) $y_2 = 2 - y_1$

3) $2y_2 = 4 - y_1$

$y_2 = 2 - y_1 \cdot \frac{1}{2}$

4) $y_2 = 1 + y_1$

$2y_2 = c - y_1$

$y_2 = \frac{c}{2} - \frac{1}{2}y_1$

$2 - x = 1 + x$

$1 = 2x$

$\boxed{x = \frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}}$

$\shortparallel$ y_1 $\qquad$ $\shortparallel$ y_2

Tedy OPT. ŘEŠENÍ DUÁLNÍ ÚLOHY JE $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Z komplementarity:

$x_1(2y_1 - 3y_2 - 6) = 0 \longrightarrow x_1 = 0$

$x_2(y_1 + y_2 - 2) = 0$ ✓

$x_3(y_1 + 2y_2 - 4) = 0 \longrightarrow x_3 = 0$

$x_4(-y_1 + y_2 - 1) = 0$ ✓

$y_1(2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 1) = 0 \longrightarrow 2 \cdot 0 + x_2 + 0 - x_4 = 1$

$y_2(-3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2) = 0 \longrightarrow 0 + x_2 + 0 + x_4 = 2$

$2x_2 = 3$

$\boxed{x_2 = \frac{3}{2}} \longrightarrow \boxed{x_4 = \frac{1}{2}}$

Tedy opt. řešení původní úlohy je $(0, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ a opt. hodnota je $\frac{7}{2}$.

4) Farkas.

Přepíšeme úlohu do standard tvaru ($x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $\tilde{x}_3 = -x_3$, $x_5 = x_5^+ - x_5^-$ a do první a poslední nerovnosti přidám skluzovou proměnnou)

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- - \tilde{x}_3 \qquad + x_5^+ - x_5^- + z_1 \qquad &= 1\\
3x_1 - x_2^+ + x_2^- + 2\tilde{x}_3 + 3x_4 + 2x_5^+ - 2x_5^- \qquad &= 2\\
3x_2^+ - 3x_2^- - 2\tilde{x}_3 + x_4 + 4x_5^+ - 4x_5^- \qquad - z_2 &= 5\\
x_1, x_2^+, x_2^-, \tilde{x}_3, x_4, x_5^+, x_5^-, z_1, z_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

---

z toho máme pro Farkasovu větu

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & +2 & +3 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 4 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

Tedy z Farkasovy věty ex. řeš. $\iff \forall u ; A^T u \geq 0 \Rightarrow b^T u \geq 0$

Tedy

$$
\begin{aligned}
3u_1 + 3u_2 \qquad &\geq 0\\
2u_1 - u_2 + 3u_3 &= 0\\
-u_1 + 2u_2 - 2u_3 &\geq 0\\
3u_2 + u_3 &\geq 0\\
u_1 + 2u_2 + 4u_3 &= 0\\
u_1 \qquad &\geq 0\\
-u_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2u_1 - u_2 + 3u_3 &= 0\\
u_1 + 2u_2 + 4u_3 &= 0 \quad / \cdot (-2)\\
\hline
-5u_2 - 5u_3 &= 0\\
5u_2 &= -5u_3\\
u_2 &= -u_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2u_1 + u_3 + 3u_3 &= 0\\
2u_1 &= -4u_3\\
u_1 &= -2u_3
\end{aligned}
$$

Tedy řešení jsou tvaru protože $-u_3 \geq 0$

$(-2t, -t, t)$, $t \leq 0$, tedy

$(2t, t, -t)$, $t \geq 0$

→ zbylé nerovnosti pak platí ✓

~~→ z toho $b^T u = 6 \cdot 2t + 2t - 5t = 14t - 5t = 9t \geq 0$ ✓ pro každé u tž. $A^T u \geq 0$~~

~~tedy z Farkasovy věty existuje řešení původní soustavy~~.

→ z toho $b^T u = 1 \cdot 2t + 2 \cdot t - 5t = -t \leq 0$, tedy např. pro

$u = (2, 1, -1)$ je podmínka $A^T u \geq 0$ splněna, ale $b^T u = -1 \leq 0$, tedy

z Farkasovy věty neexistuje řešení dané soustavy.