Teorie svazů

Pavel Růžička

Texty k přednáškám

Zimní semestr 2018/2019
Letní semestr 2020/2021

Praha, 2021

Obsah

Kapitola 1. Definice svazu 1

Kapitola 2. Modulární svazy 5

Kapitola 3. Distributivní svazy 9

Kapitola 4. Varieta distributivních svazů 13

Kapitola 5. Konjuktivně disjunktivní termy 17

Kapitola 6. Vlastnosti modulárních svazů 25

Kapitola 7. Kongruence svazů 29

Kapitola 8. Hlavní kongruence, projektivita a slabá projektivita 35

Kapitola 9. Semimodulární svazy a dimenze 41

Kapitola 10. Problém slov ve volných svazech 47

Kapitola 11. Minimální term, variace volného svazu 53

Kapitola 12. Algebraické svazy 61

Kapitola 13. Subdirektní a redukovaný součin 69

Kapitola 14. Kongruenčně distributivní variety 75

Kapitola 15. Geometrické svazy 81

Literatura 89

KAPITOLA 1

Definice svazu

Shrnutí. Definujeme svaz jako algebru se dvěma komutativními a asociativními operacemi průseku a spojení, které jsou svázány axiomem absorpce. Ukážeme, že svazy odpovídají uspořádaným množinám se supremy a infimy neprázdných konečných podmnožim.

1.1. Infima a suprema. Buď A množina uspořádaná relací $\leq$. *Supremem* podmnožiny $X \subseteq A$ budeme rozumět nejmenší $s \in A$ takové, že $x \leq s$ pro všechna $x \in X$. Podobně *infimem* množiny X budeme rozumět největší $i \in A$ takové, že $i \leq x$ pro všechna $x \in X$. Supremum, resp. infimum množiny X budeme značit $\sup X$, resp. $\inf X$. Obecně nemusí suprema a infima konečných podmnožin uspořádané množiny existovat. Všimněme si ještě, že podle definice je supremum prázdné množiny největší prvek množiny A a podobně infimum prázdné množiny je největší prvek množiny A.

Lemma 1.1. *Buď A částečně uspořádaná množina. Nechť X a Y jsou její podmnožiny takové, že existují suprema $x := \sup X$ a $y := \sup Y$. Existuje-li $\sup\{x, y\}$, potom existuje také $\sup(X \cup Y)$ a platí rovnost*

$$\sup(X \cup Y) = \sup\{x, y\}.$$

Podobně pro infima.

Důkaz. Nechť $a \in X \cup Y$. Jestliže $a \in X$ tak $a \leq \sup X = x$, pokud $a \in Y$, tak $a \leq \sup Y = y$. Proto platí, že $a \leq \sup\{x, y\}$. Je-li $s \in A$ takové, že $a \leq s$ pro každé $a \in X \cup Y$, potom z definice suprema plyne, že $x, y \leq s$. Odtud dostaneme, že $\sup\{x, y\} \leq s$. Proto $\sup\{x, y\} = \sup(X \cup Y)$. □

Lemma 1.2. *Buď A částečně uspořádaná množina. Má-li každá dvouprvková podmnožina množiny A supremum (infimum), potom má každá neprázdná konečná podmnožina množiny A supremum (infimum).*

Důkaz. Předpokládejme, že má každá dvouprvková podmnožina množiny A supremum a ukažme, že každá neprázdná konečná podmnožina množiny A má supremum. Případ infima je analogický. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není. Buď n nejmenší přirozené číslo pro které existuje n-prvková podmnožina X, která nemá v A supremum. Množina X je alespoň dvouprvková, a proto je sjednocením svých neprázdných vlastních podmnožin M_1 a M_2. Množiny M_1 a M_2 mají méně než n prvků a proto mají podle indukčního předpokladu suprema. Protože existuje supremum každé dvouprvkové podmnožiny množiny A, existuje $\sup\{\sup M_1, \sup M_2\}$. Vzhledem k Lemmatu 1.1 je toto supremum rovno $\sup X$, což je ve sporu s volbou množiny X. □

1.2. Definice svazu. Buď A uspořádaná množina jejíž každá dvouprvková podmnožina má supremum a infimum. Na množině A definujme binární operace *spojení* , značíme "$\vee$", a *průseku*, značíme "$\wedge$", takto: $a \vee b = \sup\{a, b\}$ a $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Právě definované operace mají tyto vlastnosti:

Komutativita:
- $a \vee b = b \vee a$,
- $a \wedge b = b \wedge a$,

Asociativita:
- $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,

Absorpce: $a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b) = a$,

pro všechna $a, b, c \in A$.

Důkaz. Všechny vlastnosti plynou snadno z definic. Zcela zřejmá je komutativita. V případě spojení dostaneme s využitím Lemmatu 1.1, že

$$a \vee (b \vee c) = \sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{a, b, c\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\} = (a \vee b) \vee c.$$

Podobně postupujeme v případě průseku a tak ukážeme asociativitu. Zbývá absorpce. Podle definice máme $a \vee (a \wedge b) = \sup\{a, \inf\{a, b\}\}$. Protože $a \geq \inf\{a, b\}$, je $\sup\{a, \inf\{a, b\}\} = a$. Podobně $a \wedge (a \vee b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\}$ a protože $a \leq \sup\{a, b\}$, platí, že $\inf\{a, \sup\{a, b\}\} = a$. □

Definice. Množinu A spolu s komutativními a asociativními operacemi "$\vee$" a "$\wedge$" svázanými vlastností absorpce nazveme *svazem*.

Lemma 1.3. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Potom platí*

(i) $a = a \vee a = a \wedge a$,
(ii) $a = a \wedge b$ *právě když* $b = a \vee b$,

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Díky absorpci platí, že $a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee b)) = a$ a podobně $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a$. Odtud plyne (i).

Předpokládejme, že $a = a \wedge b$. Potom $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$. Poslední rovnost platí opět díky absorpci. Opačnou implikaci bodu (ii) dokážeme analogicky. □

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Na množině A definujme relaci "$\leq$" takto: $a \leq b$ právě když $a = a \wedge b$ (což je podle Lemma 1.3(ii) ekvivalentní rovnosti $b = a \vee b$).

Tvrzení 1.4. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Relace "$\leq$" indukovaná svazovými operacemi je uspořádáním množiny A. Přitom pro všechna $a, b \in A$ platí, že* $a \vee b = \sup\{a, b\}$ *a* $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. *Speciálně, každá neprázdná konečná podmnožina množiny A má supremum a infimum.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a = a \wedge b$ a zároveň $b = b \wedge c$, tj., že $a \leq b$ a zároveň $b \leq c$. Potom $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$, odkud je vidět, že $a \leq c$. Proto je relace “$\leq$” tranzitivní. Platí-li $a \leq b$ a zároveň $b \leq a$, potom $a = a \wedge b = b$. Podle Lemmatu 1.3(i) platí, že $a = a \wedge a$, tedy $a \leq a$. Proto je relace “$\leq$” uspořádáním množiny A.

Z absorpce a komutativity plyne, že $a = a \wedge (a \vee b)$ a $b = b \wedge (a \vee b)$, odkud $a, b \leq a \vee b$. Je-li naopak $a, b \leq c$, platí podle Lemmatu 1.3(ii), že $c = a \vee c = b \vee c$. Odtud $c = a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ a proto $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Podobně ukážeme, že $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Existence infim a suprem všech neprázdných konečných podmnožin množiny A plyne z Lemmatu 1.2. $\square$

Na svaz je tak možné pohlížet jako na algebru se dvěma operacemi “$\vee$” a “$\wedge$” splňujícími příslušné axiomy nebo jako na uspořádanou množinu v níž má každá neprázdná konečná podmnožina supremum a infimum.

Definice. Svaz $\boldsymbol{A}$ nazveme *omezený*, má-li největší a nejmenší prvek. Největší prvek svazu obvykle značíme $1_{\boldsymbol{A}}$, nejmenší pak $0_{\boldsymbol{A}}$ (nebo jen 1 a 0, je-li svaz $\boldsymbol{A}$ jednoznačně určený ze souvislosti).

Všimněme si, že je-li A uspořádaná množina a značí-li $\emptyset$ prázdnou podmnožinu A, jsou $\sup \emptyset$, resp. $\inf \emptyset$ rovny nejmenšímu, resp. největšímu prvku množiny A. Omezené svazy tedy odpovídají uspořádaným množinám, jejichž každá konečná podmnožina má supremum a infimum.

Definice. Svaz nazveme *úplným*, má-li každá jeho podmnožina infimum.

Je-li $\boldsymbol{A}$ úplný svaz a X jeho podmnožina, potom je

$$\sup X = \inf\{a \in \boldsymbol{A} \mid b \leq a \text{ pro každé } b \in X\}.$$

Proto má každá podmnožina úplného svazu také supremum. V souladu se značením binárních svazových operací budeme značit $\bigvee X$, resp. $\bigwedge X$ supremum, resp. infimum podmnožiny X uspořádané množiny A.

KAPITOLA 2

Modulární svazy

SHRNUTÍ. Definujeme modulární svazy a ukážeme, že všechny modulární svazy tvoří varietu. Definujeme modulární svazy a ukážeme, že svazy podmodulů a normálních podgrup jsou modulární. Naopak svaz všech podgrup modulární být nemusí. Nakonec popíšeme pětiprvkový nemodulární svaz $\boldsymbol{N_5}$ a ukážeme, že svaz je modulární právě když $\boldsymbol{N_5}$ není jeho podsvazem.

2.1. Modularita. Svaz $\boldsymbol{A}$ nazveme *modulární* pokud pro každé $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ takové, že $a \leq c$, platí rovnost

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c. \tag{2.1}$$

Všimněme si, že nerovnost

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$$

platí za předpokladu $a \leq c$ v každém svazu. Proto jsou modulární svazy charakterizovány právě tím, že platí opačná nerovnost. Z výše uvedené definice není patrné, že modulární svazy tvoří varietu neboť podmínka v předchozí definici je implikací, nikoliv identitou. To, že je možné nahradit tuto implikaci identitou ukazuje následující tvrzení.

TVRZENÍ 2.1. *Svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární právě když*

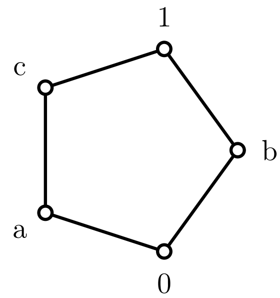
$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c \tag{2.2}$$

pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

DŮKAZ. Nejprve předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární a položme $a' = a \wedge c$. Protože $a' = (a \wedge c) \leq c$, dostáváme, že $a' \vee (b \wedge c) = (a' \vee b) \wedge c$ což odpovídá identitě (2.2).

Naopak předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ splňuje identitu (2.2). Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ jsou takové, že $a \leq c$. Potom $a = a \wedge c$ a po dosazení do (2.2) dostaneme rovnosti $a \vee (b \wedge c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge c$, tedy svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární. □

Vidíme tedy, že třída všech modulárních svazů je varietou a tedy je uzavřena na podsvazy, direktní součiny a homomorfní obrazy. Varietu všech modulárních svazů budeme dále značit $\mathcal{M}$.



Obrázek 2.1. Svaz $\boldsymbol{N_5}$

Tvrzení 2.2. *Buď $\boldsymbol{R}$ okruh a $\boldsymbol{M}$ nějaký $\boldsymbol{R}$-modul. Potom je svaz všech podmodulů modulu $\boldsymbol{M}$ modulární. Speciálně je modulární svaz všech podprostorů libovolného vektorového prostoru nebo svaz všech podgrup libovolné Abelovy grupy.*

Důkaz. Připomeňme, že podmoduly modulu $\boldsymbol{M}$ tvoří svaz v němž spojení podmodulů $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ odpovídá jejich součtu $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} := \{x+y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y}\}$ a průseku odpovídá průnik $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}$.

Nechť $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Z}$ jsou podmoduly modulu $\boldsymbol{X}$ takové, že $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Z}$. Potom

$$(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) \cap \boldsymbol{Z} = \{x+y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y} \text{ a } x+y \in \boldsymbol{Z}\} = \cdots .$$

Pokud $x+y \in \boldsymbol{Z}$ a $x \in \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Z}$, tak $y = (x+y) - x \in \boldsymbol{Z}$. Proto máme,

$$\cdots = \{x+y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y} \cap \boldsymbol{Z}\} = \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y} \cap \boldsymbol{Z}).$$

□

Tvrzení 2.3. *Svaz všech normálních podgrup libovolné grupy je modulární.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{G}$ grupa. Normální podgrupy grupy $\boldsymbol{G}$ tvoří svaz, v němž spojení dvou normálních podgrup $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{K}$ odpovídá jejich součin $\boldsymbol{HK} := \{xy \mid x \in \boldsymbol{H} \text{ a } y \in \boldsymbol{K}\}$ a průseku odpovídá jejich průnik. Nechť $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{L}$ jsou normální podgrupy grupy $\boldsymbol{G}$ takové, že $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{L}$. Potom $\boldsymbol{HK} \cap \boldsymbol{L} := \{xy \mid x \in \boldsymbol{H}, y \in \boldsymbol{K} \text{ a } xy \in \boldsymbol{L}\}$. Protože $y = x^{-1}(xy) \in \boldsymbol{HL} \subseteq \boldsymbol{L}$, odkud $y \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}$, dostáváme, že $\boldsymbol{HK} \cap \boldsymbol{L} = \{xy \mid x \in \boldsymbol{H} \text{ a } y \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}\} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L})$. □

2.2. Zakázaný podsvaz $\boldsymbol{N_5}$. Svaz $\boldsymbol{N_5}$ na následujícím obrázku není modulární:

Je totiž $a \leq c$ a zároveň $a \vee (b \wedge c) = a < c = (a \vee b) \wedge c$.

V souvislosti s Tvrzením 2.3 poznamenejme, že svaz všech podgrup modulární být nemusí. Uvažme například grupu $\boldsymbol{S_4}$ všech permutací množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ a její podgrupy: $\boldsymbol{A}$ generovanou transpozicí $(1, 2)$, $\boldsymbol{B}$ generovanou čtyř-cyklem $(1, 2, 3, 4)$ a $\boldsymbol{C}$ generovanou transpozicemi $(1, 2)$ a $(3, 4)$. Snadno nahlédneme, že tyto podgrupy spolu s triviální podgrupou a celou grupou $\boldsymbol{S_4}$

tvoří podsvaz svazu všech podgrup grupy $\boldsymbol{S_4}$, který je izomorfní $\boldsymbol{N_5}$. Proto svaz všech podgrup grupy $\boldsymbol{S_4}$ není modulární.

LEMMA 2.4. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz obsahující prvky a, b, c takové, že*

$$c \wedge b \le a < c \le a \vee b. \tag{2.3}$$

Potom prvky $c \wedge b, a, b, c, a \vee b$ tvoří podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$.

DŮKAZ. Jestliže $a \le b$, pak $b = a \vee b$ a tedy $c = c \wedge (a \vee b) = c \wedge b \le a$. Pokud $b \le a$, dostaneme $c \le a \vee b = a$. V obou případech dostáváme nerovnost $c \le a$, která je ve sporu s (2.3). Proto jsou prvky a a b neporovnatelné. Odtud plyne, že $a \wedge b < a$. Z (2.3) snadno nahlédneme, že $c \wedge b = a \wedge b$. Podobně ukážeme, že prvky b a c jsou neporovnatelné, a že $c < a \vee b = c \vee b$. Proto je množina $B := \{c \wedge b, a, b, c, a \vee b\}$ pěti-prvková a zbývá ověřit, že je uzavřena na suprema a infima. Jediné dvouprvkové podmnožiny množiny B jejichž prvky jsou neporovnatelné jsou $\{a, b\}$ a $\{b, c\}$. Vzhledem k (2.3) je $a \wedge b = c \wedge b \in B$ a $c \vee b = a \vee b \in B$. □

VĚTA 2.5. *Svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$.*

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Z definice plyne, že třída modulárních svazů je uzavřena na podsvazy (ukázali jsme dokonce, že modulární svazy tvoří varietu). Podsvaz modulárního svazu proto nemůže být izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$, který modulární není.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ není modulární. Potom existují $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ takové, že $a \le c$ a $a \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge c$. Položme $a' := a \vee (b \wedge c)$ a $c' := (a \vee b) \wedge c$. Potom je $b \wedge c' = b \wedge (a \vee b) \wedge c = b \wedge c \le a \vee (b \wedge c) = a'$ a podobně $c' = (a \vee b) \wedge c \le a \vee b = a \vee b \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c) \vee b = a' \vee b$. Podle Lemmatu 2.3 tvoří množina $\{c' \wedge b, a', b, c', a' \vee b\}$ podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní $\boldsymbol{N_5}$. □

KAPITOLA 3

Distributivní svazy

SHRNUTÍ. Nejprve popíšeme rovnosti charakterizující distributivitu svazů. Ukážeme, že svaz je distributivní právě když

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

pro všechna x, y, z. Nakonec ukážeme, že modulární svaz je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$.

3.1. Rovnosti charakterizující distributivitu.

LEMMA 3.1. *Pro svaz $\boldsymbol{A}$ jsou následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*
(1) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *pro všechna* $a, b, c \in \boldsymbol{A}$,
(2) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *pro všechna* $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

DŮKAZ. ((1) $\rightarrow$ (2)): Vhodnou aplikací absorpce a podmínky (1) dostaneme:

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= (a \vee (a \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) \\ &= a \wedge (b \vee a) \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c).\end{aligned}$$

Implikaci ((2) $\rightarrow$ (1)) ukážeme obdobně. □

DEFINICE. Řekneme, že svaz je *distributivní* jestliže splňuje vzájemně ekvivalentní podmínky (1) a (2).

LEMMA 3.2. *Svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní právě když platí*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c), \tag{3.1}$$

pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní. Potom platí, že

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) &= (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c) \\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že rovnost (3.1) platí pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$. Nejprve ukážeme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární. Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ a předpokládejme, že $a \leq c$. Potom $a = a \wedge c$, $c = a \vee c$ a rovnost (3.1) je tvaru

$$(a \wedge b) \vee a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c \wedge (b \vee c). \tag{3.2}$$

Protože $a \leq c$, je navíc $a \wedge b \leq b \wedge c$ a podobně $a \vee b \leq b \vee c$. Z rovnosti (3.2) proto dostaneme, že $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$. Ukázali jsme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární.

Nechť jsou nyní $a, b, c, \in \boldsymbol{A}$ libovolné. Položme

$$u = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$$
$$v = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Protože $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, dostaneme z modularity svazu $\boldsymbol{A}$, že

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) \vee v &= \big(a \vee (b \wedge c)\big) \vee \big((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)\big) \\ &= \big(a \vee (b \wedge c) \vee (b \vee c)\big) \wedge \big((a \vee b) \wedge (a \vee c)\big) \\ &= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Snadno nahlédneme, že $u \leq a \vee (b \wedge c)$. Proto platí, že

$$a \vee (b \wedge c) \vee u = a \vee (b \wedge c). \tag{3.4}$$

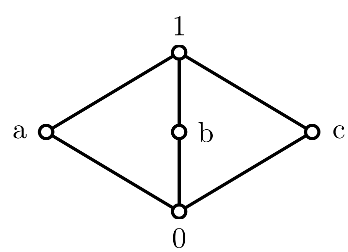
Pokud $u = v$, dostaneme z rovností (3.3) a (3.4), že $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Proto je svaz $\boldsymbol{A}$ distributivní. □

3.2. Zakázaný podsvaz $\boldsymbol{M_3}$. Distributivní svazy jsou charakterizovány splňováním identit. Proto tvoří varietu. Budeme ji značit $\mathcal{D}$. Všimněme si, že je-li $a \leq c$, potom $a \vee c = c$. Proto v tomto případě dostaneme z distributivity, že

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Proto je každý distributivní svaz modulární.

Uvažme svaz $\boldsymbol{M_3}$ znázorněný na následujícím Obrázku 3.1:



Obrázek 3.1. Svaz $\boldsymbol{M_3}$

Svaz $\boldsymbol{M_3}$ zřejmě neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$ a proto je modulární. Zároveň ale v $\boldsymbol{M_3}$ platí, že

$$a \vee (b \wedge c) = a < 1 = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Proto tento svaz není distributivní.

Cvičení 3.1. *Ukažte, že $\boldsymbol{M_3}$ je izomorfní svazu všech podgrup Abelovy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Lemma 3.3. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz, $a, b, c \in \boldsymbol{A}$. Položme*

$$\begin{aligned} v &:= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c), \\ u &:= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \\ a_1 &:= (a \vee u) \wedge v, \\ b_1 &:= (b \vee u) \wedge v, \\ c_1 &:= (c \vee u) \wedge v. \end{aligned}$$

Pokud $u < v$, potom tvoří prvky u, v, a_1, b_1, c_1 podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$.

Důkaz. Platí, že

$$\begin{aligned} a_1 &= (a \vee u) \wedge v = (a \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge v = (a \vee (b \wedge c)) \wedge v \\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c). \end{aligned}$$

Podobně ukážeme, že

$$b_1 = (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c), \text{ a že } c_1 = (c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee b).$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 \wedge b_1 &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c) \\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)). \end{aligned}$$

Jistě je $b \wedge c \leq b \vee (a \wedge c)$ a proto z modularity dostaneme

$$(a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge (b \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c).$$

Vzhledem k modularitě a nerovnosti $a \wedge c \leq a$ platí, že

$$(a \wedge (b \vee (a \wedge c))) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = u.$$

Obdobně bychom ukázali, že $u = a_1 \wedge c_1 = b_1 \wedge c_1$. Snadno nahlédneme, že $u \leq v$. Z modularity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme rovnosti

$$a_1 = (a \wedge v) \vee u, \quad b_1 = (b \wedge v) \vee u \quad \text{a} \quad c_1 = (c \wedge v) \vee u.$$

Zaměníme-li operace průseku a spojení, ukážeme obdobně jako výše, že

$$v = a_1 \vee b_1 = a_1 \vee c_1 = b_1 \vee c_1.$$

Z nerovnosti $u < v$ již snadno odvodíme, že jsou prvky a_1, b_1, c_1 neporovnatelné. Prot tvoří spolu s u a v podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní $\boldsymbol{M_3}$. □

Z Lemmatu 2.4 plyne, že modulární svaz, ve kterém existují prvky a, b, c takové, že $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ obsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$. Protože svaz $\boldsymbol{M_3}$ není distributivní, dostáváme z Lemmatu 3.2, že

Věta 3.4. *Modulární svaz je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$.*

Společně s Větou 2.5 dostaneme, že

Důsledek 3.5. *Svaz je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$ nebo svazu $\boldsymbol{M_3}$.*

KAPITOLA 4

Varieta distributivních svazů

Shrnutí. Ukážeme, že každé dva prvky distributivního svazu lze oddělit prvoideálem. Odtud odvodíme, že každý distributivní svaz je možné vnořit do kartézské mocniny dvouprvkového svazu. Odtud plyne, že varieta distributivních svazů je generovaná dvouprvkovým svazem a tedy je nejmenší netriviální svazovou varietou.

4.1. Varieta distributivních svazů. Podmnožinu D částečně uspořádané množiny $(P, \leq)$ nazveme *dolní* pokud

$$p \leq q \text{ a } q \in D \implies p \in D$$

pro všechna $p, q \in P$. Duálně nazveme podmnožinu H částečně uspořádané množiny $(P, \leq)$ *horní*, jestliže

$$p \leq q \text{ a } p \in H \implies q \in H$$

pro všechna $p, q \in P$. Všimněme si, že D je dolní podmnožina, právě když je $P \setminus D$ horní podmnožina uspořádané podmnožiny P.

Definice. *Ideálem* svazu $\boldsymbol{A}$ rozumíme podmnožinu $I \subseteq \boldsymbol{A}$ takovou, že

$$a \vee b \in I a, b \in I.$$

Duálně *filtrem* svazu $\boldsymbol{A}$ rozumíme podmnožinu $F \subseteq \boldsymbol{A}$ takovou, že

$$a \wedge b \in F a, b \in F.$$

Ideál I svazu $\boldsymbol{A}$ je *prvoideál*, pokud je $\boldsymbol{A} \setminus I$ filtr. Duálně, filtr F svazu $\boldsymbol{A}$ je *ultrafiltr*, pokud tvoří množina $\boldsymbol{A} \setminus F$ ideál (a tedy nutně prvoideál).

Z definice je vidět, že ideály jsou právě neprázdné dolní podmnožiny svazu uzavřené na konečná spojení a filtry jsou právě neprázdné horní podmnožiny svazu uzavřené na konečné průseky. Všimněme si také, že ideál I svazu $\boldsymbol{A}$ je prvoideál právě když je jeho doplněk $\boldsymbol{A} \setminus I$ neprázdný a uzavřený na průseky.

Lemma 4.1. *Pro každou dvojici různých prvků distributivního svazu existuje prvoideál obsahující právě jeden z nich.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ distributivní svaz a $a \neq b$ dvojice jeho prvků. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \not\leq b$. Uvažme možinu

$$\mathcal{B} := \{I \mid I jeidel, a \notin I b \in I\}.$$

Snadno nahládneme, že $\{x \in \boldsymbol{A} \mid x \leq b\} \in \mathcal{B}$ a množina $\mathcal{B}$ je tedy neprázdná. Možina $\mathcal{B}$ je zřejmě uzavřená na sjednocení řetězců a podle Zornova lemmatu má tedy maximální prvek. Označme jej $P_{\langle a,b\rangle}$.

Protože $P_{\langle a,b\rangle} \in \mathcal{B}$, je $a \notin P_{\langle a,b\rangle}$ a $b \in P_{\langle a,b\rangle}$. Ukážeme, že $P_{\langle a,b\rangle}$ je prvoideál. Pro spor předpokládejme, že existují $c, d \notin P_{\langle a,b\rangle}$ takové, že $c \wedge d \in P_{\langle a,b\rangle}$. Množina

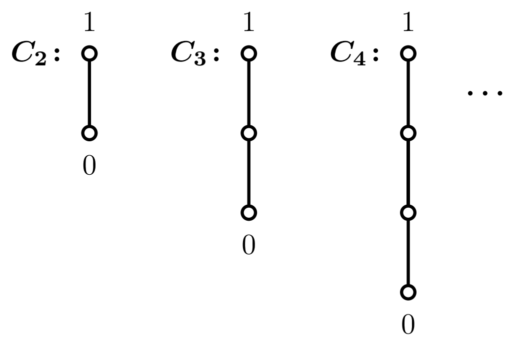
$$I_c := \{x \in \boldsymbol{A} \mid \exists y \in P_{\langle a,b\rangle} \colon x \leq c \vee y\}$$

tvoří ideál ostře obsahující $P_{\langle a,b\rangle}$ (neboť $c \notin P_{\langle a,b\rangle}$). Z maximality $P_{\langle a,b\rangle}$ plyne, že $a \in I_c$. Proto existuje $y_c \in P_{\langle a,b\rangle}$ tak, že $a \leq c \vee y_c$. Podobně ukážeme, že existuje $y_d \in P_{\langle a,b\rangle}$ tak, že $a \leq d \vee y_d$. Položme $y = y_c \vee y_d$. Protože je $P_{\langle a,b\rangle}$ ideál, platí, že $y \in P_{\langle a,b\rangle}$. Z distributivity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme, že

$$a \leq (c \vee y) \wedge (d \vee y) = (c \wedge d) \vee y \in P_{\langle a,b\rangle}.$$

To je spor neboť z $P_{\langle a,b\rangle} \in \mathcal{B}$ plyne, že $a \notin P_{\langle a,b\rangle}$. □

Symbolem $\boldsymbol{C_n}$ označme n-prvkový totálně uspořádaný svaz.



Obrázek 4.1. Totálně uspořádané svazy

Lemma 4.2. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Je-li P prvoideál svazu $\boldsymbol{A}$, je dán předpisem*

$$\varphi_P(a) := \begin{cases} 0 & a \in P \\ 1 & a \notin P \end{cases} \tag{4.1}$$

svazový homomorfismus $\varphi_P \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}$.

Naopak $\varphi^{-1}(0)$ je prvoideál pro každý homomorfismus $\varphi \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}$.

Důkaz. Z toho, že P je ideál, snadno nahlédneme, že zobrazení φ_P zachovává spojení. Protože je P prvoideál, je $\boldsymbol{A} \setminus P$ filtr. Odtud plyne, že φ_P zachovává průseky. Proto je zobrazení φ_P určené přepisem (4.1) svazový homomorfismus.

Je-li $\varphi \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}$ svazový homomorfismus, je $\varphi^{-1}(0)$ ideál a $\varphi^{-1}(1) = \boldsymbol{A} \setminus \varphi^{-1}(0)$ filtr. Proto je množina $\varphi^{-1}(0)$ prvoideálem. □

Věta 4.3. *Každý distributivní svaz lze vnořit do kartézské mocniny svazu $\boldsymbol{C_2}$.*

Důkaz. Položme

$$A_{\nleq} := \{\langle a,b\rangle \mid a \nleq b v \boldsymbol{A}\}.$$

Podle Lemmatu 4.1 existuje pro každou dvojici $\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}$ prvoideál $P_{\langle a,b\rangle}$ takový, že $a \notin P_{\langle a,b\rangle}$ a $b \in P_{\langle a,b\rangle}$. Vzhledem k Lemmatu 4.2 je zobrazení

$$\prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}^{A_{\nleq}}$$

svazovým homomorfismem. Je-li $a \nleq b$ v $\boldsymbol{A}$, platí rovnosti $\varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(a) = 1$ a $\varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(b) = 0$. Proto

$$\prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(a) \neq \prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(b).$$

Odtud je vidět, že je součin $\prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}$ vnoření. □

Z Věty 4.3 plyne, že varieta $\mathcal{D}$ distributivních svazů je generovaná dvouprvkovým svazem. Protože každá netriviální varieta svazů[1] obsahuje nutně dvouprvkový svaz, tvoří distributivní svazy nejmenší netriviální svazovou varietu. To také znamená, že každá svazová identita, která platí ve dvouprvkovém svazu platí ve všech distributivních svazech.

[1] Různá od variety $\{\bullet\}$ obsahující jen jednoprvkový svaz.

KAPITOLA 5

Konjuktivně disjunktivní termy

Shrnutí. Ukážeme, že každý prvek distributivního svazu odpovídá termu v konjuktivně-disjunktivním (resp. disjunktivně-konjunktivním) tvaru. Odtud odvodíme, že varieta distributivních svazů je lokálně konečná. Dále ukážeme, že konečný distributivní svaz je izomorfní svazu dolních podmnožin uspořádané nožiny jeho spojově nerozložitelnéch prvků. Odtud odvodíme, že konečný svaz je distributivní právě když je každý jeho spojově nerozložitelný prvek spojový prvočinitel. Nakonec ukážeme, že délka konečného distributivního svazu odpovídá velikosti množiny spojově nerozložitelnéch prvků tohoto svazu.

5.1. Svazové termy. Buď $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ (spočetná) množina proměnných. *Svazový term* definujeme induktivně takto:

(1) Každá z proměnných $x_1, x_2, \dots$ je svazovým termem.
(2) Jsou-li p a q svazové termy, potom jsou také $(p \vee q)$ a $(p \wedge q)$ svazové termy.

V zápisu svazových termu budeme vynechávat závorky tam, kde nám to asociativita svazových operací dovolí. Například tedy budeme místo $((p_1 \vee p_2) \vee p_3)$ psát jen $p_1 \vee p_2 \vee p_3$.

Symbolem $T[X]$ označíme množinu všech svazových termů s proměnnými z množiny X. *Složitost termu* je hodnota zobrazení $\rho\colon T[X] \to \mathbb{N}$ definovaná induktivně takto:

(1) $\rho(x) = 1$ pro všechna $x \in X$,
(2) $\rho(p \vee q) = \rho(p \wedge q) = \rho(p) + \rho(q) + 1$, pro všechna $p, q \in T[X]$.

Jsou-li všechny proměnné vyskytující se ve svazovém termu p prvky množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, řekneme, že p je *n-ární svazový term*, což zapíšeme, podobně jako v případě číselných polynomů, symbolem $p(x_1, \dots, x_n)$. Množinu všech n-árních svazových termů označíme $T[x_1, \dots, x_n]$.

Interpretací (řádu n) termu $p \in T[x_1, \dots, x_n]$ ve svazu $\boldsymbol{A}$ rozumíme n-ární operaci $p_{\boldsymbol{A}}\colon A^n \to A$ na množině A určenou předpisem

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mapsto p(a_1, \dots, a_n).$$

Svazovou (n-ární) *identitou* rozumíme výraz $p \approx q$, kde p, q jsou n-ární svazové termy. Řekneme, že třída svazů $\mathcal{U}$ splňuje svazovou identitu $p \approx q$ (což zapisujeme $p \approx_{\mathcal{U}} q$) jsou-li interpretace termů p, q ve svazu $\boldsymbol{A}$ shodné pro všechna $\boldsymbol{A} \in \mathcal{U}$. Symbolem $p \lesssim q$ (a podobně $p \lesssim_{\mathcal{U}} q$) značíme, že $q \approx p \vee q$ (a podobně $q \approx_{\mathcal{U}} p \vee q$).

Tvrzení 5.1. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz a $p \in T[x_1, \ldots, x_n]$. Interpretace $p_{\boldsymbol{A}}$ termu p ve svazu $\boldsymbol{A}$ je monotóní a idempotentní operace. Dále platí, že*

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \lesssim p(x_1, \ldots, x_n) \lesssim x_1 \vee \cdots \vee x_n,$$

pro všechna $p \in T[x_1, \ldots, x_n]$.

Důkaz. V obou případech indukcí podle složitosti termu. □

5.2. Disjunktivně-konjunktivní tvar termů. Řekneme, že svazový term p je v *disjunctivně-konjunktivním* (resp. *konjunktivně-disjunktivním*) tvaru, existuje-li přirozené číslo n a konečné podmnožiny $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq X$ takové, že

$$p = \bigvee_{i=1}^{n} \Big(\bigwedge Y_i \Big) \text{ (resp. } p = \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(\bigvee Y_i \Big) \text{)}.$$

Připomeňme, že symbolem $\mathcal{D}$ značíme varietu všech distributivních svazů.

Věta 5.2. *Pro každý svazový term p existují svazové termy s (resp. t) v disjunktivně-konjunktivním (resp. konjunktivně-disjunktivním) tvaru takový, že*

$$p \approx_{\mathcal{D}} s \approx_{\mathcal{D}} t.$$

Důkaz. Buď p n-ární svazový term. Ukážeme, že existuje n-ární svazový term s v disjunktivně-konjunktivním tvaru takový, že $p \approx_{\mathcal{D}} s$. Existenci n-árního svazovho termu t v konjunktivně-disjunktivním tvaru takového, že $p \approx_{\mathcal{D}} t$ bychom ukázali obdobně.

Podle Věty 4.3 lze každý distributivní svaz vnořit do kartézské mocniny dvouprvkového svazu $\boldsymbol{C_2}$. To znamená, že varieta distributivních svazů je svazem $\boldsymbol{C_2}$ generovaná a tedy stačí sestrojit n-ární svazový term s v disjunktivně-konjunktivním tvaru takový, že $p_{\boldsymbol{C_2}} = s_{\boldsymbol{C_2}}$. Pro každou n-tici $\boldsymbol{a} := \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \boldsymbol{C_2}^n$ položme

$$S(p) := \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid p_{\boldsymbol{C_2}}(a_1, \ldots, a_n) = 1\},$$
$$\chi_{\boldsymbol{a}} := \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid a_i = 1\},$$

a definujme

$$s(x_1, \ldots, x_n) := \bigvee_{\boldsymbol{a} \in S(p)} \left(\bigwedge_{i \in \chi_{\boldsymbol{a}}} x_i \right). \tag{5.1}$$

Z definice (5.1) je ihned vidět, že

$$p_{\boldsymbol{C_2}}(a_1, \ldots, a_n) = 1 \implies \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in S(p) \implies s_{\boldsymbol{C_2}}(a_1, \ldots, a_n) = 1,$$

a tedy $p_{\boldsymbol{C_2}} \leq s_{\boldsymbol{C_2}}$.

Nechť naopak pro nějaké $\boldsymbol{b} := \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in C_2^n$ platí, že $s_{\boldsymbol{C_2}}(\boldsymbol{b}) = 1$. Z definice (5.1) je potom vidět, že existuje $\boldsymbol{a} \in S(p)$ takové, že $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$. Podle

Tvrzení 5.1 indukují svazové termy monotónní operace a tedy $p_{\boldsymbol{C_2}}(\boldsymbol{b}) = 1$. Dostáváme tak i opačnou nerovnost $s_{\boldsymbol{C_2}} \leq p_{\boldsymbol{C_2}}$. □

Důsledek 5.3. *Konečně generovaný distributivní svaz je konečný.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{D}$ distributivní svaz, který je generován konečnou množinou $\{d_1, \dots, d_n\}$. Vzhledem k Větě 5.2 existuje pro každé $c \in \boldsymbol{D}$ n-ární svazový term s v disjunktivně-konjunktivním tvaru takový, že $c = s(d_1, \cdots, d_n)$. Z definice (5.1) je vidět, že existuje nejvýše 2^{2^n} takových termů. Svaz $\boldsymbol{D}$ má tedy nejvýše 2^{2^n} prvků. □

5.3. Struktura konečných distributivních svazů. Nenulový prvek s svazu $\boldsymbol{A}$ je *spojově nerozložitelný* pokud z rovnosti $s = a \vee b$ plyne, že $s \in \{a, b\}$. Symbolem $\mathrm{J}(\boldsymbol{A})$ označíme množinu všech spojově nerozložitelných prvků svazu $\boldsymbol{A}$. Množina $\mathrm{J}(\boldsymbol{A})$ je přirozeně uspořádaná restrikcí uspořádání svazu $\boldsymbol{A}$.

Lemma 5.4. *Každý nenulový prvek konečného svazu je spojením spojově nerozložitelných prvků.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz. Označme N množinu těch nenulových prvků svazu $\boldsymbol{A}$, které nejsou spojením spojově nerozložitelných prvků. Pro spor předpokládejme, že je množina N neprázdná. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ konečný, má množina N minimální prvek, označme jej c. Prvek c je nenulový a jistě není spojově nerozložitelný. Proto ve svazu $\boldsymbol{A}$ existují prvky $a, b < c$ takové, že $c = a \vee b$. Z minimality prvku c v množině N plyne, že $a = s_1 \vee \cdots \vee s_k$ a $b = t_1 \vee \cdots \vee t_l$ pro nějaké spojově nerozložitelné $s_1, \dots, s_k$ a $t_1, \dots, t_l$ (všimněme si, že prvky a, b jsou nutně nenulové). Potom ale

$$c = a \vee b = s_1 \vee \cdots \vee s_k \vee t_1 \vee \cdots \vee t_l,$$

a tedy c je spojením spojově nerozložitelných prvků. To je ve sporu s předpokladem, že $c \in N$. □

Poznámka. *Řeknem, že uspořádaná množina P splňuje podmínku konečnosti klesajícíh řetězců, je-li každý ostře klesající řetězec v P konečný. Snadno nahlédneme, že uspořádaná množina P splňuje podmínku konečnosti klesajících řetězců právě když má každá její neprázdná podmnožina minimální prvek. Pro svazy splňující podmínku konečnosti klesajících řetězců můžeme argumentovat stejně jako v důkazu Věty 5.4. Proto je každý nenulový prvek takového svazu spojením spojově nerozložitelných prvků.*

Příklad 5.1. *Buď X nekonečná množina. Položme*

$$A := \{Y \subseteq X \mid \textit{Rozdíl } X \setminus Y \textit{ je konečný}\}.$$

Snadno nahlédneme, že je množina A uzavřena na konečná sjednocení a konečné průniky a tedy spolu s těmito operacemi tvoří svaz, označme jej $\boldsymbol{A}$. Žádný prvek svazu $\boldsymbol{A}$ není spojově nerozložitelný.

Nenulový prvek p svazu $\boldsymbol{A}$ je *spojový prvočinitel* pokud z nerovnosti $p \leq a \vee b$ plyne, že $p \leq a$ nebo $p \leq b$.

Z definic je vidět, že každý spojový prvočinitel je spojově nerozložitelný. Naopak snadno nahlédneme, že prvky $a, b, c \in \boldsymbol{M_3}$ jsou spojově nerozložitelné, ale žádný z nich není spojový prvočinitel.

LEMMA 5.5. *Každý spojově nerozložitelný prvek distributivního svazu je spojovým prvočinitelem.*

DŮKAZ. Nechť $\boldsymbol{A}$ je distributivní svaz $s \in \mathrm{J}(\boldsymbol{A})$. Předpokládejme, že $s \leq a \vee b$ pro nějaké $a, b \in \boldsymbol{A}$. Z distributivity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme, že $s = s \wedge (a \vee b) = (s \wedge a) \vee (s \wedge b)$. Protože prvek s je spojově nerozložitelný, buďto $s = s \wedge a$ (a tedy $s \leq a$) nebo $s = s \wedge b$ (a tedy $s \leq b$). Proto je s spojovým prvočinitelem. □

Připomeňme, že *dolní* (resp. *horní*) podmnožina uspořádané množiny P je $D \subseteq P$ taková, že $p \leq d \implies p \in D$ (resp. $H \subseteq P$ taková, že $d \leq p \implies p \in H$), pro všechna $p \in P$, $d \in D$ (resp. $d \in H$). Pro libovolnou podmnožinu X uspořádané množiny P položíme

$$\downarrow X := \{p \in P \mid \exists x \in X : p \leq x\},$$
$$\uparrow X := \{p \in P \mid \exists x \in X : x \leq p\}.$$

Pro jednoprvkovou množinu $X = \{x\}$ bude značit $\downarrow x$ (resp. $\uparrow x$) místo $\downarrow \{x\}$ (resp. $\uparrow \{x\}$). Symbolem $D(P)$ (resp. $H(P)$) označíme množinu všech dolních (resp. horních) podmnožin uspořádané množiny P. Tyto množiny tvoří poduniverza svazu všech podmnožin P s operacemi průniku a sjednocení.

Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz. Definujme zobrazení α a β takto:

$$\begin{aligned} \alpha &\colon \boldsymbol{A} \to D(\mathrm{J}(\boldsymbol{A})) & \beta &\colon D(\mathrm{J}(\boldsymbol{A})) \to \boldsymbol{A} \\ a &\mapsto \{s \in \mathrm{J}(\boldsymbol{A}) \mid s \leq a\} & D &\mapsto \bigvee D \end{aligned} \tag{5.2}$$

Symbolem $1_{\boldsymbol{A}}$ budeme značit identické zobrazení $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$.

POZOROVÁNÍ 5.6. *Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ svazy a $\alpha\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ bijekce taková, že $a \leq b$ právě když $\alpha(a) \leq \alpha(b)$, pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$, je α izomorfismus těchto svazů. To plyne ihned z toho, že svazové operace jsou definovány jako infimum a suprémum. Odtud plyne, že jsou-li $\alpha\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ a $\beta\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ vzájemně inverzní bijekce zachovávající uspořádání, jsou obě tato zobrazení izomorfismy svazů $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.*

VĚTA 5.7. *Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz.*

(1) *Zobrazení α (resp. β) definované předpisem (5.2) zachovává průseky (resp. spojení) a $\beta\alpha = 1_{\boldsymbol{A}}$. Speciálně, zobrazení α je prosté a zobrazení β je na.*
(2) *Je-li svaz $\boldsymbol{A}$ distributivní, jsou α a β vzájemně inverzní svazové izomorfismy.*

DŮKAZ. (1) Z defininice infima plyne, že $s \leq a \wedge b$ právě když $s \leq a$ a zároveň $s \leq b$ pro všechna $a, b, s \in \boldsymbol{A}$. Odtud je vidět, že zobrazení α

zachovává průseky. Naopak z Lemmatu 1.1. plyne, že $\bigvee(G \cup H) = (\bigvee G) \vee (\bigvee H)$, pro všechna $G, H \subseteq \boldsymbol{A}$. Proto zobrazení β zachovává spojení. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ konečný, je podle Lemmatu 5.4 každý jeho prvek spojením spojově nerozložitelných prvků tohoto svazu. Odtud plyne, že

$$\beta\alpha(a) = \bigvee\{s \in \mathrm{J}(\boldsymbol{A}) \mid s \leq a\} = a,$$

pro všechna $a \in \boldsymbol{A}$. (2) Předpokládejme, že konečný svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní. Buď D dolní podmnožina uspořádané množiny $\mathrm{J}(\boldsymbol{A})$ a $s \in \mathrm{J}(\boldsymbol{A})$. Vzhledem k Lemmatu 5.5 a distributivitě svazu $\boldsymbol{A}$ je s spojovým prvočinitelem. Proto z $s \leq \bigvee D$ plyne, že $s \leq d$ pro nějaké $d \in D$ a tedy $s \in D$. Proto platí

$$\alpha\beta(D) = \{s \in \mathrm{J}(\boldsymbol{A}) \mid s \leq \bigvee D\} = D.$$

Proto jsou α a β vzájemně inverzní bijekce. Protože zobrazní α zachovává průseky a β zachovává spojení, zachovávají obě tato zobrazení uspořádání. Vzhledem k Pozorování 5.6 jsou zobrazení α, β svazovými izomorfismy. □

Důsledek 5.8. *Konečný distributivní svaz je izomorfní svazu všech dolních podmnožin uspořádané množiny jeho spojově nerozložitelných prvků.*

Všimeme si, že v důkazu části (2) Věty 5.7 jsme využili jen toho, že každý spojově nerozložitelný prvek svazu $\boldsymbol{A}$ je v tomto svazu spojovým prvočinitelem. Protože svaz všech dolních podmnožin uspořádané množiny je distributivní (je to podsvaz svazu všech podmnožin této množiny), dostáváme, že

Důsledek 5.9. *Konečný svaz je distributivní právě když je každý jeho spojově nerozložitelný prvek spojovým prvočinitelem.*

Připomeňme, že řetězcem míníme lineárně uspořádaný svaz. Délku konečného řetězce $\boldsymbol{C}$ pak definujeme jako $|\boldsymbol{C}|-1$. *Délkou* $d(\boldsymbol{A})$ konečného svazu $\boldsymbol{A}$ pak rozumíme největší délku řetězce v $\boldsymbol{A}$.

Tvrzení 5.10. *Pro konečný svaz $\boldsymbol{A}$ platí, že $d(\boldsymbol{A}) \leq |\mathrm{J}(\boldsymbol{A})|$. Je-li $\boldsymbol{A}$ distributivní, platí rovnost $d(\boldsymbol{A}) = |\mathrm{J}(\boldsymbol{A})|$.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz a $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ řetězec v $\boldsymbol{A}$. Podle Lemmatu 5.4 je každý prvek svazu $\boldsymbol{A}$ spojením spojově nerozložitelných prvků. Proto platí rovnost $a_i = \bigvee(\downarrow a_i \cap \mathrm{J}(\boldsymbol{A}))$ pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ a tedy

$$\downarrow a_0 \cap \mathrm{J}(\boldsymbol{A}) \subsetneq \downarrow a_1 \cap \mathrm{J}(\boldsymbol{A}) \subsetneq \cdots \subsetneq \downarrow a_n \cap \mathrm{J}(\boldsymbol{A}).$$

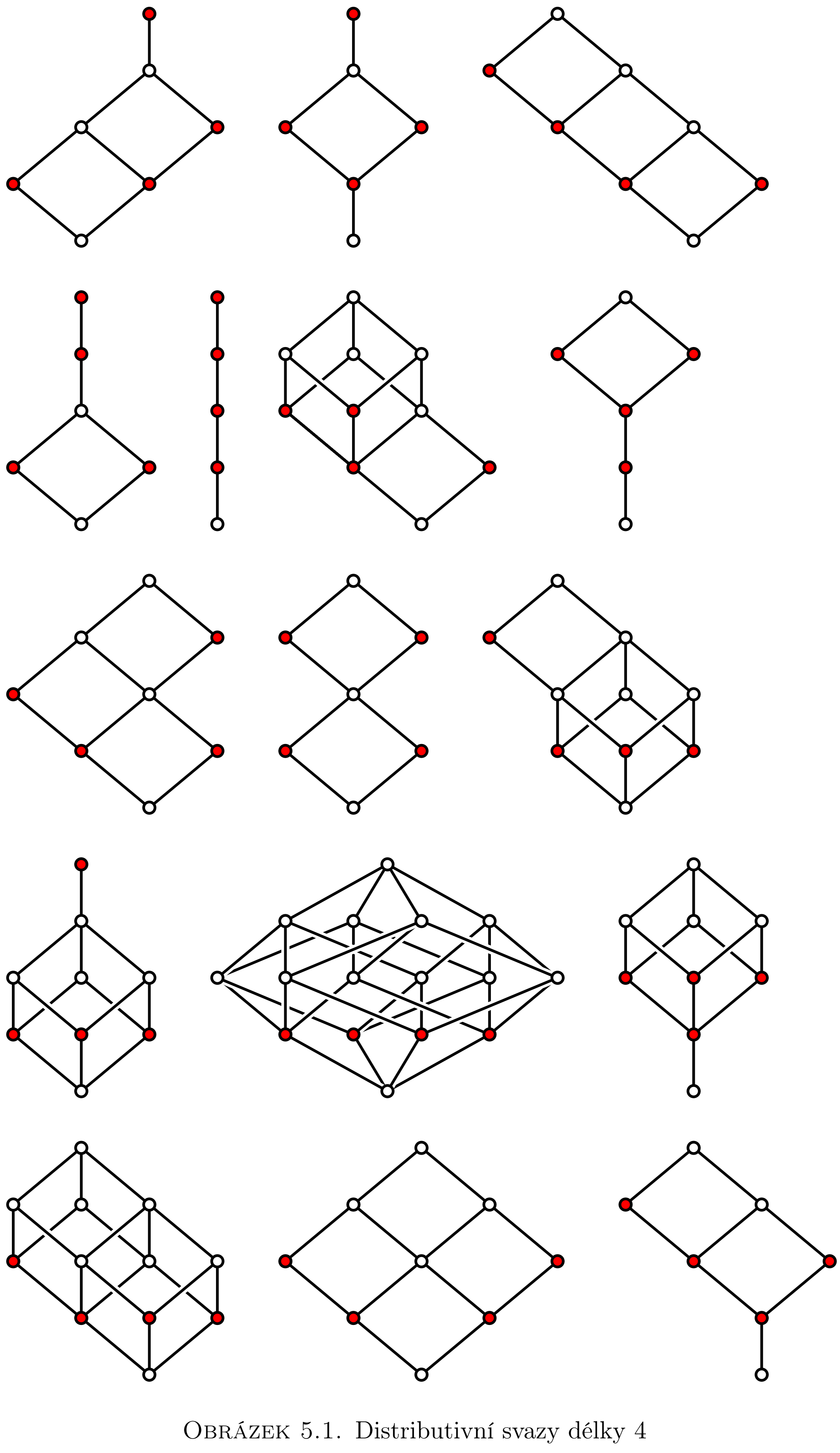
Odtud je vidět, že $n \leq |\mathrm{J}(\boldsymbol{A})|$.

Předpokládejme nyní, že svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní. Položme $n := |\mathrm{J}(\boldsymbol{A})|$ a uspořádejme prvky množiny $\mathrm{J}(\boldsymbol{A})$ do posloupnosti $\langle d_1, d_2, \ldots, d_n\rangle$ tak, že d_i je minimální prvek množiny $\mathrm{J}(\boldsymbol{A}) \setminus \{d_1, \ldots, d_{i-1}\}$, pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Z konstrukce této posloupnosti je vidět, že $D_i = \{d_1, \ldots, d_i\}$ jsou dolní podmnožiny uspořádané množiny $\mathrm{J}(\boldsymbol{A})$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$. Z Věty 5.7 plyne, že

$$\beta(D_0) < \beta(D_1) < \cdots < \beta(D_n)$$

je řetěz délky n ve svazu $\boldsymbol{A}$. □

Z Tvrzení 5.10 vidíme, že distributivní svazy délky n odpovídají vzájemně jednoznačně n-prvkovým uspořádaným množinám. Na Obrázku 5.1 jsou znázorněny všechny distributivní svazy délky 4. Červeně jsou vyznačeny jejich spojově nerozložitelné prvky.



Obrázek 5.1. Distributivní svazy délky 4

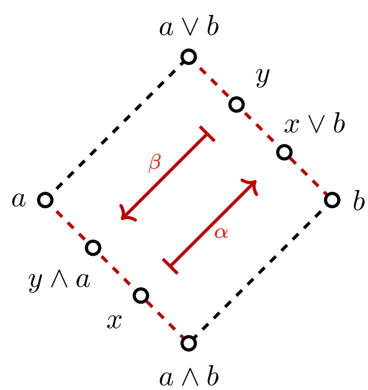
KAPITOLA 6

Vlastnosti modulárních svazů

SHRNUTÍ. Nejprve ukážeme větu o izomorfismu intervalů v modulárních svazech. Odtud odvodíme Oreovu-Kurošovu větu. Dále ukážeme, že redukované rozklady prvků modulárního svazu mají všechny stejnou velikost. Nakonec charakterizujeme nezávislé množiny v modulárních svazech.

Buď $(P, \leq)$ uspořádaná množina a $p \leq q$ uspořádaná dvojice jejích prvků. Symbolem q/p označíme interval ohraničený těmito prvky, tj.,

$$q/p := \{x \in P \mid p \leq x \leq q\}.$$



OBRÁZEK 6.1. Izomorfismy intervalů v modulárních svazech

LEMMA 6.1 (Věta o isomorfismu intervalů). *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz a $a, b \in \boldsymbol{A}$. Potom jsou zobrazení*

$$\alpha\colon a/(a \wedge b) \to (a \vee b)/b$$
$$x \mapsto x \vee b$$

a

$$\beta\colon (a \vee b)/b \to a/(a \wedge b)$$
$$y \mapsto y \wedge a$$

vzájemně inverzními izomorfismy intervalů $a/(a \wedge b)$, $(a \vee b)/b$.

Důkaz. Zobrazení α a β jsou obě monotónní. Stačí tedy ukázat, že jsou vzájemně inverzní. Z modularity svazu $\boldsymbol{A}$ odvodíme pro každé $x \in \boldsymbol{A}$ splňující $a \wedge b \leq x \leq a$, že

$$\beta\alpha(x) = (x \vee b) \wedge a = x \vee (b \wedge a) = x.$$

Podobně pro každé $y \in \boldsymbol{A}$ takové, že $b \leq x \leq a \vee b$, dostaneme rovnosti

$$\alpha\beta(y) = (y \wedge a) \wedge b = y \wedge (a \wedge b) = y.$$

□

Lemma 6.2 (Kuroš, Ore 1935). *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz, $a \in \boldsymbol{A}$ a $X, Y \subseteq \mathrm{J}(\boldsymbol{A})$ konečné podmnožiny takové, že $a = \bigvee X = \bigvee Y$. Potom pro každé $x \in X$ existuje $y \in Y$ takové, že $a = y \vee \bigvee(X \setminus \{x\})$.*

Důkaz. Buď $x \in X$ a položme $x' := \bigvee(X \setminus \{x\})$. Potom

$$a = x' \vee \bigvee Y = \bigvee_{y \in Y} (x' \vee y).$$

Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ modulární, existuje podle Lemmatu 6.1 izomorfismus $\beta\colon a/x' \to x/(x \wedge x')$ daný předpisem $t \mapsto t \wedge x$. Odtud dostaneme, že

$$x = x \wedge \bigvee_{y \in Y} (x' \vee y) = \bigvee_{y \in Y} (x \wedge (x' \vee y)).$$

Protože je prvek x spojově nerozložitelný, existuje $y \in Y$ takové, že $x = x \wedge (x' \vee y)$ a tedy $x \leq x' \vee y$. Odtud plyne, že

$$a = x' \vee y = y \vee \bigvee(X \setminus \{x\}).$$

□

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Řekneme, že konečná $X \subseteq \mathrm{J}(\boldsymbol{A})$ je *redukovaným rozkladem* prvku $a \in \boldsymbol{A}$ pokud $a = \bigvee X$, ale $a > \bigvee Y$ pro každou $Y \subsetneq X$. Je zřejmé, že každá $Y \subseteq \mathrm{J}(\boldsymbol{A})$ taková, že platí $a = \bigvee Y$, obsahuje nějaký redukovaný rozklad prvku a.

Lemma 6.3. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz. Nechť konečné $X, Y \subseteq \mathrm{J}(\boldsymbol{A})$ splňují $a = \bigvee X = \bigvee Y$. Je-li Y redukovaný rozklad prvku a, platí nerovnost $|Y| \leq |X|$.*

Důkaz. Nechť X a Y jsou dva konečné rozklady prvku a. Předpokládejme, že Y je redukovaný rozklad a že X je nejmenší rozklad a. Buď $X' \subseteq X$ největší taková, že existuje $Y' \subseteq Y$ splňující $|Y'| \leq |X'|$ a zároveň

$$a = \bigvee(X \setminus X') \vee \bigvee Y'.$$

Předpokládejme, že $X' \subsetneq X$ a zvolme $x \in X \setminus X'$. Podle Lemmatu 6.2 existuje $y \in Y$ tak, že

$$a = \bigvee(X \setminus (X' \cup \{x\})) \vee \bigvee(Y' \cup \{y\}).$$

Z toho, že $|Y'| \leq |X'|$ a $x \notin X'$ plyne nerovnost $|Y' \cup \{y\}| \leq |X' \cup \{x\}| = |X'| + 1$. To je ve sporu s volbou množiny X'.

Proto $X = X'$ a tedy $a = \bigvee Y'$. Protože je Y redukovaný rozklad prvku a, dostáváme odtud, že $Y = Y'$. Z nerovnosti $|Y'| \leq |X'|$ tak máme okamžitě $|Y| \leq |X|$. □

Důsledek 6.4. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz. Každé dva redukované rozklady prvku $a \in \boldsymbol{A}$ mají stejný počet prvků.*

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Podmnožinu $I \subseteq \boldsymbol{A} \setminus \{0\}$ se nazveme *nezávislou* pokud pro každé konečné $U, V \subseteq I$ platí, že

$$\bigvee U \wedge \bigvee V = \bigvee (U \cap V).$$

Lemma 6.5. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz. Podmnožina $I \subseteq \boldsymbol{A} \setminus \{0\}$ je nezávislá právě když*

$$\bigvee U \wedge \bigvee W = 0$$

pro každou dvojici konečných disjunktních $U, W \subseteq I$.

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ je zřejmá z definice. Ukážeme $(\Leftarrow)$. Nechť U a V jsou konečné podmnožny I. Protože $U \cap V \subseteq U$, plyne z modularity svazu $\boldsymbol{A}$, že

$$\begin{aligned}\bigvee U \wedge \bigvee V &= \bigvee U \wedge \Big(\bigvee (V \setminus U) \vee \bigvee (U \cap V)\Big)\\ &= \Big(\bigvee U \wedge \bigvee (V \setminus U)\Big) \vee \bigvee (U \cap V) = \bigvee (U \cap V),\end{aligned}$$

neboť množiny U a $V \setminus U$ jsou disjunktní. □

Lemma 6.6. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární. Množina $\{a_1, \ldots, a_n\}$ jeho nenulových prvků je nezávislá právě když*

$$a_k \wedge \bigvee_{i=1}^{k-1} a_i = 0,$$

pro všechna $k = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ je zřejmá. Implikaci $(\Leftarrow)$ ukážeme indukcí podle n. Jednoprvková množina $\{a_1\}$ je jistě nezávislá. Nechť X, Y jsou disjunktní podmnožiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Pokud $X \cup Y \subseteq \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, plyne rovnost $\bigvee X \cap \bigvee Y = 0$ z indukčního předpokladu. Nechť $a_n \in X \cup Y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_n \in X$. Potom $Y \subseteq \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ a z modularity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme, že

$$\begin{aligned}\bigvee X \wedge \bigvee Y &\leq \Big(\bigvee (X \setminus \{a_n\}) \vee a_n\Big) \wedge \bigvee_{i=1}^{n-1} a_i\\ &= \bigvee (X \setminus \{a_n\}) \vee \left(a_n \wedge \bigvee_{i=1}^{n-1} a_i\right)\\ &= \bigvee (X \setminus \{a_n\}) \vee 0 = \bigvee (X \setminus \{a_n\}).\end{aligned}$$

Proto
$$\bigvee X \wedge \bigvee Y = \bigvee (X \setminus \{a_n\}) \wedge \bigvee Y = 0,$$
opět podle indukčního předpokladu, neboť platí, že
$$(X \setminus \{a_n\}) \cup \bigvee Y \subseteq \{a_1, \dots, a_{n-1}\}.$$

$\square$

KAPITOLA 7

Kongruence svazů

Shrnutí. Definujeme svazové kongruence a ukážeme jak pro vhodné binární relace svazu ověřit, že se jedná o svazové kongruence. Popíšeme svaz $\operatorname{Con}(\boldsymbol{A})$ kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$. Nakonec ukážeme, že svaz kongruencí libovolného svazu je distributivní.

7.1. Vlastnosti svazových kongruencí. Nechť Θ je binární relace na množině A. Budeme psát $a \equiv_\Theta b$ (nebo také $a \equiv b\ (\Theta)$) pokud je dvojice $\langle a, b\rangle$ v relaci Θ. Předpokládejme, že je relace Θ ekvivalencí. Symbolem

$$[\,a\,]_\Theta := \{b \in A \mid a \equiv_\Theta b\}.$$

označíme třídou této ekvivalence obsahující prvek a.

Kongruence svazu $\boldsymbol{A}$ je ekvivalence Θ na $\boldsymbol{A}$ taková, že

$$a_1 \equiv_\Theta b_1 a_2 \equiv_\Theta b_2 \implies \begin{cases} a_1 \vee b_1 \equiv_\Theta a_2 \vee b_2, \\ a_1 \wedge b_1 \equiv_\Theta a_2 \wedge b_2, \end{cases} \tag{7.1}$$

pro všechna $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \boldsymbol{A}$. Připomeňme že, kongruence svazů jsou právě jádra svazových homomorfismů. Symbolem $\boldsymbol{A}/\Theta$ budeme značit *faktorový svaz* svazu $\boldsymbol{A}$ podle kongruence Θ (prvky svazu $\boldsymbol{A}/\Theta$ jsou rozkladové třídy $[\,a\,]_\Theta$, $a \in \boldsymbol{A}$, kongruence Θ. Symbolem $\pi_{\boldsymbol{A}/\theta}$ budeme značit *kanonickou projekci* $\pi_{\boldsymbol{A}/\theta} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}/\Theta$ určenou předpisem $a \mapsto [\,a\,]_\Theta$.

Podmnožina C uspořádané množiny $(P, \leq)$ je *konvexní* (v P) pokud

$$a \leq b \leq ca, c \in C \implies b \in C,$$

pro všechna $a, b, c \in P$.

Je vidět ihned z definice, že průnik konvexních množin je opět konvexní množina. Celá množina P je jistě konvexní v P. Proto pro libovolnou $X \subseteq P$ existuje nejmenší konvexní podmnožina P, která X obsahuje. Označíme ji $\updownarrow X$.

Lemma 7.1. *Pro každou $X \subseteq P$ platí, že*

$$\updownarrow X = \uparrow X \cap \downarrow X = \{p \in P \mid \exists a, b \in X \colon a \leq p \leq b\}.$$

Důkaz. Každá horní a každá dolní podmnožina uspořádané množiny P je konvexní. Odtud plyne, že

$$\updownarrow X \subseteq \uparrow X \cap \downarrow X.$$

Je-li $p \in {\uparrow}X \cap {\downarrow}X$, existují $a, b \in X$ tak, že $a \leq p \leq b$. Proto platí, že

$$ {\uparrow}X \cap {\downarrow}X \subseteq \{p \in P \mid \exists a, b \in X \colon a \leq p \leq b\}. $$

Nakonec existují-li $a, b \in X$ tak, že $a \leq p \leq b$, leží p v každé konvexní podmnožině P, která obsahuje množinu X. Odtud dostáváme, že

$$ \{p \in P \mid \exists a, b \in X \colon a \leq p \leq b\} \subseteq {\updownarrow}X. $$

□

TVRZENÍ 7.2. *Nechť Θ je kongruence svazu $\boldsymbol{A}$. Potom je $[\,a\,]_\Theta$ konvexním podsvazem svazu $\boldsymbol{A}$, pro každé $a \in \boldsymbol{A}$. Tj., bloky kongruence svazu jsou jeho konvexními podsvazy.*

DŮKAZ. Buď a prvek svazu $\boldsymbol{A}$. Protože jsou obě svazové operace idempotentní, je $[\,a\,]_\Theta$ podsvazem svazu $\boldsymbol{A}$.[1] Zbývá ukázat, že $[\,a\,]_\Theta$ je konvexní podmnožinou svazu $\boldsymbol{A}$. Nechť $b \leq c \leq d$, pro nějaké $b, d \in [\,a\,]_\Theta$ a $c \in \boldsymbol{A}$. Potom platí, že $a \equiv_\Theta b \equiv_\Theta d$, odkud dostaneme, že $a \equiv_\Theta b = b \wedge c \equiv_\Theta d \wedge c = c$. Proto platí také, že $c \in [\,a\,]_\Theta$. □

Podmínku (7.1) v definici kongruence svazu můžeme mírně oslabit.

LEMMA 7.3. *Ekvivalence Θ definovaná na svazu $\boldsymbol{A}$ je kongruencí tohoto svazu právě když*

$$ a \equiv_\Theta b \implies \begin{cases} a \vee t \equiv_\Theta b \vee t, \\ a \wedge t \equiv_\Theta b \wedge t, \end{cases} \tag{7.2} $$

pro všechna $a, b, t \in \boldsymbol{A}$.

DŮKAZ. Je-li Θ kongruence svazu $\boldsymbol{A}$, pak zřejmě splňuje podmínku (7.2). Předpokládejme naopak, že ekvivalence Θ splňuje podmínku (7.2). Předpokládejme, že $a_i \equiv_\Theta b_i$, $i = 1, 2$, pro nějaké $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$. Potom z (7.2) a komutativity svazových operací odvodíme, že

$$ \begin{aligned} a_1 \vee a_2 &\equiv_\Theta b_1 \vee a_2 \equiv_\Theta b_1 \vee b_2, \\ a_1 \wedge a_2 &\equiv_\Theta b_1 \wedge a_2 \equiv_\Theta b_1 \wedge b_2. \end{aligned} $$

Proto platí (7.1). □

Následující lemma je zvláště užitečné při ověřování toho, že nějaká binární relace na svazu $\boldsymbol{A}$ je jeho kongruencí.

LEMMA 7.4 (Grätzer). *Buď Θ reflexivní relace na svazu $\boldsymbol{A}$. Jsou-li splněny následující tři podmínky*

(1) *$a \equiv_\Theta b$ právě když $a \wedge b \equiv_\Theta a \vee b$, pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$,*
(2) *je-li $a \equiv_\Theta b$ a zároveň $b \equiv_\Theta c$, potom $a \equiv_\Theta c$, pro všechna $a \leq b \leq c$ v $\boldsymbol{A}$,*
(3) *je-li $a \equiv_\Theta b$, potom $a \vee t \equiv_\Theta b \vee t$ a zároveň $a \wedge t \equiv_\Theta b \wedge t$, pro všechna $a \leq b$ v $\boldsymbol{A}$ a libovolné $t \in \boldsymbol{A}$,*

[1] Pro každé $b, c \in [\,a\,]_\Theta$, je $b \vee c \equiv_\Theta a \vee a = a$ a proto $b \vee c \in [\,a\,]_\Theta$. Podobně pro průsek.

potom je Θ *kongruencí svazu* $\boldsymbol{A}$.

DŮKAZ. Z podmínky (1) je okamžitě vidět, že relace Θ je symetrická. Abychom ukázali, že je relace Θ ekvivalencí na $\boldsymbol{A}$, zbývá ověřit, že je tato relace tranzitivní. Nejprve ověříme, že

$$a \equiv_\Theta c \implies a \equiv_\Theta b \quad b \equiv_\Theta c, \tag{7.3}$$

pro všechna $a \leq b \leq c$ v $\boldsymbol{A}$. To plyne ihned z (3), neboť z $a \leq c$ dostaneme rovnosti $a = a \wedge b \equiv_\Theta c \wedge b = b$ a podobně $b = a \vee b \equiv_\Theta c \vee b = c$.

Pro $a \leq b$ v $\boldsymbol{A}$ označme symbolem b/a interval ohraničený prvky a, b, tj.,

$$b/a := \{t \in \boldsymbol{A} \mid a \leq t \leq b\}.$$

POMOCNÉ TVRZENÍ 1. Nechť $a \leq d$ v $\boldsymbol{A}$ a platí, že $a \equiv_\Theta d$. Potom $b \equiv_\Theta c$ pro každé $b, c \in d/a$.

DŮKAZ. Vzhledem k (1) stačí ukázat, že $b \wedge c \equiv_\Theta b \vee c$. Protože $a \leq b \wedge c \leq d$ a $a \equiv_\Theta d$, platí vzhledem k (7.3), že $b \wedge c \equiv_\Theta d$. Podobně máme $b \wedge c \leq b \vee c \leq d$. Vzhledem k (7.3) dostaneme, že $b \wedge c \equiv_\Theta b \vee c$. Podle (1) je pak $b \equiv_\Theta c$. $\perp$

Nyní jsme připraveni dokončit důkaz tranzitivity relace Θ. Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ a předpokládejme, že $a \equiv_\Theta b$ and $b \equiv_\Theta c$. Vzhledem k (1) platí, že $a \wedge b \equiv_\Theta a \vee b$, odkud vzhledem k Pomocnému tvrzení 1 plyne, že $a \wedge b \equiv_\Theta b \equiv_\Theta a \vee b$. Podobně z $b \wedge c \equiv_\Theta b \vee c$ odvodíme, že platí $b \wedge c \equiv_\Theta b \equiv_\Theta b \vee c$. Protože $b \wedge c \leq b \leq b \vee c$, plyne z podmínky (3), že $a \wedge b \wedge c \equiv_\Theta a \wedge b$ a současně $a \vee b \equiv_\Theta a \vee b \vee c$. Celkem tak máme

$$a \wedge b \wedge c \equiv_\Theta a \wedge b \equiv_\Theta b \equiv_\Theta a \vee b \equiv_\Theta a \vee b \vee c.$$

Protože tyto prvky tvoří rostoucí posloupnost, dostaneme z (2), že $a \wedge b \wedge c \equiv_\Theta a \vee b \vee c$. Protože $a, c \in (a \vee b \vee c)/(a \wedge b \wedge c)$, dostaneme z Pomocného tvrzení (1), že $a \equiv_\Theta c$. Ukázali jsme, že je relace Θ tranzitivní a tedy je to ekvivalence.

Zbývá ukázat, že ekvivalence Θ splňuje implikaci (7.2). Nechť $a, b, t \in \boldsymbol{A}$ a předpokládejme, že $a \equiv_\Theta b$. Vzhledem k (1) je pak $a \wedge b \equiv_\Theta a \vee b$. Z podmínky (3) dostaneme, že $a \wedge b \wedge t \equiv_\Theta (a \vee b) \wedge t$. Protože $a \wedge t, b \wedge t \in ((a \vee b) \wedge t)/(a \wedge b \wedge t)$, plyne z Pomocného tvrzení 1, že $a \wedge t \equiv_\Theta b \wedge t$. Podobně bychom ukázali, že $a \vee t \equiv_\Theta b \vee t$. Z Lemmatu 7.3 nyní plyne, že Θ je kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$. $\square$

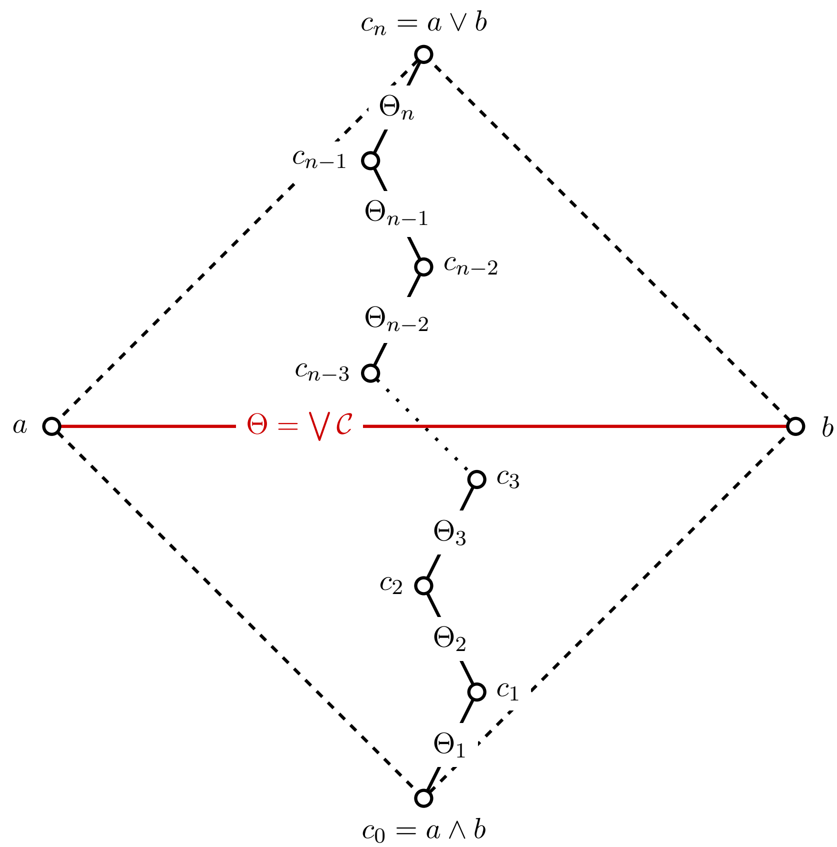
Připomeňme, že svaz $\boldsymbol{A}$ nezveme *úplným*, má-li každá jeho podmnožina infimum a supremum, vzhledem k uspořádání indukovanému svazovými operacemi. Infimum (resp. supremum) podmnožiny M svazu $\boldsymbol{A}$ budeme značit $\bigwedge M$ a $\bigvee M$.

Všimněme si, že úplný svaz má nejmenší a největší prvek. Tyto prvky odpovídají po řadě spojení a průseku $\bigvee \emptyset$ a $\bigwedge \emptyset$. Z definice svazových operací je také vidět, že $\bigwedge\{a, b\} = a \wedge b$ a $\bigvee\{a, b\} = a \vee b$, pro každou dvojici prvků a, b svazu.

Každý systém $\boldsymbol{U}$ podmnožin množiny A uzavřený na libovolné průniky tvoří úplný svaz. Přitom platí, že pro každou $M \subseteq \boldsymbol{U}$ je

$$\bigwedge M = \bigcap M \quad \bigvee M = \bigcap\{N \in \boldsymbol{U} \mid \bigcup M \subseteq N\}.$$

Průnik libovolné množiny kongruencí svazu je opět kongruence svazu. Proto tvoří všechny kongruence svazu $\boldsymbol{A}$ úplný svaz. Svaz všech kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$ budeme značit Con $\boldsymbol{A}$.



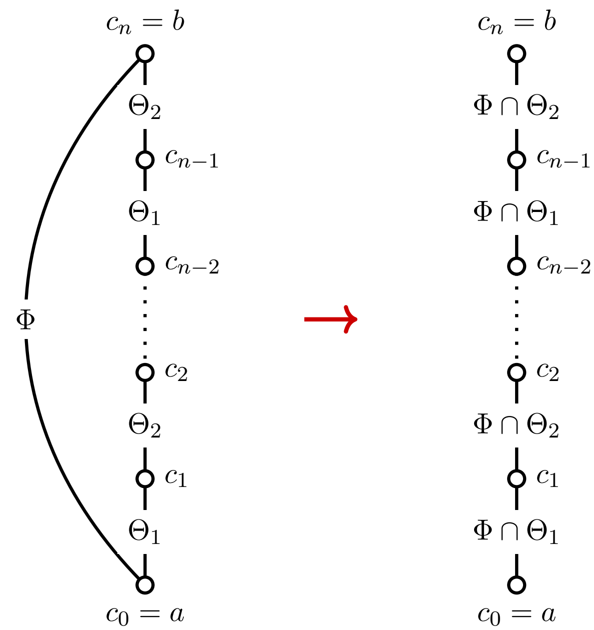
Obrázek 7.1. Spojení kongruencí

Lemma 7.5. *Buď $\mathcal{C}$ množina kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$. Na svazu $\boldsymbol{A}$ definujme relaci Θ takto: Nechť $a, b \in \boldsymbol{A}$. Potom $a \equiv_\Theta b$ právě když existuje konečná rostoucí posloupnost $a \wedge b = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_{n-1} \leq c_n = a \vee b$ v $\boldsymbol{A}$ taková, že pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existuje kongruence $\Theta_j \in \mathcal{C}$ taková, že $c_{j-1} \equiv_{\Theta_j} c_j$.*

Relace Θ je kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$ a platí, že $\Theta = \bigvee \mathcal{C}$.

Důkaz. K důkazu první části lemmatu stačí ověřit, že relace Θ splňuje podmínky (1-3) z předpokladů Lemmatu 7.4. Všechny tyto podmínky však nahlédneme okamžitě z vlastností kongruencí a z popisu relace Θ. Z definice je ihned vidět, že $\bigcup \mathcal{C} \subseteq \Theta$. Naopak je zřejmé, že každá kongruence svazu $\boldsymbol{A}$, která obsahuje $\bigcup \mathcal{C}$ obsahuje také relaci Θ. Proto platí, že $\Theta = \bigvee \mathcal{C}$. □

Věta 7.6 (Fynayama a Nakayama (1942)). *Svaz* Con $\boldsymbol{A}$ *kongruencí svazu* $\boldsymbol{A}$ *je distributivní.*



Obrázek 7.2. Svaz Con $\boldsymbol{A}$ je distributivní

Důkaz. Stačí ověřit, že pro libovolné kongruence Φ, Θ_1, a Θ_2 svazu $\boldsymbol{A}$ platí inkluze

$$\Phi \cap (\Theta_1 \vee \Theta_2) \subseteq (\Phi \cap \Theta_1) \vee (\Phi \cap \Theta_2),$$

tedy, že pro libovolné $a, b \in \boldsymbol{A}$ platí, že

$$a \equiv b \quad (\Phi \cap (\Theta_1 \vee \Theta_2)) \implies a \equiv b \quad ((\Phi \cap \Theta_1) \vee (\Phi \cap \Theta_2)).$$

Dvojici a, b můžeme nahradit uspořádanou dvojicí $a \wedge b, a \vee b$. Proto lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \leq b$. Předpokládejme, že $a \equiv b$ $(\Phi \cap (\Theta_1 \vee \Theta_2))$. To znamená, že $a \equiv_\Phi b$ a zároveň $a \equiv_{\Theta_1 \vee \Theta_2} b$. Z Lemmatu 7.5 a z druhé z uvedených relací plyne, že existuje rostoucí posloupnost $a = c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n = b$ taková, že $c_{i-1} \equiv_{\Theta_1} c_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ liché a $c_{i-1} \equiv_{\Theta_2} c_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sudé. Můžeme totiž předpokládat, že kongruence Θ_1 a Θ_2 se v rostocím řetízku intervalů (c_{i-1}, c_i) střídají. Situace je znázorněna na Obrázku 7.2. Protože $a \equiv_\Phi b$ a $a = c_0 \leq c_1, \ldots, c_{n-1} \leq c_n = b$, platí, že $c_{i-1} \equiv_\Phi c_i$, pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odtud plyne, že $c_{i-1} \equiv_{\Phi \cap \Theta_1} c_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ liché a $c_{i-1} \equiv_{\Phi \cap \Theta_2} c_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

sudé. Odtud nakonec dostáváme, že $a \equiv b \ ((\Phi \cap \Theta_1) \vee (\Phi \cap \Theta_2))$, což bylo dokázat. $\square$

KAPITOLA 8

Hlavní kongruence, projektivita a slabá projektivita

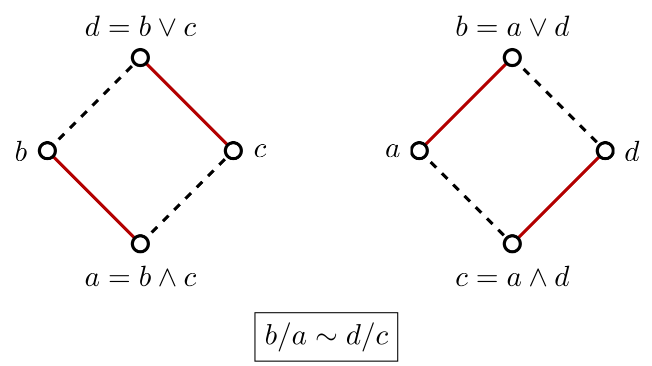
SHRNUTÍ. Definujeme perspektivitu a slabou perspektivitu intervalů svazu. Tranzitivní obaly těchto relací nazveme projektivitou a slabou projektivitou. Pomocí slabé projektivity popíšeme vztahy mezi hlavními kongruencemi svazu.

Pro každou dvojici a, b prvků svazu $\boldsymbol{A}$ označme symbolem $\Theta(a, b)$ nejmenší kongruenci svazu $\boldsymbol{A}$ obsahující dvojici $\langle a, b\rangle$. Budeme zkoumat, kdy pro danou čtveřici prvků $a, b, c, d \in \boldsymbol{A}$ platí, že $\Theta(a, b) \subseteq \Theta(c, d)$. Protože $\Theta(a, b) = \Theta(a \wedge b, a \vee b)$, můžeme se omezit na uspořádané dvojice $a \leq b$ z $\boldsymbol{A}$.

Nechť $a \leq b$ a $c \leq d$ jsou dvojice uspořádaných prvků svazu $\boldsymbol{A}$. Řekneme, že interval d/c je *perspektivní* intervalu b/a (což označíme $d/c \sim b/a$), jestliže nastane jeden z těchto dvou případů:

$$\begin{cases} b = a \vee d \text{ a zároveň } c = a \wedge d, \\ a = b \wedge c \text{ a zároveň } d = b \vee c. \end{cases}$$

Oba případy, definující perspektivitu intervalů jsou znázorněny na Obrázku 8.1:

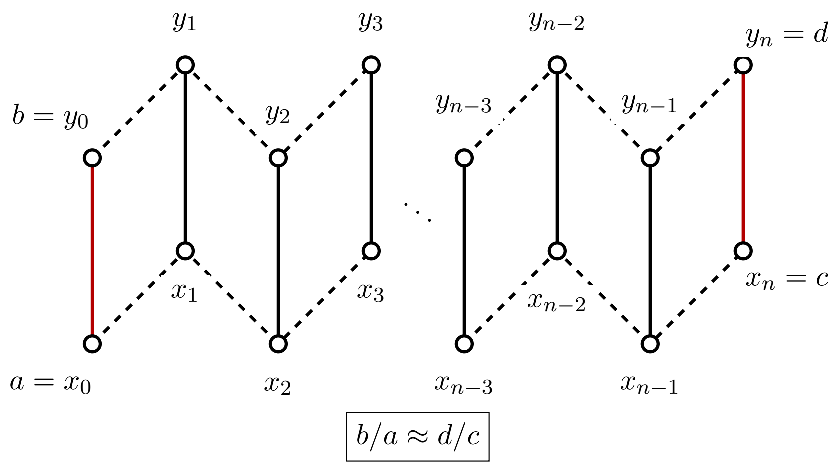


OBRÁZEK 8.1. Perspektivita intervalů

Řekneme, že interval d/c je *projektivní* intervalu b/a (což označíme $d/c \approx b/a$), jestliže existuje konečná posloupnost

$$d/c = y_0/x_0 \sim y_1/x_1 \sim \cdots \sim y_n/x_n = b/a.$$

Projektivita intervalů je znázorněna na Obrázku 8.2.



Obrázek 8.2. Projektivita intervalů

Je zřejmé, že $d/c \approx b/a \implies \Theta(a,b) = \Theta(c,d)$. Obrácená implikace obecně neplatí. Ve svazu $\boldsymbol{M_3}$ je $a/0 \not\approx 1/0$ a zároveň je svaz $\boldsymbol{M_3}$ jednoduchý a tedy platí rovnost $\Theta(0,1) = \Theta(0,a)$.

Zkoumejme, kdy $\Theta(a,b) \subseteq \Theta(c,d)$. K tomu definujme slabší relace (než perspektivita a projektivita) na množině intervalů. Buď b/a, d/c dvojice jeho intervalů svazu $\boldsymbol{A}$. Budeme psát

$$d/c \searrow b/a, \quad \text{jestliže} \quad a \leq b \wedge c \quad \text{a zároveň} \quad d \leq b \vee c,$$
$$d/c \nearrow b/a, \quad \text{jestliže} \quad b \geq a \vee d \quad \text{a zároveň} \quad c \geq a \wedge d.$$

Řekneme, že interval d/c je *slabě perspektivní* intervalu b/a jestliže platí $d/c \searrow b/a$ nebo $d/c \nearrow b/a$. Situaci, kdy je d/c je slabě perspektivní b/a zachycuje Obrázek 8.3.

Řekneme, že d/c je *slabě projektivní* b/a (což značíme $d/c \rightrightarrows b/a$), jestliže existuje posloupnost intervalů

$$d/c = y_0/x_0 \searrow y_1/x_1 \nearrow y_2/x_2 \searrow \dots \nearrow y_n/x_n = b/a.$$

Všimněme si, že na rozdíl od projektivity není relace slabé projektivity symetrická, je pouze reflexivní a tranzitivní[1].

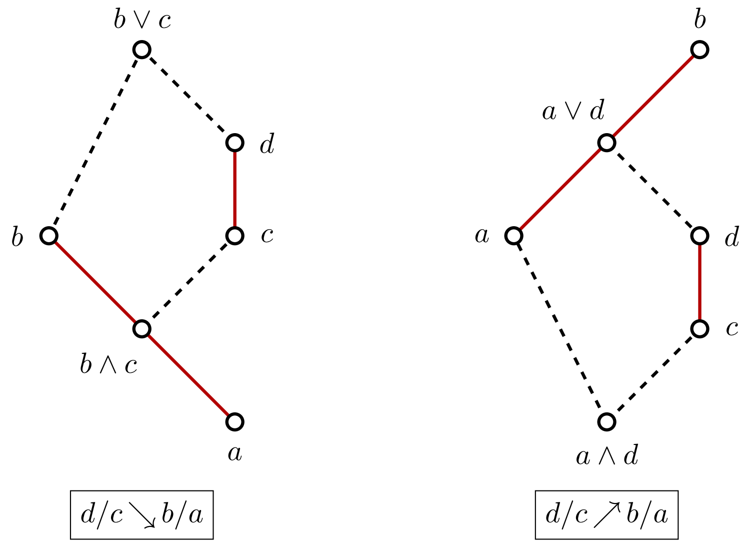
Lemma 8.1. *Pro intervaly b/a a d/c svazu $\boldsymbol{A}$ platí, že $d/c \rightrightarrows b/a$ právě když existuje posloupnost intervalů*

$$d/c = y_0/x_0 \sim v_1/u_1 \subseteq y_1/x_1 \sim \cdots \sim v_n/u_n \subseteq y_n/x_n = b/a.$$

Důkaz. ($\Leftarrow$) Z definic ihned nahlédneme, že z $y/x \sim v/u$ vyplývá buďto $y/x \searrow v/u$ nebo $y/x \nearrow v/u$. Inkluze $v/u \subseteq y/x$ implikuje, že platí současně $v/u \searrow y/x$ a $v/u \nearrow y/x$. ($\Rightarrow$) Jestliže $d/c \searrow b/a$, pak podle definice platí, že

$$d/c \subseteq (b \vee c)/c \sim b/(b \wedge c) \subseteq b/a.$$

[1] Všimněme si, že (slabá) projektivita je právě tranzitivním obalem (slabé) perspektivity



Obrázek 8.3. Slabá perspektivita

Podobně z $d/c \nearrow b/a$ plyne, že

$$d/c \subseteq d/(a \wedge d) \sim (a \vee d)/a \subseteq b/a.$$

□

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme indukcí svazový term $p_n(x, y_1, \dots, y_n)$ takto:

$$p_1(x, y_1) := x \wedge y_1,$$

$$p_{n+1}(x, y_1, \dots, y_{n+1}) := \begin{cases} p_n(x, y_1, \dots, y_n) \vee y_{n+1}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ p_n(x, y_1, \dots, y_n) \wedge y_{n+1}, & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Neformálně je tedy

$$p_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} (((x \wedge y_1) \vee y_2) \wedge \dots \vee y_n), & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ (((x \wedge y_1) \vee y_2) \wedge \dots \wedge y_n), & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$$

Snadno nahlédneme, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$p_n(p_m(x, y_1, \dots, y_m), y_{m+1}, \dots, y_{m+n}) =$$

$$\begin{cases} p_{m+n}(x, y_1, \dots, y_{m+n}), & \text{pokud je } m \text{ sudé}, \\ p_{m+n-1}(x, \dots, y_m \wedge y_{m+1}, \dots, y_{m+n}), & \text{pokud je } m \text{ liché}. \end{cases}$$

Lemma 8.2. *Pro dvojici intervalů b/a a d/c svazu $\boldsymbol{A}$ platí, že $d/c \rightrightarrows b/a$ právě když existuje posloupnost $t_1, \dots, t_n$ prvků svazu $\boldsymbol{A}$ taková, že $p_n(a, t_1, \dots, t_n) = c$ a $p_n(b, t_1, \dots, t_n) = d$.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Je-li $d/c \searrow b/a$, potom $p_3(a, b, c, d) = c$ a $p_3(b, b, c, d) = d$. Pokud $d/c \nearrow b/a$, tak $p_2(a, d, c) = c$ a $p_2(b, d, c) = d$. Využijeme-li předchozího pozorování, sestrojíme odtud požadovanou posloupnost $t_1, \dots, t_n$. ($\Leftarrow$)

Všimněme si, že pro každý interval y/x svazu $\boldsymbol{A}$ a každé $t \in \boldsymbol{A}$ platí, že

$$(y \vee t)/(x \vee t) \searrow y/x \quad \text{a} \quad (y \wedge t)/(x \wedge t) \nearrow y/x.$$

Odtud indukcí odvodíme, že pro každé přirozené číslo n a každou n-tici prvků $t_1, \ldots, t_n$ platí, že

$$p_n(b, t_1, \ldots, t_n)/p_n(a, t_1, \ldots, t_n) \rightrightarrows b/a.$$

□

Protože p_n jsou svazové termy, platí pro každou posloupnost $t_1, \ldots, t_n$ prvků svazu $\boldsymbol{A}$ a každé $a, b \in \boldsymbol{A}$, že

$$p_n(a, t_1, \ldots, t_n) \equiv_{\Theta(a,b)} p_n(b, t_1, \ldots, t_n).$$

Proto z Lemmatu 8.2 plyne, že

Důsledek 8.3. *Pro každou dvojici intervalů b/a a d/c svazu $\boldsymbol{A}$ plyne z $d/c \rightrightarrows b/a$, že $c \equiv_{\Theta(a,b)} d$.*

Lemma 8.4. *Buď b/a interval svazu $\boldsymbol{A}$. Na svazu $\boldsymbol{A}$ definujme relaci Φ takto: $x \equiv_\Phi y$ právě když existuje konečná posloupnost*

$$x \wedge y = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = x \vee y$$

v $\boldsymbol{A}$ taková, že $t_j/t_{j-1} \rightrightarrows b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom je relace Φ kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$ a platí rovnost $\Phi = \Theta(a, b)$.

Důkaz. Nejprve ukažme, že je relace Φ kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$. K tomu stačí ověřit, že relace Φ splňuje podmínky Lemmatu 6.4. Protože pro každé $t \in \boldsymbol{A}$ platí, že $t/t \nearrow (b \vee t)/(a \vee t) \searrow b/a$, je tato relace reflexivní. Podmínky (1) a (2) Lemmatu 6.4 jsou zřejmě splněny. Předpokládejme, že pro nějakou dvojici $c \leq d$ prvků svazu $\boldsymbol{A}$ platí, že $c \equiv_\Phi d$ a nechť $s \in \boldsymbol{A}$. Podle definice existuje konečná posloupnost $c = t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n = d$ taková, že $t_j/t_{j-1} \rightrightarrows b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odtud dostaneme že, $c \vee s = t_0 \vee s \leq t_1 \vee s \leq \cdots \leq t_n \vee s = d \vee s$. Ze vztahů $(t_j \vee s)/(t_{j-1} \vee s) \searrow t_{i=1}/t_i \rightrightarrows b/a$, dostanem, že $(t_j \vee s)/(t_{j-1} \vee s) \rightrightarrows b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Podle definice relace Φ je pak $c \vee s \equiv_\Phi d \vee s$. Podobně bychom ukázali, že $c \wedge s \equiv_\Phi d \wedge s$. Podle Lemmatu 6.4 je relace Φ kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$.

Z definice Φ je vidět, že $a \equiv_\Phi b$ a tedy $\Theta(a, b) \subseteq \Phi$. Podle Důsledku 8.3 je naopak $\Phi \subseteq \Theta(a, b)$. Proto se obě kongruence rovnají. □

Jemným přeformulováním Lemmatu 8.4 dostaneme následující větu.

Věta 8.5 (Dilworth 1950). *Buď b/a a d/c dvojice intervalů svazu $\boldsymbol{A}$. Potom platí, že $\Theta(c, d) \subseteq \Theta(a, b)$ právě když existuje konečná posloupnost $c = t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n = d$ ve svazu $\boldsymbol{A}$ taková, že $t_j/t_{j-1} \rightrightarrows b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

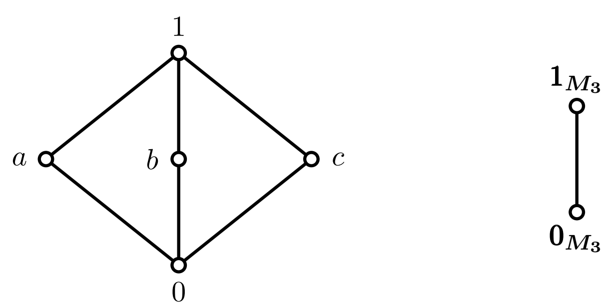
8.1. Svaz kongruencí svazů $\boldsymbol{M}_3$ a $\boldsymbol{N}_5$. Popíšeme svazy kongruencí svazů $\boldsymbol{M}_3$ a $\boldsymbol{N}_5$. V obou případech to je jednoduchá úloha. Svaz kongruencí konečného svazu je konečný distributivní svaz. Ten je izomorfní svazu dolních podmnožin uspořádané množiny spojově nerozložitelných kongruencí.

Dvouprvkový interval budeme nazývat *prvointervalem*. Tedy prvointerval je interval b/a pro $a \prec b$.

LEMMA 8.6. *Spojově nerozložitelné konguence konečného svazu jsou právě kongruence generované prvointervaly.*

DŮKAZ. Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz a $a, b \in A$ takové, že $a \prec b$. Předpokládejme, že $\Theta(a,b) = \Phi \vee \Psi$ pro některé $\Phi, \Psi \in \mathrm{Con}(\boldsymbol{A})$. Potom existuje řetízek $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ takový, že $x_i \equiv_\Phi x_{i+1}$ nebo $x_i \equiv_\Psi x_{i+1}$ pro každé $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Protože $a \prec b$, plyne odtud, že $\Theta(a,b) \in \{\Phi, \Psi\}$.

Nyní předpokládejme, že Θ je spojově nerozložitelná kongruence svazu $\boldsymbol{A}$. Protože je $\boldsymbol{A}$ konečný svaz, existují $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, v A takové, že $\Theta = \bigvee_{i=1}^{n} \Theta(a_i, b_i)$. Protože je Θ spojově nerozložitelná, existuje $j \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $\Theta = \Theta(a_j, b_j)$. Protože je svaz konečný, existuje posloupnost $a_j = c_0 \prec c_1 \prec \cdots \prec c_k = b_j$. Pak platí, že $\Theta = \bigvee_{i=0}^{k-1} \Theta(c_i, c_{i+1})$. Protože je Θ spojově nerozložitelná, existuje $l \in \{0, \ldots, k-1\}$ takové, že $\Theta = \Theta(c_l, c_{l+1})$. $\square$



OBRÁZEK 8.4. Svazy $\boldsymbol{M_3}$ a $\mathrm{Con}(\boldsymbol{M_3})$

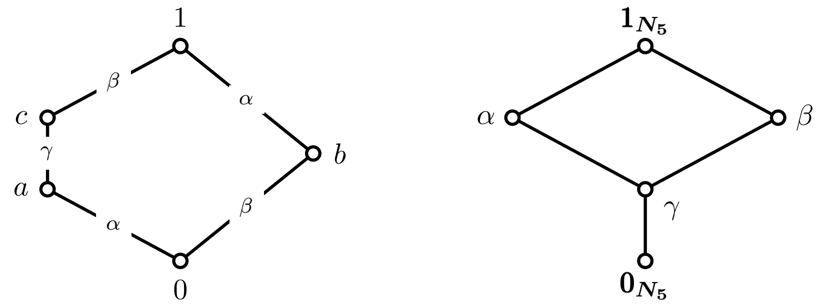
PŘIKLAD 8.1. ***Svaz kongruencí svazu $\boldsymbol{M_3}$:*** *Označme $\mathbf{0}_{\boldsymbol{M}_3}$ nejmenší a $\mathbf{1}_{\boldsymbol{M_3}}$ největší kongruenci svazu $\boldsymbol{M_3}$. Tedy $u \equiv_{\mathbf{0}_{\boldsymbol{M}_3}} v$ právě když $u = v$ pro všechna $u, v \in M_3$ a $\mathbf{1}_{\boldsymbol{M}_3} = \Theta(0,1)$. Snadno nahlédneme, že*

$$a/0 \sim 1/b \sim \Theta(c)/0 \sim 1/a \sim b/0 \sim 1/c.$$

Proto jsou každé dva prvointervaly svazu $\boldsymbol{M_3}$ projektivní. Odtud plyne, že

$$\Theta(0,a) = \Theta(b,1) = \Theta(0,c) = \Theta(a,1) = \Theta(0,b) = \Theta(c,1) = \mathbf{1}_{\boldsymbol{M_3}}$$

Proto platí, že $\mathrm{Con}(\boldsymbol{M_3}) \simeq \boldsymbol{C_2}$, a tedy svaz $\boldsymbol{M_3}$ je jednoduchý.



Obrázek 8.5. Svazy $\boldsymbol{N_5}$ a $\mathrm{Con}(\boldsymbol{N_5})$

Příklad 8.2. ***Svaz kongruencí svazu $\boldsymbol{N_5}$:*** *Označme $\mathbf{0}_{\boldsymbol{N}_5}$ nejmenší a $\mathbf{1}_{\boldsymbol{N_5}}$ největší kongruenci svazu $\boldsymbol{N_5}$. Snadno nahlédneme, že*

$$a/0 \sim 1/b \sim c/0, \ \text{a že } 1/c \sim b/0 \sim 1/a.$$

Položme $\alpha = \Theta(0,a) = \Theta(b,1)$, $\beta = \Theta(0,b) = \Theta(c,1)$ a $\gamma = \Theta(a,c)$. Přiřazením $0,a,c \mapsto 0$ a $b,1 \mapsto 1$ definujeme homomorfimus $\varphi\colon \boldsymbol{N_5} \to \boldsymbol{C_2}$ takový, že $\alpha = \ker\varphi \neq \beta$. Přiřazením $0,b \mapsto 0$ a $a,c,1 \mapsto 1$ definujeme homomorfismus $\psi\colon \boldsymbol{N_5} \to \boldsymbol{C_2}$ takový, že $\beta = \ker\psi \neq \alpha$. Z definic navíc vidíme, že $\gamma = \ker\varphi \cap \ker\psi$. Odtud plyne, že svaz $\boldsymbol{N_5}$ má tři spojivě nerozložitelné kongruence α, β a γ takové, že $\gamma = \alpha \wedge \gamma$ je nejmenší z nich.

KAPITOLA 9

Semimodulární svazy a dimenze

SHRNUTÍ. Definujeme semimodulární a duálně semimodulární svazy a ukážeme, že obě vlastnosti jsou důsledkem modularity. Zformulujeme a ukážeme Jordanovu-Holderovu-Oreho větu o délkách maximálních řetězců v semimodulárních svazech. Definujeme dimenzi prvků svazů lokálně konečné délky. Ukážeme, že semimodularitu, duální semimodularitu a modularitu lokálně konečných svazů lze charakterizovat pomocí dimenzní funkce, konkrétně pomocí analogie věty o dimenzi průniku a spojení známé z lineární algebry..

V uspořádané množině $(P, \leq)$ značíme $a \preceq b$ pokud $a \prec b$ nebo $a = b$, tj., pokud $b/a = \{a, b\}$.

Svaz $\boldsymbol{A}$ je *semimodulární* pokud

$$a \prec b \implies a \vee c \preceq b \vee c,$$

pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

Svaz $\boldsymbol{A}$ je *duálně semimodulární* pokud

$$a \prec b \implies a \wedge c \preceq b \wedge c,$$

pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

LEMMA 9.1. *Každý modulární svaz je semimodulární.*

DŮKAZ. Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz a nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ jsou takové, že $a \prec b$. Je-li $b \leq a \vee c$ je $a \vee c = b \vee c$. V opačném případě dostaneme z modularity svazu $\boldsymbol{A}$, že

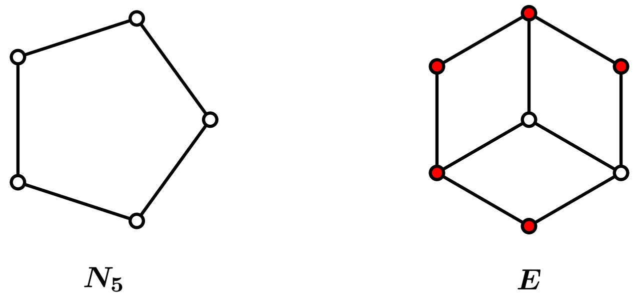
$$a \leq (a \vee c) \wedge b = a \vee (c \wedge b) \leq b. \tag{9.1}$$

Protože platí, že $a \prec b$ a $b \nleq a \vee c$, dostaneme z (9.1) rovnost $a = (a \vee c) \wedge b$. Vzhledem k Lemmatu 6.1 jsou intervaly $b/a = b \wedge ((a \vee c) \wedge b)$ a $(b \vee c)/(a \vee c) = (b \vee (a \vee c))/(a \vee c)$ izomorfní. Odtud plyne, že $a \vee c \prec b \vee c$. □

Z Lemmatu 9.1 je ihned vidět, že

DŮSLEDEK 9.2. *Každý modulární svaz je duálně semimodulární.*

Na Obrázku 9.1 jsou znázorněny svazy $\boldsymbol{N_5}$ a $\boldsymbol{E}$. Svaz $\boldsymbol{N_5}$ není modulární, semimodulární ani duálně semimodulární. Svaz $\boldsymbol{E}$ je semimodulární, ale není duálně semimodulární a tedy ani modulární. Červeně jsou znázorněny vrcholy tvořící podsvaz svazu $\boldsymbol{E}$ izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$.



Obrázek 9.1. (Ne)semimodulární svazy

Svaz $\boldsymbol{A}$ je *konečné délky* pokud existuje přirozené číslo n tak, že každý řetězec ve svazu $\boldsymbol{A}$ je délky nejvýše n. Nejmenší takové n nazveme *délkou* svazu $\boldsymbol{A}$ a označíme $\ell(\boldsymbol{A})$ (viz. Přednáška 5). Všimněme si, že svaz konečné délky je nutně omezený, tj., že má nejmenší a největší prvek.

Pro řetězce $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ a $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_m$ ve svazu $\boldsymbol{A}$ píšeme

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle \mathrel{\mathring{=}} \langle b_0, b_1, \ldots, b_m \rangle$$

pokud $n = m$ a existuje permutace π množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že

$$a_j / a_{j-1} \approx b_{\pi(j)} / b_{\pi(j)-1},$$

pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$[1]. Snadno nahlédneme, že relace $\mathrel{\mathring{=}}$ je ekvivalencí na množině všech řetězců ve svazu $\boldsymbol{A}$.

Věta 9.3 (Jordanova-Hölderova-Oreova věta). *Buď $\boldsymbol{A}$ semimodulární svaz konečné délky. Jsou-li $0 = a_0 \prec a_1 \prec \cdots \prec a_n = 1$ a $0 = b_0 \prec b_1 \prec \cdots \prec b_m = 1$ maximální řetězce ve svazu $\boldsymbol{A}$, potom*

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle \mathrel{\mathring{=}} \langle b_0, b_1, \ldots, b_m \rangle.$$

Důkaz. Větu ukážeme indukcí podle délky $\ell(\boldsymbol{A})$ svazu $\boldsymbol{A}$. Je-li $\ell(\boldsymbol{A}) = 0$ je svaz $\boldsymbol{A}$ triviální, je-li $\ell(\boldsymbol{A}) = 1$ je $\boldsymbol{A}$ dvouprvkový svaz. V obou těchto případech věta zřejmě platí.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $m \leq n$, a že $\ell(\boldsymbol{A}) = n$. Navíc předpokládejme, že věta platí ve všech svazech délky nejvýše $n-1$. Všimněme si, že $\ell(1/a_1) = n - 1$. V opačném případě by totiž svaz $\boldsymbol{A}$ obsahoval řetězec délky větší než $n = \ell(\boldsymbol{A})$.

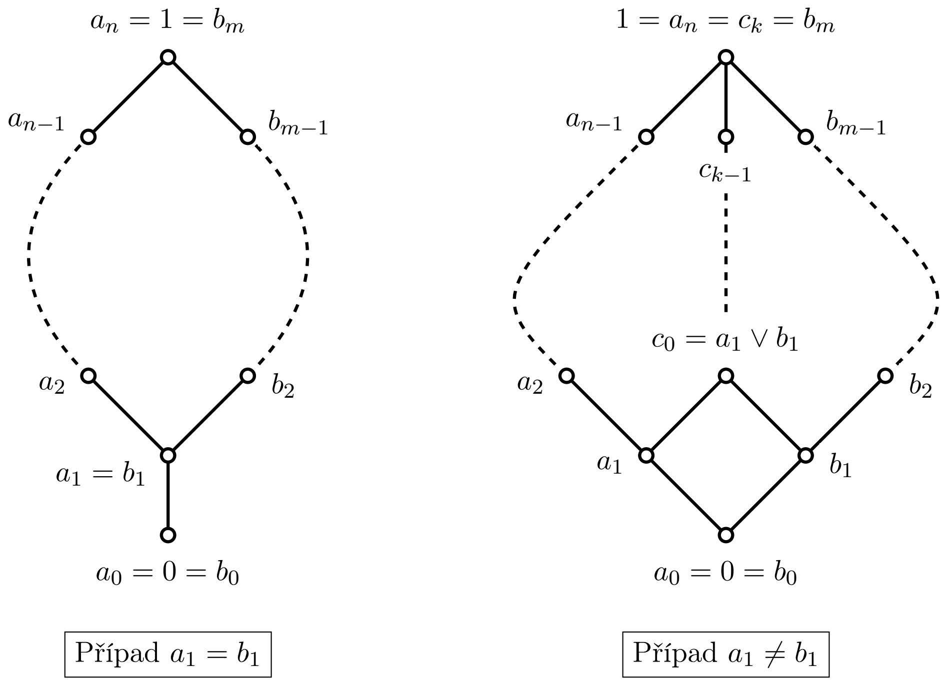
Jsou-li prvky a_1 a b_1 porovnatelné, plyne z $0 = a_0 \prec a_1$ a $0 = b_0 \prec b_1$, že $a_1 = b_1$. Podle indukčního předpokladu platí relace

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mathrel{\mathring{=}} \langle b_1, \ldots, b_m \rangle.$$

Odtud ihned plyne, že také

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle \mathrel{\mathring{=}} \langle b_0, b_1, \ldots, b_m \rangle.$$

[1]Intervaly a_j/a_{j-1} a $b_{\pi(j)}/b_{\pi(j)-1}$ jsou projektivní (cf. Přednáška 8).



Obrázek 9.2. Jordanova-Hölderova-Oreho věta

Předpokládajme nyní, že jsou prvky a_1 a b_1 neporovnatelné. V tomto případě je $a_1 < a_1 \vee b_1$, a protože je svaz $\boldsymbol{A}$ semimodulární, plyne z $0 \prec b_1$, že $a_1 \prec a_1 \vee b_1$. Podobně ukážeme, že $b_1 \prec a_1 \vee b_2$. Navíc z $0 \prec a_1 \nleq b_1$ plyne, že $0 = a_1 \wedge b_1$. Odtud je vidět, že $a_1/a_0 \sim (a_1 \vee b_1)/b_1$ a také, že $b_1/b_0 \sim (a_1 \vee b_1)/a_1$. Proto platí, že

$$\langle a_0, a_1, a_1 \vee b_1 \rangle \mathrel{\mathring{=}} \langle b_0, b_1, a_1 \vee b_1 \rangle. \tag{9.2}$$

Buď $a_1 \vee b_1 = c_0 \prec c_1 \prec \cdots \prec c_k = 1$ maximální řetězec v intervalu $1/(a_1 \vee b_1)$. Protože $\ell(1/a_1) \leq n-1$, platí podle indukčního předpokladu, že

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \mathrel{\mathring{=}} \langle a_1, c_0, c_1, \ldots, c_k \rangle. \tag{9.3}$$

Odtud plyne, že $k = n - 2$. Vidíme, že $0 = a_0 \prec b_1 \prec c_0 \prec c_1 \prec \cdots \prec c_k$ je řetězec ve svazu $\boldsymbol{A}$ maximální možné délky n. Odtud nahlédneme, že $\ell(1/b_1) = n - 1$. Podle indukčního předpokladu je

$$\langle b_1, c_0, c_1, \ldots, c_k \rangle \mathrel{\mathring{=}} \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle. \tag{9.4}$$

Protože $a_0 = 0 = b_0$ a $c_0 = a_1 \vee b_1$ dostaneme z (9.2), že

$$\langle a_0, a_1, c_0, c_1, \ldots, c_k \rangle \mathrel{\mathring{=}} \langle b_0, b_1, c_0, c_1, \ldots, c_k \rangle.$$

Odtud, z (9.3), (9.4) a z tranzitivity relace $\mathrel{\mathring{=}}$ dostaneme, že

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle \mathrel{\mathring{=}} \langle b_0, b_1, \ldots, b_m \rangle.$$

$\square$

Okamžitým důsledkem Věty 9.3 je, že

Důsledek 9.4. *V semimodulárním svazu konečné délky mají všechny maximální řetězce stejnou délku.*

Řeknem, že svaz $\boldsymbol{A}$ je *lokálně konečné délky*, je-li b/a konečné délky pro všechna $a \leq b$ v $\boldsymbol{A}$. Buď $\boldsymbol{A}$ svaz lokálně konečné délky s nejmenším prvkem. Pro každé $a \in \boldsymbol{A}$ položme $\dim a = \ell(a/0)$. Z definic ihned plyne, že je-li $\boldsymbol{A}$ svaz lokálně konečné délky s nejmenším prvkem, potom

$$\dim a + \ell(b/a) \leq \dim b, \tag{9.5}$$

pro všechny uspořádané dvojice $a \leq b$ v $\boldsymbol{A}$. Je-li svaz $\boldsymbol{A}$ navíc semimodulární, plyne z Věty 9.3, že

$$\dim a + \ell(b/a) = \dim b, \tag{9.6}$$

pro všechny uspořádané dvojice $a \leq b$ v $\boldsymbol{A}$.

Buď $\boldsymbol{A}$ semimodulární lokálně konečné délky a $a, b \in \boldsymbol{A}$. Indukcí podle $n := \ell(b/a \wedge b)$ dostaneme nerovnost

$$\ell(a \vee b/a) \leq \ell(b/a \wedge b). \tag{9.7}$$

Věta 9.5. *Svaz $\boldsymbol{A}$ lokálně konečné délky s nejmenším prvkem je semimodulární právě když*

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) \leq \dim a + \dim b, \tag{9.8}$$

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Buď $\boldsymbol{A}$ semimodulární svaz konečné délky s nejmenším prvkem a nechť $a, b \in \boldsymbol{A}$. Dvojí aplikací (9.6) dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} \dim(a \vee b) &= \dim a + \ell(a \vee b/a), \\ \dim(a \wedge b) &= \dim b - \ell(b/a \wedge b), \end{aligned} \tag{9.9}$$

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$. Z (9.9) a nerovnosti (9.7) odvodíme (9.8). ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ je svaz lokálně konečné délky splňující (9.8). Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ jsou takové, že $a \prec b$. Pokud platí $b \leq a \vee c$, je nutně $a \vee c = b \vee c$. V případě, že $b \nleq a \vee c$, plyne z $a \prec b$ rovnost $a = b \wedge (a \vee c)$. Z nerovnosti (9.8) dostaneme, že

$$\dim a + \dim(b \vee c) \leq \dim b + \dim(a \vee c). \tag{9.10}$$

Z nerovností (9.5) a (9.10) odvodíme, že

$$\ell(b \vee c/a \vee c) \leq \dim(b \vee c) - \dim(a \vee c) \leq \dim b - \dim a \leq 1.$$

□

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz lokálně konečné délky s největším prvkem. Pro $a \in \boldsymbol{A}$ položme

$$\operatorname{codim} a = \ell(1/a).$$

Duální formou Věty 9.5 je

Důsledek 9.6. *Svaz* $\boldsymbol{A}$ *lokálně konečné délky s největším prvkem je duálně semimodulární právě když*

$$\operatorname{codim}(a \wedge b) + \operatorname{codim}(a \vee b) \leq \operatorname{codim} a + \operatorname{codim} b,$$

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$.

Věta 9.7. *Svaz* $\boldsymbol{A}$ *lokálně konečné délky s nejmenším prvkem je modulární právě když*

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) = \dim a + \dim b, \tag{9.11}$$

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Postačí ověřit, že dokazovaná ekvivalence platí pro každý interval $c/0$, $c \in \boldsymbol{A}$. Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že svaz $\boldsymbol{A}$ je konečné délky.

($\Rightarrow$) Předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární. Vzhledem k Lemmatu 9.1 a Důsledku 9.2 je $\boldsymbol{A}$ semimodulární a současně duálně semimodulární. Aplikací rovnosti (9.6) dostaneme, že

$$\operatorname{codim} a = \ell(1/a) = \dim 1 - \dim a,$$

pro všechna $a \in \boldsymbol{A}$. Odtud a z Důsledku 9.6 dostaneme, že

$$\dim a + \dim b \leq \dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b)$$

platí pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$. Odtud a z (9.8) plyne (9.11). ($\Leftarrow$) Předpokládejme pro spor, že svaz $\boldsymbol{A}$ není modulární. Potom $\boldsymbol{A}$ obsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$ a tedy prvky $a < c$ a b takové, že platí rovnosti

$$a \vee b = b \vee c \quad \text{a} \quad a \wedge b = b \wedge c. \tag{9.12}$$

Protože $a < c$, je podle definice $\dim a = \ell(a/0) < \ell(c/0) = \dim c$. Z rovností (9.12) a z předpokladu (9.11) ale plyne, že

$$\begin{aligned} \dim a &= \dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) - \dim b \\ &= \dim(b \wedge c) + \dim(b \vee c) - \dim b = \dim c. \end{aligned}$$

To je spor. $\square$

Důsledek 9.8. *Svaz lokálně konečné délky je modulární právě když je současně semimodulární a duálně semimodulární.*

KAPITOLA 10

Problém slov ve volných svazech

SHRNUTÍ. Definujeme volný svaz a popíšeme jeho konstrukci z tříd ekvivalence určené svazovými axiomy na množině svazových termů. Popíšeme algoritmus umožňující efektivně řešit problém slov, tj. rovnosti dvou termů, ve volných svazech. Zmíníme také Dayovu zdvojovací konstrukci a použijeme ji k důkazu správnosti tohoto algoritmu..

10.1. Definice volného svazu. Buď X množina. Svaz $\boldsymbol{F}$ nazveme *volným* s bazí X, jestliže $X \subseteq \boldsymbol{F}$ a pro každý svaz $\boldsymbol{A}$ a každé zobrazní $f\colon X \to \boldsymbol{A}$ existuje právě jeden svazový homomorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{A}$ takový, že $\varphi \restriction X = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & \boldsymbol{F} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & \boldsymbol{A} \end{tikzcd}$$

OBRÁZEK 10.1. Volný svaz s bází X

Připomeňme, že symbolem 1_X značíme identické zobrazení $X \to X$.

Jsou-li $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ volné svazy s bazí X potom existuje svazový izomorfismus $\mu\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ takový, že $\mu \restriction X = 1_X$.

DŮKAZ. Z vlastností volného svazu plyne, že existuje právě jeden svazový homomorfismus $\mu\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ takový, že $\mu \restriction X = 1_X$ a právě jeden svazový homomorfismus $\nu\colon \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{F}$ takový, že $\nu \restriction X = 1_X$. Složením μ a ν dostaneme svazové homomorfismy $\nu \circ \mu\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ a $\mu \circ \nu\colon \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ takové, že $\nu \circ \mu \restriction X = \mu \circ \nu \restriction X = 1_X$. Z jednoznačnosti takových homomorfismů (jež plyne z toho, že báze X generuje jak $\boldsymbol{F}$ tak $\boldsymbol{G}$) odvodíme, že $\nu \circ \mu = 1_{\boldsymbol{F}}$ a $\mu \circ \nu = 1_{\boldsymbol{G}}$. Proto je $\mu\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ izomorfismus. $\square$

10.2. Problém slov. Buď $\boldsymbol{A}$ svaz, $X \subseteq \boldsymbol{A}$ jeho podmnožina a $p \in T(X)$ term v proměnných z této podmnožiny. Symbolem $p^{\boldsymbol{A}}$ označíme prvek svazu $\boldsymbol{A}$ reprezentovaný termem p (tj. hodnotu termu p ve svazu $\boldsymbol{A}$). *Problémem slov* ve svazu $\boldsymbol{A}$ (vzhledem k množině X) budeme rozumět otázku, zda pro danou dvojici termů $p, q \in T(X)$ platí rovnost $p^{\boldsymbol{A}} = q^{\boldsymbol{A}}$. *Řešením*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[loop above, "1_X"] \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, bend right, "1_X"'] & \boldsymbol{F} \arrow[loop above, "1_{\boldsymbol{F}}"] \arrow[d, bend right, "\exists!\mu"'] \\
X \arrow[loop below, "1_X"] \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[u, bend right, "1_X"'] & \boldsymbol{G} \arrow[loop below, "1_{\boldsymbol{G}}"] \arrow[u, bend right, "\exists!\nu"']
\end{tikzcd}
$$

Obrázek 10.2. Izomorfismus volných svazů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ s bazí X

problému slov pak bude algoritmus, který správně rozhodne problém slov pro každou dvojici termů $p, q \in T(X)$.

Protože $p^{\boldsymbol{A}} = q^{\boldsymbol{A}}$ právě když $p^{\boldsymbol{A}} \leq q^{\boldsymbol{A}}$ a současně $q^{\boldsymbol{A}} \leq p^{\boldsymbol{A}}$, stačí k řešení problému slov ve svazu $\boldsymbol{A}$ (vzhledem k dané podmnožině X) najít algoritmus který dokáže rozhodnout zda $p^{\boldsymbol{A}} \leq q^{\boldsymbol{A}}$ pro každou dvojici termů $p, q \in T(X)$. Protože $p^{\boldsymbol{A}} \leq q^{\boldsymbol{A}}$ právě když $p^{\boldsymbol{A}} = (p \wedge q)^{\boldsymbol{A}}$ a proto z řešení problému slov plyne naopak existence takového algoritmu. Místo rovnosti termů tedy postačí termy ve svazu $\boldsymbol{A}$ porovnat.

Volný svaz s bazí X setrojíme jako kvocient algebraické struktury $\boldsymbol{T}(X) = (T(X), \vee, \wedge)$ všech svazových termů v proměnných z množiny X podle kongruence indukované svazovými axiomy (konkrétně komutativitou, asociativitou a absorpcí). Takto zkonstruovaný svaz budeme značit $\boldsymbol{F}(X)$. Ukážeme, že ve volném svazu $\boldsymbol{F}(X)$ existuje řešení problému slov vzhledem k jeho bázi X.

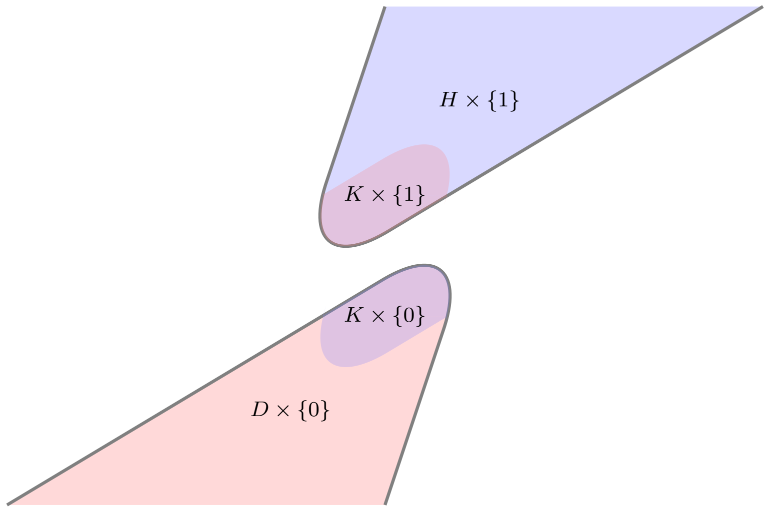
10.3. Dayova zdvojovací konstrukce. Připomeňme, že $\boldsymbol{C_2}$ značí dvouprvkový svaz. Buď $\boldsymbol{A}$ svaz a K jeho konvexní podmnožina. Položme

$$
\begin{aligned}
D &:= {\downarrow}K \cup (\boldsymbol{A} \setminus {\uparrow}K) = \boldsymbol{A} \setminus ({\uparrow}K \setminus {\downarrow}K), \\
H &:= {\uparrow}K.
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

Snadno nahlédneme, že D je dolní podmnožina svazu $\boldsymbol{A}$, H je horní podmnožina, a že $K = D \cap H$ a $\boldsymbol{A} = D \cup H$. Definujme

$$
\boldsymbol{A}[K] := (D \times \{0\}) \cup (H \times \{1\}) \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C_2}. \tag{10.2}
$$

Konstrukce $\boldsymbol{A}[K]$ je znázorněna na obrázku 10.3.



Obrázek 10.3. Svaz $\boldsymbol{A}$[K]

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz a K jeho konvexní podmnožina. Potom je $\boldsymbol{A}[K]$ svazem[1] a zobrazení

$$\pi^{\boldsymbol{A}[K]} \colon \boldsymbol{A}[K] \to \boldsymbol{A}$$
$$\langle a, i \rangle \mapsto a$$

svazovým homomorfismem na svaz $\boldsymbol{A}$.

Důkaz. Definujeme D a H jako v (10.1). Nechť $\langle a, i \rangle, \langle b, j \rangle \in \boldsymbol{A}[K]$. Pokud $\langle a \vee b, i \vee j \rangle \notin \boldsymbol{A}[K]$, nutně $a \vee b \notin D$ a proto je $\langle a \vee b, 1 \rangle = \sup\{\langle a, i \rangle, \langle b, j \rangle\}$ v uspořádané množině $\boldsymbol{A}[K]$. Pokud naopak $\langle a \vee b, i \vee j \rangle \in \boldsymbol{A}[K]$, platí zřejmě rovnost $\langle a \vee b, i \vee j \rangle = \sup\{\langle a, i \rangle, \langle b, j \rangle\}$. Proto je uspořádaná množina $\boldsymbol{A}[K]$ uzavřena na suprema svých neprázných konečných podmnožin. Podobně ukážeme, že $\boldsymbol{A}[K]$ je uzavřena na infima svých neprázných konečných podmnožin. Proto je $\boldsymbol{A}[K]$ svaz.

Označme $\vee_K$, resp. $\wedge_K$ operace spojení, resp. průseku ve svazu $\boldsymbol{A}[K]$. Z úvah v předchozím odstavci plyne, že $\langle a, i \rangle \vee_K \langle b, j \rangle \in \{a \vee b\} \times \{0, 1\}$. Podobně platí, že $\langle a, i \rangle \wedge_K \langle b, j \rangle \in \{a \wedge b\} \times \{0, 1\}$. Odtud plyne, že je zobrazení $\pi^{\boldsymbol{A}[K]}$ svazovým homomorfismem. □

10.4. Problém slov ve svazu $\boldsymbol{F}(X)$. Řešení problému slov ve volném svazu získáme na základě následující věty.

Věta 10.1. *Buď X množina a $\boldsymbol{F}$ volný svaz s bazí X. Potom pro všechna $x, y \in X$ a $p, q, p_1, q_1, p_2, q_2 \in T(X)$ platí, že*

(1) $x \leq y \iff x = y$,
(2) $x \leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}} \iff x \leq q_1^{\boldsymbol{F}}$ *nebo* $x \leq q_2^{\boldsymbol{F}}$,
(3) $(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq y \iff p_1^{\boldsymbol{F}} \leq y$ *nebo* $p_2^{\boldsymbol{F}} \leq y$,

[1] ale ne nutně podsvazem $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C_2}$

(4) $(p_1 \vee p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq q^{\boldsymbol{F}} \iff {p_1}^{\boldsymbol{F}} \leq q^{\boldsymbol{F}}$ *a zároveň* ${p_2}^{\boldsymbol{F}} \leq q^{\boldsymbol{F}}$,
(5) $p^{\boldsymbol{F}} \leq (q_1 \wedge q_2)^{\boldsymbol{F}} \iff p^{\boldsymbol{F}} \leq {q_1}^{\boldsymbol{F}}$ *a zároveň* $p^{\boldsymbol{F}} \leq {q_2}^{\boldsymbol{F}}$,
(6) $(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}$ *právě když platí alespoň jedna z následujících čtyř nerovností*

$$
\begin{aligned}
&{p_1}^{\boldsymbol{F}} \leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}, \qquad (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq {q_1}^{\boldsymbol{F}},\\
&{p_2}^{\boldsymbol{F}} \leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}, \qquad (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq {q_2}^{\boldsymbol{F}}.
\end{aligned} \tag{10.3}
$$

Důkaz. Implikace ($\Leftarrow$) podmínek (1-6) zřejmě platí, stačí tedy ověřovat implikace opačné. Předpokládejme, že $x \neq y$ a uvažme zobrazení $f\colon X \to \boldsymbol{C_2}$ takové, že $f(x) = 1$ a $f(y) = 0$. Protože je svaz $\boldsymbol{F}$ volný s bazí X, lze toto zobrazní rozšířit na homomorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{C_2}$. Protože $\varphi(x) = f(x) = 1 \not\leq 0 = f(y) = \varphi(y)$, je nutně $x \not\leq y$. Proto platí (1). Abychom ověřili podmínku (2), ukažme nejprve, že Pro každé $q \in T(X)$ platí, že

$$
x \not\leq q^{\boldsymbol{F}} \implies q^{\boldsymbol{F}} \leq \bigvee U \text{ pro nějakou konečnou } U \subseteq X \setminus \{x\}. \tag{10.4}
$$

Důkaz. Označme S_x množinu všech $q \in T(X)$ splňujících implikaci (10.4). Snadno nahlédneme, že $X \subseteq S_x$ a pokud $p, q \in S_x$, tak $p \vee q \in S_x$ podobně jako $p \wedge q \in S_x$. Odtud ale plyne, že $S_x = T(X)$ a následně i dokazované tvrzení. $\perp$

Předpokládejme, že $x \not\leq {q_1}^{\boldsymbol{F}}$ a zároveň $x \not\leq {q_2}^{\boldsymbol{F}}$. Vzhledem k Tvrzení 2 pak existují konečné $U_1, U_2 \subseteq X \setminus \{x\}$ takové, že ${q_1}^{\boldsymbol{F}} \leq \bigvee U_1$ a ${q_2}^{\boldsymbol{F}} \leq \bigvee U_2$. Položme $f(x) = 1$ a $f(u) = 0$ pro všechna $u \in X \setminus \{x\}$. Takto definivané zobrazení $f\colon X \to \boldsymbol{C_2}$ lze rozšířit na homomotfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{C_2}$. Z předchozího plyne, že

$$
\varphi(x) = f(x) = 1 \quad \text{a} \quad \varphi((q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}) \leq \bigvee \varphi(U_1 \cup U_2) = 0.
$$

Odtud dostaneme, že $x \not\leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}$. Tímto jsme ověřili podmínku (2). Podmínku (3) lze ukázat analogicky. Podmínky (4) a (5) platí zřejmě v každém svazu.

Zbývá ověřit implikaci $\Rightarrow$ podmínky (6). Předpokládejme, že platí $(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}$ a položme $K := (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}} / (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}$. Definujme $D := \downarrow K \cup (\boldsymbol{F} \setminus \uparrow K) = \boldsymbol{F} \setminus (\uparrow K \setminus \downarrow K)$ a $H := \uparrow K$ jako v (10.1). Z definic plyne, že

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} \setminus D &= \{a \in \boldsymbol{F} \mid (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq a \not\leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}\},\\
\boldsymbol{F} \setminus H &= \{a \in \boldsymbol{F} \mid (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \not\leq a\}.
\end{aligned} \tag{10.5}
$$

Zvolme zobrazení $f\colon X \to \boldsymbol{F}[K]$ takové, že $x \mapsto \langle x, i \rangle \in \{x\} \times \boldsymbol{C_2}$. Protože je $\boldsymbol{F}$ volný svaz s bází X, existuje homomorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}[K]$ takový, že $f = \varphi \restriction X$. Odtud plyne, že $\pi_{\boldsymbol{F}[K]} \circ \varphi \restriction X = 1_X$. Z jednoznačnosti takového homomorfismu $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ plyne, že $\pi_{\boldsymbol{F}[K]} \circ \varphi = 1_{\boldsymbol{F}}$. Odtud odvodíme, že

$$
\varphi(a) = \langle a, i \rangle \in \{a\} \times \boldsymbol{C_2},
$$

pro všechna $a \in \boldsymbol{F}$.

Pro spor dále předpokládejme, že neplatí žádná z nerovností (10.3). Potom pro $i = 1, 2$ platí, že

$$(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq p_i{}^{\boldsymbol{F}} \nleq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}},$$

a tedy vzhledem k (10.5) je $p_i{}^{\boldsymbol{F}} \in \boldsymbol{F} \setminus D$. Odtud plyne, že $\varphi(p_i{}^{\boldsymbol{F}}) = \langle p_i{}^{\boldsymbol{F}}, 1\rangle$. Protože je $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}[K]$ homomorfismus a $(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \in K$ dostaneme, že

$$\varphi((p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}) = \bigwedge_{i=1}^{2} \varphi(p_i{}^{\boldsymbol{F}}) = \bigwedge_{i=1}^{2} \langle p_i{}^{\boldsymbol{F}}, 1\rangle = \langle (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}, 1\rangle. \tag{10.6}$$

Dále podle našeho předpokladu platí pro $j = 1, 2$, že

$$(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \nleq q_j{}^{\boldsymbol{F}},$$

a tedy z (10.5) dostaneme, že $q_j{}^{\boldsymbol{F}} \in \boldsymbol{F} \setminus H$. Odtud plyne, že $\varphi(q_j{}^{\boldsymbol{F}}) = \langle q_j{}^{\boldsymbol{F}}, 0\rangle$ pro obě $j \in \{1, 2\}$. Protože je $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}[K]$ homomorfismus a $(q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}} \in K$ dostaneme, že

$$\varphi((q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}) = \bigvee_{j=1}^{2} \varphi(q_j{}^{\boldsymbol{F}}) = \bigvee_{j=1}^{2} \langle q_j{}^{\boldsymbol{F}}, 0\rangle = \langle (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}, 0\rangle. \tag{10.7}$$

Z rovností (10.6) a (10.7) plyne, že

$$\varphi((p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}) = \langle (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}, 1\rangle \nleq \langle (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}, 0\rangle = \varphi((q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}).$$

To je ve sporu s předpokladem $(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq (q_1 \wedge q_2)^{\boldsymbol{F}}$. □

Podmínka (6) z právě dokázané Věty 10.3 je často nazývaná *Whitmanova podmínka*[2] a značena (W).

Z Věty 10.3 je vidět, že ve volném svazu $\boldsymbol{F}(X)$ lze problém slov řešit postupnou redukcí na jednodušší termy. Odtud plyne, že

Buď $\boldsymbol{F}$ svaz a X jeho podmnožina. Potom je $\boldsymbol{F}$ volný svaz s bazí X právě když X generuje $\boldsymbol{F}$ a jsou splněny podmínky (1-6) z Věty 10.3.

[2] na počest Philipa M. Whitmana (nar. 1916)

KAPITOLA 11

Minimální term, variace volného svazu

SHRNUTÍ. Ukážeme, že každý prvek volného svazu je reprezentován termem minimální délky, a že až na asociativitu a komutativitu spojení a průseků podtermů je určen jednoznačně. Z toho odvodíme, že je volný svaz průsekově i spojově semidistributivní..

11.1. Minimální term. Připomeňme si Whitmanovu podmínku (W), která platí ve volném svazu:

(W) Pro všechna a_1, a_2, b_1, b_2 platí, že $a = a_1 \wedge a_2 \leq b_1 \vee b_2 = b$ právě když platí alespoň jedna z následujících nerovností: $a_1 \leq b$, $a_2 \leq b$, $a \leq b_1$ a $a \leq b_2$.

Připomeňme si ještě, že prvek a svazu $\boldsymbol{A}$ je *spojově nerozložitelný*, jestliže pro každou konečnou $F \subseteq A$ platí, že $a = \bigvee F$ implikuje, že $a \in F$. Všimněme si, že $0_{\boldsymbol{A}} = \bigvee \emptyset$ a tedy nejmenší prvek $0_{\boldsymbol{A}}$ svazu $\boldsymbol{A}$ není spojově nerozložitelný. Uspořádanou množinu všech spojově nerozložitelných prvků svazu $\boldsymbol{A}$ značíme $\mathrm{J}(\boldsymbol{A})$. Duálně řekneme, že prvek $b \in A$ je *průsekově nerozložitelný* pokud pro každou konečnou $F \subseteq A$ rovnost $b = \bigwedge F$ implikuje, že $b \in F$. Protože $1_{\boldsymbol{A}} = \bigwedge \emptyset$, není největší prvek svazu $\boldsymbol{A}$ průsekově nerozložitelný. Uspořádanou množinu všech průsekově nerozložitelných prvků svazu $\boldsymbol{A}$ budeme značit $\mathrm{M}(\boldsymbol{A})$. Všimněme si, že

TVRZENÍ 11.1. *Pokud svaz $\boldsymbol{A}$ splňuje Whitmanovu podmínku, je každý jeho prvek různý od $0_{\boldsymbol{A}}$ a $1_{\boldsymbol{A}}$ spojově nebo průsekově nerozložitelný.*

DŮKAZ. Stačí si uvědomit, že kdyby $a \in A \setminus \{0_{\boldsymbol{A}}\, 1_{\boldsymbol{A}}\}$ nebyl ani spojově ani průsekově nerozložitelný, existovaly by $b_1, b_2 < a < a_1, a_2$ takové, že $a_1 \vee a_2 = a = b_1 \wedge b_2$. To by bylo ve sporu s Whitmanovou podmínkou. □

Speciálně je každý prvek volného svazu různý od 0 a 1 buďto spojově nebo průsekově nerozložitelný. Podívejme se na tuto vlastnost volného svazu podrobněji. Prvky volného svazu $\boldsymbol{F}$ s bazí X jsou reprezentovány svazovými termy; prvek reprezentovaný termem p značíme $p^{\boldsymbol{F}}$. Termy budeme pro přehlednost uvažovat bez zbytečných závorek. Například těch, které můžeme odstranit díky asociativitě operací průseku a spojení. *Délkou termu* budeme mínit počet výskytů proměnných v tomto termu (i s opakováním). Například délka termu $(x \vee y) \wedge (y \vee (x \wedge z))$ je 5. Prvek volného svazu může být reprezentován různými termy, jistě mezi nimi ale existuje nejkratší. Ukážeme, že tento nejkratší term je až na asociativitu a komutativitu operací spojení a průseku určen jednoznačně. Začneme lematem jehož důkaz je přímočarý, a proto jej ponecháme na rozmyšlení čtenáři.

LEMMA 11.2. *Buď $\boldsymbol{F}$ volný svaz s bází X, $a \in \boldsymbol{F}$ a $p \in T(X)$ nejkratší term takový, že $a = p^{\boldsymbol{F}}$. Předpokládejme, že term p je spojením $p = p_1 \vee \cdots \vee p_n$ alespoň dvou kratších termů p_i. Položme $a_i = p_i^{\boldsymbol{F}}$. Potom platí, že*

- *p_i je nejkratší term reprezentující prvek a_i;*
- *$a_i < a$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$;*
- *prvky $a_1, \ldots, a_n$ tvoří anti-řetězec (tj., jsou po dvou neporovnatelné);*
- *je-li $a < 1_{\boldsymbol{F}}$, potom je prvek a průsekově nerozložitelný.*

Protože $a = a_1 \vee \cdots \vee a_n$, $a_i < a$ pro $i = 1, \ldots, n$ a $2 \leq n$ vidíme, že za předpokladů Lemmatu 11.2 není prvek a spojově nerozložitelný. Prvky volného svazu, jejichž minimální term je spojením alespoň dvou termů budeme nazývat *vlastními spojeními*.

Duálně bychom zformulovali tvrzení obdobné Lemmatu 11.2 pro případ, kdy je nejkratší term prvku volného svazu průsekem alespoň dvou kratších termů. Tyto prvky budeme nazývat *vlastními průseky*. Z podmínek (2) a (3) ve Větě 10.3 je vidět, že prvky báze X jsou současně průsekově a spojově nerozložitelné. Protože zbylé prvky volného svazu jsou buďto vlastními spojeními nebo vlastními průseky, jsou prvky báze tímto charakterizovány. Na rozdíl od situace v případě vektorových prostorů (které jsou všechny volné) nebo volných grup, je tedy báze volného svazu určena jednoznačně.

Minimální term prvku $x \in X$ je zřejmě x a je určen jednoznačně. Zaměřme se na minimální termy vlastních spojení.

LEMMA 11.3. *Buď $\boldsymbol{F}$ volný svaz s bází X, $a \in \boldsymbol{F}$ vlastní spojeni a $p = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ nejkratší term takový, že $a = p^{\boldsymbol{F}}$. Předpokládejme, že pro každé $i = 1, \ldots, n$ jsou $p_i^{\boldsymbol{F}}$ vlastními průseky nebo prvky báze X. Nechť $k \in 1, \ldots, n$ je takové, že $p_k \notin X$ a tedy $p_k = \bigwedge_{j=1}^{n_k} p_{k,j}$ pro alespoň dva kratší termy $p_{k,j}$. Potom $p_{k,j}^{\boldsymbol{F}} \nleq a$ pro všechna $j \leq n_k$.*

DŮKAZ. Pro spor předpokládejme, že exisuje $l \in 1, \ldots, n_k$ takové, že $p_{k,l}^{\boldsymbol{F}} \leq a$. Potom

$$a = p^{\boldsymbol{F}} = \left(\bigvee_{i \neq k} p_i^{\boldsymbol{F}} \right) \vee p_k^{\boldsymbol{F}} = \left(\bigvee_{i \neq k} p_i^{\boldsymbol{F}} \right) \vee \left(\bigwedge_{j=1}^{n_k} p_{k,j} \right) \leq \left(\bigvee_{i \neq k} p_i^{\boldsymbol{F}} \right) \vee p_{k,l}^{\boldsymbol{F}} \leq a.$$

Proto $a = \left(\bigvee_{i \neq k} p_i^{\boldsymbol{F}} \right) \vee p_{k,l}^{\boldsymbol{F}}$ a $\left(\bigvee_{i \neq k} p_i \right) \vee p_{k,l}$ je kratší term reprezentující prvek a. □

LEMMA 11.4. *Nechť $\boldsymbol{F}$ je volný svaz s bází X a $a \in \boldsymbol{F}$ vlastní spojeni. Nechť $p = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ je nejkratší term reprezentující prvek a. Je-li $q = \bigvee_{k=1}^{m} q_k$ term takový, že $a = q^{\boldsymbol{F}}$. Potom $\{p_i^{\boldsymbol{F}} \mid i = 1, \ldots, n\} \subseteq {\downarrow}\{q_k^{\boldsymbol{F}} \mid k = 1, \ldots, m\}$.*

Důkaz. Každé z p_i je buďto prvek báze nebo vlastní průsek. V prvním případě je $p_i = x$ pro nějaké $x \in X$ a platí, že $p_i = x \leq \bigvee_{k=1}^{m} q_k^{\boldsymbol{F}}$. Vzhledem k podmínce (2) z Věty 10.3 existuje $k_0 \in 1, \dots, m$ takové, že $x \leq q_{k_0}^{\boldsymbol{F}}$. Pokud je $p_i = \bigwedge_{j=1}^{m} p_{i,j}$ vlastní průsek, je $\bigwedge_{j=1}^{m} p_{i,j}^{\boldsymbol{F}} \leq \bigvee_{k=1}^{m} q_k^{\boldsymbol{F}}$. Z Whitmanovy podmínky (W) plyne, že buďto existuje j takové, že $p_{i,j}^{\boldsymbol{F}} \leq \bigvee_{k=1}^{m} q_k^{\boldsymbol{F}} = a$ nebo $p_i = \bigwedge_{j=1}^{m} p_{i,j} \leq q_k$ pro některé k. Z Lemmatu 11.3 plyne, že $p_{i,j}^{\boldsymbol{F}} \nleq a$ pro všechna j a tedy platí druhá z variant. Ukázali jsme, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje $k \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $p_i^{\boldsymbol{F}} \leq q_k^{\boldsymbol{F}}$. Odtud je vidět dokazovaná inkluze $\{p_i^{\boldsymbol{F}} \mid i = 1, \dots, n\} \subseteq {\downarrow}\{q_k^{\boldsymbol{F}} \mid k = 1, \dots, m\}$. □

Nechť $(P, \leq)$ je uspořádaná množina a $A, B \subseteq P$. Snadno nahlédneme, že pokud platí rovnost ${\downarrow}A = {\downarrow}B$ a A je anti-řetězec, je nutně $A \subseteq B$. Proto jsou-li A i B anti-řetězce takové, že ${\downarrow}A = {\downarrow}B$, je nutně $A = B$. Odtud a z Lemmatu 11.4 plyne, že

Věta 11.5. *Minimální term každého prvku volného svazu je až na komutativitu a asociativitu operací spojení a průseku určen jednoznačně.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{F}$ volný svaz s bází X. Minimální term prvku $x \in X$ je právě term x. Buď $a \in \boldsymbol{F}$ vlastní spojení a $p = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ a $q = \bigvee_{k=1}^{m} q_k$ dva minimální termy reprezentující prvek a. Předpokládejme navíc, že každý prvek svazu $\boldsymbol{F}$ jehož minimální term je kratší má až na komutativitu a asociativitu operací spojení a průseku tento term určen jednoznačně. Vzhledem k Lemmatu 11.4 platí, že ${\downarrow}\{p_i^{\boldsymbol{F}} \mid i = 1, \dots, n\} = {\downarrow}\{q_k^{\boldsymbol{F}} \mid k = 1, \dots, m\}$. Protože jsou obě množiny anti-řetězci, plyne odtud, že $\{p_i^{\boldsymbol{F}} \mid i = 1, \dots, n\} = \{q_k^{\boldsymbol{F}} \mid k = 1, \dots, m\}$. Proto $m = n$ a existuje permutace π množiny $\{1, \dots, n\}$ taková, že $p_i^{\boldsymbol{F}} = q_{\pi(i)}^{\boldsymbol{F}}$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Tyto prvky mají kratší minimální term a proto se termy $p_i = q_{\pi(i)}$ (až na komutativitu a asociativitu) shodují. V případě, že $a \in \boldsymbol{F}$ je vlastní průsek, postupujeme analogicky. □

Důkaz Věty 11.5 dává návod jak algoritmicky hledat minimální termy prvků volného svazu. Řekněme, že máme dán prvek a reprezentovaný termem $p = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$, kde každé p_i je prvek báze X nebo průsek $p_i = \bigwedge_{j=1}^{n_i} p_{i,j}$. (V případě, že prvek a je reprezentován průsekem podtermů je postup obdobný.) Existuje-li $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $a = p_i^{\boldsymbol{F}}$, nahradíme term p kratším term $p_i^{\boldsymbol{F}}$ a postup opakujeme pro něj. Existují-li $i \leq n$ a $j \leq n_i$ takové, že $a \leq p_{i,j}^{\boldsymbol{F}}$, nahradíme term p kratším termem $\left(\bigvee_{i' \neq i} p_{i'}\right) \vee p_{i,j}$ a opět postup opakujeme. Jinak najdeme minimální termy q_i prvků $p_i^{\boldsymbol{F}}$ (všechny termy p_i jsou kratší než term p). Minimální term prvku a pak bude $\bigvee_{i=1}^{n} q_i$.

11.2. Semidistributivita.

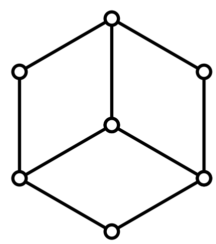
Definice. Řekneme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je *spojově semidistributivní* pokud pro každé $a, b, c \in A$ platí

$$(\mathrm{SD}_\vee) \qquad a \vee b = a \vee c \implies (a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c).$$

Duálně, svaz $\boldsymbol{A}$ je *průsekově semidistributivní* pokud pro každé $a, b, c \in A$ platí

$$(\mathrm{SD}_\wedge) \qquad a \wedge b = a \wedge c \implies (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c).$$

Svaz $\boldsymbol{N}_5$ je průsekově i spojově semidistributivní, zatímco svaz $\boldsymbol{M}_3$ není ani spojově ani průsekově semi-distibutivní. Svaz $\boldsymbol{E}$ znázorněný na Obrázku 11.1 je průsekově, ale není spojově semidistributivní.



$\boldsymbol{E}$

Obrázek 11.1. Svaz $\boldsymbol{E}$

Tvrzení 11.6. *Volný svaz je spojově i průsekově semidistributivní.*

Důkaz. Ukážeme, že je volný svaz spojově semidistributivní (průsekovou semidistributivitu bychom ukázali obdobně). Nechť $u = a \vee b = a \vee c$. Je-li prvek u spojově nerozložitelný, potom $u \in \{a, b\} \cap \{a, c\}$ a tedy buďto $u = a$ nebo $u = b = c$. V obou případech platí, že $u = a \vee (b \wedge c)$. Pokud u není spojově nerosložitelný, je u vlastní spojení. Nechť $p = \bigvee_{i=1}^{n} p_i$ je nejkratší term reprezentující u. Protože $u = a \vee b = a \vee c$ platí vzhledem k Lemmatu 11.4, že $\{p_1^{\boldsymbol{F}}, \dots, p_n^{\boldsymbol{F}}\} \subseteq {\downarrow}\{a, b\} \cap {\downarrow}\{a, c\}$. Položme $I = \{i \leq n \mid p_i^{\boldsymbol{F}} \leq a\}$ a $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$. Pro každé $j \in J$ nutně platí, že $p_j^{\boldsymbol{F}} \leq b \wedge c$. Proto je

$$u = \left(\bigvee_{i \in I} p_i^{\boldsymbol{F}} \right) \vee \left(\bigvee_{j \in J} p_j^{\boldsymbol{F}} \right) \leq a \vee (b \wedge c).$$

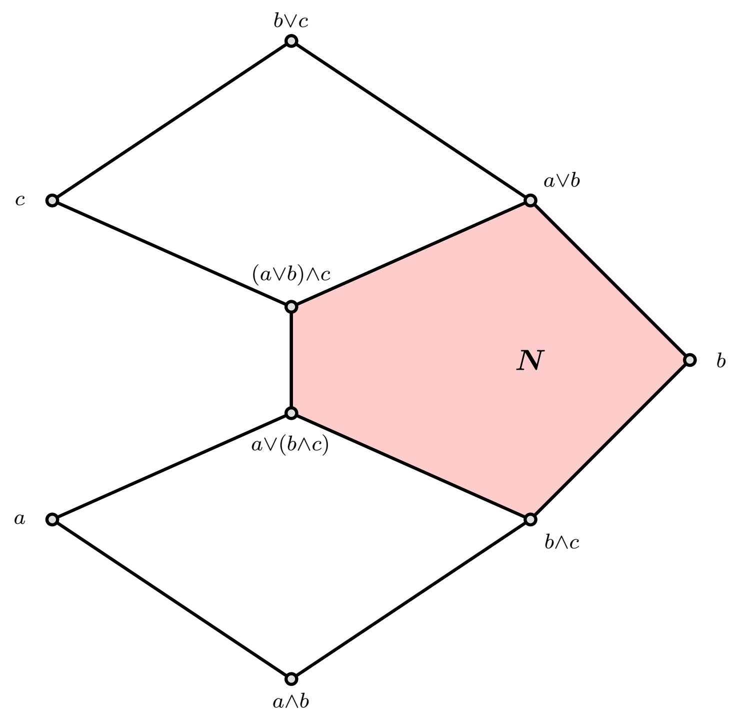
□

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & \boldsymbol{F}_P \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & \boldsymbol{A} \end{tikzcd}$$

Obrázek 11.2. Volný svaz s uspořádanou bází

11.3. Volný svaz s uspořádanou bází. Zobrazení $f\colon P \to Q$ uspořádaných množin P, Q je *monotónní*, pokud zachovává uspořádaní, tj., pokud $a \le b \implies f(a) \le f(b)$ pro každou dvojici $a, b \in P$.

Buď P uspořádaná množina. *Volný svaz s uspořádanano bází* P je svaz $\boldsymbol{F}_P$ takový, že $P \subseteq F_P$ a pro každý svaz $\boldsymbol{A}$ a každé monotónní zobrazení $f\colon P \to A$ existuje právě jeden svazový homomorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F}_P \to \boldsymbol{A}$ takový, že $\varphi \restriction P = f$. Vlastnost defininující volný svaz s uspořádanou bází je znázorněna diagramem na Obrázku 11.2.



Obrázek 11.3. Volný svaz $\boldsymbol{F}_P$

Uvažme trojprvkovou množinu $P = \{a, b, c\}$ uspořádanou relací $a < c$ (prvek b je se zbylými prvky neporovnatelný). Volný svaz $\boldsymbol{F}_P$ s uspořádanou bazí P je znázorněn na Obrázku 11.3. Najdeme jej jako sjednocení řetězce uspořádaných množin $P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$, které sestrojíme takto: Nejprve položíme $P_0 = P$, P_1 získáme jako všechna spojení neprázdných konečných podmnožin P_0, P_2 získáme jako všechny průseky neprázdných konečných podmnožin P_1, P_3 získáme jako všechna spojení neprázdných konečných podmnožin P_2, atd. Všimněme si, že pokud pro některé n dostaneme, že $P_{n+1} = P_n$, můžeme skončit, neboť pak nutně $F_P = P_n$. V našem případě skončíme po několika krocích. Postupně dostaneme:

- $P_0 = \{a, b, c\}$,
- $P_1 = \{a, b, c, a \vee b, c \vee b\}$,

- $P_2 = \{a, b, c, a \vee b, c \vee b, a \wedge b, c \wedge b, (a \vee b) \wedge c\}$,
- $P_3 = \{a, b, c, a \vee b, c \vee b, a \wedge b, c \wedge b, (a \vee b) \wedge c, a \vee (b \wedge c)\} = P_4$.

Na Obrázku 11.3 si všimněme podsvazu $\boldsymbol{N}$ izomorfního $\boldsymbol{N_5}$. Položíme $u = a \vee (b \wedge c)$ a $v = (a \vee b) \wedge c$. Buď $\boldsymbol{A}$ svaz obsahují prvky a', b', c' takové, že $a' \leq c'$ a zároveň $a' \vee (b' \wedge c') < (a' \vee b') \wedge c'$. Uvažme zobrazení $f\colon P \to A$ dané předpisy $a \mapsto a'$, $b \mapsto b'$ a $c \mapsto c'$. Protože $a' \leq c'$, je zobrazení f monotónní. Proto existuje rozšíření tohoto zobrazení na homomorfismus svazů $\varphi\colon \boldsymbol{F}_P \to \boldsymbol{A}$. Z předpisů definujících zobrazení f dostaneme, že

$$\varphi(u) = \varphi(a \vee (b \wedge c)) = a' \vee (b' \wedge c') < (a' \vee b') \wedge c' = \varphi((a \vee b) \wedge c) = \varphi(v).$$

Odtud plyne, že $(u, v) \notin \ker \varphi$, a tedy $\Theta(u, v) \nsubseteq \ker \varphi$. V Příkladu 8.2 jsme ukázali, že $\Theta(u, v)$ je nejmenší netriviální kongruencí svazu $\boldsymbol{N}$. Odtud vyplývá, že je restrikce $\varphi \restriction \boldsymbol{N}$ vnořením svazu $\boldsymbol{N}$ do svazu $\boldsymbol{A}$. Proto svaz $\boldsymbol{A}$ obsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N}_5$. Tato vlastnost nemodulárních svazů je tedy důsledkem struktury volného svazu s uspořádanou bází P.

11.4. Volný modulární svaz. Uvažme nějakou varietu $\mathcal{V}$ svazů. Volný svaz s bazí X ve varietě $\mathcal{V}$ je svaz $\boldsymbol{F}_{\mathcal{V}}(X)$ takový, že $X \subseteq \boldsymbol{F}_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ a pro každý svaz $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ a každé zobrazení $f\colon X \to A$ lze jednoznačně rozšířit na homomorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F}_{\mathcal{V}}(X) \to \boldsymbol{A}$. Svaz $\boldsymbol{F}_{\mathcal{V}}(X)$ sestrojíme, podobně jako v předchozím případě, jako sjednocení posloupnosti $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ takové, že $X_0 = X$ a

$$x_{i+1} = \begin{cases} \{\bigvee F \mid F \text{ je konečná neprázdná podmnožina } X_i\} & i \text{ je sudé,} \\ \{\bigwedge F \mid F \text{ je konečná neprázdná podmnožina } X_i\} & i \text{ je liché,} \end{cases}$$

kde spojení a průseku počítáme modulo identity (= relace), které platí ve varietě $\mathcal{V}$. Takto zjistíme, že pro trojprvkovou množinu $X = \{a, b, c\}$ je volný svaz $\boldsymbol{F}_{\mathcal{M}}(X)$ ve varietě $\mathcal{M}$ všech modulárních svazů roven svazu, který je znázorněn na obrázku 11.5.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & \boldsymbol{F}_{\mathcal{V}}(X) \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] & \\ & \boldsymbol{A} & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

Obrázek 11.4. Volný svaz ve varietě $\mathcal{V}$

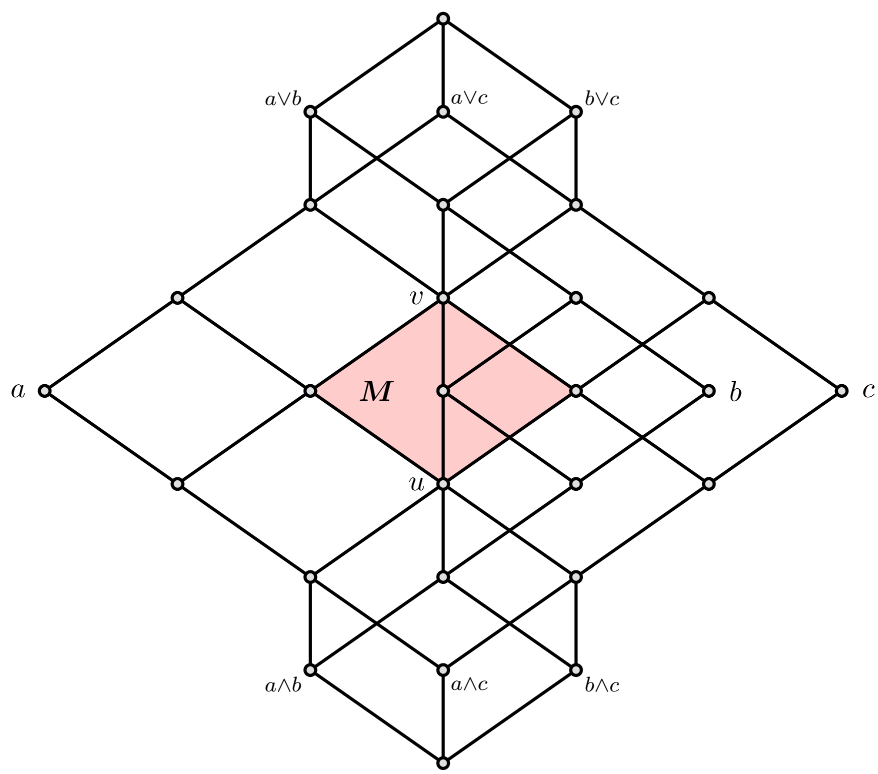
Všimněme si prvků u a v ve svazu $\boldsymbol{F}_{\mathcal{M}}(X)$. Ty jsou reprezentovány termy

$$u = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \quad \text{a} \quad v = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c),$$

jak snadno nahlédneme z obrázku. Uvažme nyní modulární, nedistributivní svaz $\boldsymbol{A}$. Podle Lemmatu 3.2 existují v A prvky a', b', c' takové, že

$$u' = (a' \wedge b') \vee (a' \wedge c') \vee (b' \wedge c') < v' = (a' \vee b') \wedge (a' \vee c') \wedge (b' \vee c').$$

Uvažme zobrazení $f\colon X \to A$ dané přiřazeními $a \mapsto a'$, $b \mapsto b'$ a $c \mapsto c'$. Podle definice volného svazu, (a protože je svaz $\boldsymbol{A}$ modulární), existuje rozšíření zobrazení f na homomorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F}_{\mathcal{M}}(X) \to \boldsymbol{A}$. Zřejmě pak platí, že $\varphi(u) = u' < v' = \varphi(v)$. Na obrázku 11.5 je červeně zvýrazněn podsvaz svazu $\boldsymbol{F}_{\mathcal{M}}(X)$ izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$. Značne jej dále $\boldsymbol{M}$. V Příkladu 8.1 jsme ukázali, že svaz $\boldsymbol{M_3}$ je jednoduchý, tedy že nemá žádnou netriviální kongruenci. Protože $\varphi(u) < \varphi(v)$, plyne odtud, že je restrikce $\varphi \restriction \boldsymbol{M}\colon \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{A}$ prostá. Odtud vidíme, že svaz $\boldsymbol{A}$ obsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{M}_3$.



Obrázek 11.5. Volný modulární svaz $\boldsymbol{F}_{\mathcal{M}}(\{a, b, c\})$

KAPITOLA 12

Algebraické svazy

SHRNUTÍ. Algebraické svazy jsou úplné svazy jejichž každý prvek je spojením kompaktních prvků. Ukážeme vztah distributivity a modularity algebraických svazů a odpovídajících vlastností polosvazů jejich kompaktních prvků. Ukážeme, že algebraický svaz je slabě atomární, nahoru spojitý, a že každý prvek algebraického svazu je průsekem úplně průsekově nerozložitelných prvků. Nakonec, pro algebraické distributivní svazy definujeme na množině jejich úplně průsekově nerozložitelných prvků topologii..

12.1. Úplné svazy a věta o pevném bodě. Připomeňme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je *úplný*, má-li každá jeho podmnožina spojení a průsek. Protože $0_{\boldsymbol{A}} = \bigvee \emptyset$ a $1_{\boldsymbol{A}} = \bigwedge \emptyset$, má každý úplný svaz nejmenší a největší prvek. V úplných svazech platí svazově-teoretická analogie věty o pevném bodě.

TVRZENÍ 12.1 (Knasterova-Tarského věta). *Buď $\boldsymbol{A}$ úplný svaz a $f\colon A \to A$ monotónní funkce. Potom množina*

$$F := \{a \in A \mid f(a) = a\}$$

tvoří úplný svaz, (ale ne nutně podsvaz $\boldsymbol{A}$).

DŮKAZ. Položme $U := \{a \in A \mid a \leq f(a)\}$ a $u := \bigvee U$. Nejprve si všimněme, že množina U je uzavřená na libovolná spojení: pro $X \subseteq U$ položme $y = \bigvee X$. Potom, protože je f monotónní, $x \leq f(x) \leq f(y)$ pro všechna $x \in X$. Proto je $f(y)$ horní mezí množiny X, a tedy $y \leq f(y)$. To znamená, že $y = \bigvee X \in U$. Z uzavřenosti na spojení plyne, že $u \in U$. Vzhledem k monotonii f plyne z $u \leq f(u)$, že $f(u) \leq f(f(u))$ a tedy také $f(u) \in U$. Pak ale $f(u) \leq u \leq f(u)$ a tedy $u = f(u)$. Protože $F \subseteq U$, plyne z definice, je u největším prvkem množiny F.

Položíme-li $V := \{a \in A \mid f(a) \leq a\}$ a $v = \bigwedge V$, ukážeme obdobně, že $v \in F$ a že je to nejmenší prvek této množiny.

Je-li $a \in U$ a $a \leq b$ je $a \leq f(a) \leq f(b)$. Proto zobrazení f zobrazí interval $\uparrow u$ do sebe. Je-li $X \subseteq F$ a $y = \bigvee X$, je $y \in U$ a restrikce $f \restriction \uparrow y\colon \uparrow y \to \uparrow y$ je monotónní zobrazení na úplném svazu $\uparrow y$. Výše jsme ukázali, že toto zobrazení má nejmenší pevný bod. Ten je supremem množiny X v F. Podobně ukážeme, že F má libovolná infima. $\square$

V Tvrzení **??** ukážeme, že naopak existence pevných bodů libovolné monotónní funkce charakterizuje úplné svazy.

Připomeňme, že uspořádaná množina $\langle C, \leq\rangle$ je *dobře uspořádaná*, má-li každá neprázdná podmnožina C nejmenší prvek. Řekneme, že uspořádaná množina $\langle D, \leq\rangle$ je *duálně dobře uspořádaná*, má-li každá neprázdná podmnožina D největší prvek. Všimněme si, že jak dobře uspořádaná, tak duálně dobře uspořádaná množina jsou nutně lineárně uspořádané.

Lemma 12.2. *V každé uspořádané množině $\langle P, \leq\rangle$ existuje*

(1) *dobře uspořádaná podmnožina C taková, že pokud $p \in P$ není v P maximální, je $c \nleq p$ pro některé $c \in C$;*
(2) *duálně dobře uspořádaná podmnožina D taková, že pokud $p \in P$ není v P minimální, je $p \nleq d$ pro některé $d \in D$;*

Důkaz. Ukážeme (1). Tvrzení zřejmě platí, pokud je P prázdná množina. Předpokládejme, že P je neprázdná. Označme $\mathcal{D}$ množinu všech dobře uspořádaných podmnožin P. Množinu $\mathcal{D}$ uspořádejme relací $\sqsubseteq$ definovanou takto: $C \sqsubseteq D$ je-li C dolní podmnožinou D, pro $C, D \in \mathcal{D}$. Buď $\mathcal{E}$ řetězec v $\mathcal{D}$ a položme $E = \bigvee \mathcal{E}$. Ukážeme, že množina E je dobře uspořádaná, a že $C \sqsubseteq E$ pro každé $C \in \mathcal{E}$.

Buď $C \in \mathcal{E}$, $x \in C$ a $y \in E \setminus C$. Potom existuje $D \in \mathcal{E}$ takové, že $y \in D$. Protože je $\mathcal{E}$ řetězec, jsou množiny C a D porovnatelné vzhledem k relaci $\sqsubseteq$. Vzhledem k $y \in D \setminus C$ je $C \sqsubseteq D$. Proto $x < y$. Odtud je vidět, že C je dolní podmnožinou E. Zbývá ukázat, že je množina E dobře uspořádaná. Buď X neprázdná podmnožina E. Zvolme $C \in \mathcal{E}$ takovou, že $X \cap C \neq \emptyset$. Protože je množina C dobře uspořádaná, má množina $X \cap C$ nejmenší prvek. Označme jej x. Ukázali jsme, že C je dolní podmnožinou E. Proto je x nejmenším prvkem x.

Z Zornova lemmatu plyne existence maximálního prvku množiny $\mathcal{D}$ vzhledem k uspořádání $\sqsubseteq$. Označme jej C. Předpokládejme, že $p \in P$ není maximálním prvkem množiny P, a že $c \leq p$ pro každé $c \in C$. Protože p není v P maximální, je $p < q$ pro nějaké $q \in P$. Platí, že $c \leq p < q$ pro každé $c \in C$. Položme $D := C \cup \{q\}$. Potom je D dobře uspořádaná vlastní nadmnožina C taková, že $C \sqsubseteq D$. To je ve sporu s maximalitou C. Tvrzení (2) ukážeme obdobně. □

Tvrzení 12.3 (A.Davis '55). *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Má-li každé monotónní zobrazení $f\colon A \to A$ pevný bod, je svaz $\boldsymbol{A}$ úplný.*

Důkaz. Předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ není úplný. Potom existuje $X \subseteq A$, která nemá suprémum. Položme $F := \{a \in A \mid x \leq a \text{ pro každé } x \in X\}$. Infimum množiny F by bylo jejím nejmenším prvkem a tedy suprémem množiny X. Proto $F = \emptyset$, nebo je F filtr bez nejmenšího prvku, a tedy bez minimálních prvků. Podle Lemmatu **??** existuje duálně dobře uspořádaná $D \subseteq F$ taková, že pro každé $a \in F$ existuje $d \in D$ splňující $a \nleq d$.

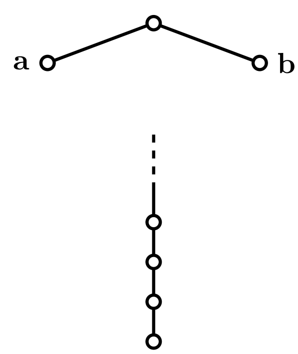
Položme $I := \{a \in A \mid a \leq d \text{ pro každé } d \in D\}$. Suprémum I by bylo infimem D, a z definice, nejmenším prvkem množiny F. Proto $I = \emptyset$, nebo je I ideálem svazu $\boldsymbol{A}$ bez největšího, a tedy bez maximálních prvků. Podle Lemmatu **??** existuje dobře uspořádaná $C \subseteq I$ taková, že pro každé $a \in I$ existuje $c \in C$ splňující $c \nleq a$.

Pro každé $a \in A$ položme $D_a := \{d \in D \mid a \nleq D\}$ a $C_a := \{c \in C \mid c \nleq a\}$. Všimněme si, že $D_a \neq \emptyset$ právě když $a \notin I$, a že pokud $a \in I$, tak $C_a \neq \emptyset$. Proto můžeme definovat zobrazení $f\colon A \to A$ takto

$$f(a) := \begin{cases} \max D_a & \text{pokud } a \notin I; \\ \min C_a & \text{pokud } a \in I. \end{cases} \tag{12.1}$$

Protože $C \subseteq I$, je $c < d$ pro každé $c \in C$ a každé $d \in D$. Odtud a z definice (**??**) snadno nahlédneme, že zobrazení f je monotónní. Protože $a \nleq f(a)$ pokud $a \notin I$ a $f(a) \nleq a$ pro každé $a \in I$, nemá zobrazení f pevný bod. $\square$

12.2. Algebraický svaz a polosvaz jeho kompaktních prvků. Prvek c svazu $\boldsymbol{A}$ nazveme *kompaktní*, pokud pro každou $U \subseteq A$ takovou, že $c \leq \bigvee U$ existuje konečná $F \subseteq U$ taková, že $c \leq \bigvee F$. Z definice snadno nahlédneme, že spojení dvou (konečně mnoha) kompaktních prvků je opět kompaktní prvek. Proto všechny kompaktní prvky svazu $\boldsymbol{A}$ tvoří $\vee$-polosvaz, který budeme značit $\boldsymbol{A}_c$. Průsek dvou kompaktních prvků nemusí být kompaktní, jak je vidět z příkladu svazu $\boldsymbol{K}$. Polosvaz $\boldsymbol{K}_c$ kompaktních prvků tohoto svazu je znázorněn na Obrázku 12.1. Tento polosvaz je tvořen nekonečným dobře uspořádaným řetězcem, nad kterým jsou prvky a, b a jejich spojení. Průsek $a \wedge b$ je jediný prvek svazu $\boldsymbol{K}$, který není kompaktní.



Obrázek 12.1. $\vee$-polosvaz $\boldsymbol{K_c}$

Ideál $\langle \vee, 0\rangle$-polosvazu $\boldsymbol{C}$ je neprázdná dolní podmnožina $I \subseteq C$ taková, že $a \vee b \in I$ pro všechna $a, b \in I$.

Množinu všech ideálů $\langle \vee, 0\rangle$-polosvazu $\boldsymbol{C}$ budeme značit $\operatorname{Id}(\boldsymbol{C})$. Z definice ideálu snadno plyne, že průnik libovolné neprázdné množiny ideálů polosvazu $\boldsymbol{C}$ je opět ideál. Proto pro každou $\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq \operatorname{Id}(\boldsymbol{C})$ platí, že $\bigwedge \mathcal{I} = \bigcap \mathcal{I}$ a $\bigwedge \emptyset = C$. Pro každou podmnožinu $B \subseteq C$ je

$$\langle B\rangle := \bigcap\{I \in \operatorname{Id}(\boldsymbol{C}) \mid B \subseteq I\} = \{a \in C \mid \exists b_1, \dots, b_n \in B\colon a \leq \bigvee_{i=1}^{n} b_i\}$$

nejmenší ideál obsahující tuto podmnožinu (budeme jej značit $\langle B\rangle$). Pro každou $\mathcal{I} \subseteq \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$ pak platí, že $\bigvee \mathcal{I} = \langle \bigcup \mathcal{I}\rangle$. Vidíme, že s takto definovanými operacemi tvoří $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$ úplný svaz, který budeme nazývat *svaz ideálů* $\langle \vee, 0\rangle$-polosvazu $\boldsymbol{C}$.

Všimněme si, že podmnožina $\downarrow a = \{x \in C \mid x \leq a\}$ je ideál pro každé $a \in C$. Tyto podmnožiny budeme nazývat *hlavními ideály*. Snadno nahlédneme, že pro všechna $a_1, \dots, a_n \in C$ platí rovnost

$$\bigvee_{i=1}^{n} \downarrow a_i = \downarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i \right).$$

Proto tvoří hlavní ideály $\langle \vee, 0\rangle$-podpolosvaz svazu $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$ a přiřazením $a \mapsto \downarrow a$ je definováno vnoření $\alpha_{\boldsymbol{C}} \colon \boldsymbol{C} \to \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$, jehož obrazem je tento podpolosvaz.

Buď $a \in C$ a $\mathcal{I} \subseteq \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$ taková, že $\downarrow a \subseteq \bigvee \mathcal{I}$. Potom $a \in \bigvee \mathcal{I}$ a proto existují $b_1, \dots, b_n \in \bigcup \mathcal{I}$ takové, že $a \leq \bigvee_{i=1}^{n} b_i$. Pro každé $i = 1, \dots, n$ zvolme ideál $I_i \in \mathcal{I}$ tak, že $b_i \in I_i$. Potom $a \in \bigvee_{i=1}^{n} I_i$ a tedy $\downarrow a \subseteq \bigvee_{i=1}^{n} I_i$. Ukázali jsme, že hlavní ideály jsou kompaktní v $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$.

Předpokládejme, že ideál I je kompaktní ve svazu $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$. Položme

$$\mathcal{I} := \{\downarrow a \mid a \in I\}$$

a všimněme si, že $I = \bigvee \mathcal{I}$. Protože je I kompaktní, existují $a_1, \dots, a_n \in I$ tak, že

$$I = \bigvee_{i=1}^{n} \downarrow a_i = \downarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i \right).$$

Proto je I hlavní ideál. Ukázali jsme, že kompaktní prvky ve svazu $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$ jsou právě hlavní ideály. Protože je každý ideál spojením množiny hlavních ideálů (svých prvků), je svaz $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$ algebraický.

Shrňme získané poznatky v lemmatu:

Lemma 12.4. *Všechny ideály $\langle \vee, 0\rangle$-polosvazu $\boldsymbol{C}$ tvoří spolu s operacemi $\bigwedge \emptyset = C$, $\bigvee \emptyset = \{0\}$ a*

$$\bigwedge \mathcal{I} = \bigcap \mathcal{I} \quad \textit{and} \quad \bigvee \mathcal{I} = \left\langle \bigcup \mathcal{I} \right\rangle, \qquad (\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C}))$$

algebraický svaz, který značíme $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$. Kompaktní prvky tohoto svazu jsou právě hlavní ideály. Přiřazením $a \mapsto \downarrow a$ je definován izomorfismus $\alpha_{\boldsymbol{C}} \colon \boldsymbol{C} \to \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})_c$.

Uvažme nyní algebraický svaz $\boldsymbol{A}$ a zobrazení

$$\begin{aligned} \alpha_{\boldsymbol{A}} \colon \boldsymbol{A} &\to \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A}_c) \\ a &\mapsto \{c \in \boldsymbol{A}_c \mid c \leq a\} \end{aligned} \tag{12.2}$$

Všimněme si, že $\alpha_{\boldsymbol{A}} \restriction \boldsymbol{A}_c = \alpha_{\boldsymbol{A}_c}$, a tedy toto zobrazení rozšiřuje výše definovaný izomorfismus $\langle \vee, 0\rangle$-polosvazů $\alpha_{\boldsymbol{A}_c} \colon \boldsymbol{A}_c \to \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A}_c)_c$.

Buď $c \in \boldsymbol{A}_c$ a $B \subseteq A$. Potom $c \leq \bigwedge B$ právě když $c \leq b$ pro všechna $b \in B$. To je podle definice ekvivalentní $c \in \bigcap_{b \in B} \alpha_{\boldsymbol{A}}(b) = \bigwedge_{b \in B} \alpha_{\boldsymbol{A}}(b)$. Proto zobrazení $\alpha_{\boldsymbol{A}}$ zachovává operaci průseku.

Předpokládejme, že $c \leq \bigvee B$. Položme $B' = \bigcup_{b \in B} \alpha_{\boldsymbol{A}}(b) = \{a \in \boldsymbol{A}_c \mid \exists b \in B \colon a \leq b\}$. Protože je každý prvek algebraického svazu spojením kompaktních prvků, je $\bigvee B = \bigvee B'$. Protože je c kompaktní a $c \leq \bigvee B'$, existují $a_1, \dots, a_n \in \bigvee B'$ takové, že $c \leq \bigvee_{i=1}^n a_i$. Odtud plyne, že $c \in \langle B' \rangle = \bigvee_{b \in B} \alpha_{\boldsymbol{A}}(b)$ (tady uvažujeme spojení ve svazu $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A})$). Je-li naopak c' kompaktní prvek takový, že $c \in \langle B' \rangle$, existují $b_1, \dots, b_n \in B$ a kompaktní $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$ takové, že $c' \leq \bigvee_{i=1}^n a_i \leq \bigvee_{i=1}^n b_i \leq \bigvee B$. Ukázali jsme, že

$$\alpha_{\boldsymbol{A}}\Big(\bigvee B\Big) = \bigvee_{b \in B} \alpha_{\boldsymbol{A}}(b)$$

a tedy zobrazení $\alpha_{\boldsymbol{A}}$ zachovává operaci spojení.

Definujeme zobrazení

$$\begin{aligned} \beta_{\boldsymbol{A}} \colon \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A}) &\to \boldsymbol{A} \\ I &\mapsto \bigvee I. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Protože je každý prvek algebraického svazu spojením kompaktních prvků, platí pro každé $a \in A$, že

$$\beta_{\boldsymbol{A}}\alpha_{\boldsymbol{A}}(a) = \bigvee\{c \in \boldsymbol{A}_c \mid c \leq a\} = a.$$

Z vlastností ideálu snadno plyne, že pro každý ideál $I \in \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A}_c)$ a každé $c \in \boldsymbol{A}_c$ platí, že $a \leq \bigvee I$ právě když $a \in I$. Odtud dostaneme, že pro každé $I \in \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A}_c)$,

$$\alpha_{\boldsymbol{A}}\beta_{\boldsymbol{A}}(I) = \{c \in \boldsymbol{A}_c \mid c \leq \bigvee I\} = I.$$

Celkem tak máme, že

Věta 12.5. *Pro každý algebraický svaz $\boldsymbol{I}$ jsou zobrazení $\alpha_{\boldsymbol{A}} \colon \boldsymbol{A} \to \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A}_c)$ a $\beta_{\boldsymbol{A}} \colon \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{A}$ definované předpisy* (13.2) *a* (13.1) *vzájemně inverzními izomorfismy úplných svazů. Každý algebraický svaz je tedy izomorfní svazu ideálů $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvazu svých kompaktních prvků.*

12.3. Distibutivita a modularita $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvazů. Najdeme vlastnosti $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvazů, které jsou ekvivalentní distributivě respektivě modularitě svazu jejich ideálů.

Definice. $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz $\boldsymbol{C}$ je *distributivní* pokud pro každé $a, b, c \in C$ splňující $a \leq b \vee c$, existují $b' \leq b$ a $c' \leq c$ takové, že $a = b' \vee c'$.

Věta 12.6. *$\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz $\boldsymbol{C}$ je distributivní právě když je distributivní svaz jeho ideálů.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že $\boldsymbol{C}$ je distributivní $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz a nechť I, J, K jsou jeho ideály. Ukážeme, že $I \cap (J \vee K) \subseteq (I \cap J) \vee (I \cap K)$. Zvolme libovolně $a \in I \cap (J \vee K)$. Potom existují $b \in J$ a $c \in K$ takové, že $a \leq b \vee c$. Protože je $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz $\boldsymbol{C}$ distributivní, existují $b' \leq b$ a $c' \leq c$

takové, že $a = b' \leq c'$. Protože $b' \leq a \in I$ a $b' \leq b \in J$, je $b' \in I \cap J$ a podobně $c' \in I \cap K$. Odtud plyne, že $a \in (I \cap J) \cup (I \cap K)$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že je svaz $\mathrm{Id}(\boldsymbol{C}_c)$ distributivní a nechť $a \leq b \vee c$ in $\boldsymbol{C}$. Z distibutivity svazu $\mathrm{Id}(\boldsymbol{C}_c)$ dostaneme, že

$$a \in \downarrow a \cap (\downarrow b \vee \downarrow c) = (\downarrow a \cap \downarrow b) \vee (\downarrow a \cap \downarrow c).$$

Proto existují $b' \in \downarrow a \cap \downarrow b$ a $c' \in \downarrow a \cap \downarrow c$ tak, že $a \leq b' \vee c'$. Z $b' \in \downarrow a$ plyne, že $b' \leq a$ a podobně z $c' \in \downarrow a$ plyne, že $c' \leq a$, proto $a = b' \vee c'$. Nakonec z $b' \in \downarrow b$ plyne, že $b' \leq b$ a z $c' \in \downarrow c$, že $c' \leq c$. $\square$

LEMMA 12.7. *Buď $\boldsymbol{C}$ distributivní $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz a $a, b_1, \dots, b_m \in C$ takové, že $a \leq b_1 \vee \dots \vee b_m$. Potom existují $b'_j \leq b_j$, $j = 1, \dots, m$ takové, že $a = b'_1 \vee \dots \vee b'_m$.*

DŮKAZ. Důkaz povedeme indukcí podle m. Pro $m = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že $m > 1$, a že tvrzení platí pro $m - 1$. Položme $b = b_1 \vee \dots \vee b_{m-1}$ a $c = b_m$. Z distributivity $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvazu $\boldsymbol{C}$ plyne, že existují $b' \leq b$ a $c' \leq c$ takové, že $a = b' \vee c'$. Protože $b' \leq b = b_1 \vee \dots \vee b_{m-1}$, plyne z indukčního předpokladu existence $b'_j \leq b_j$, $j = 1, \dots, m-1$, takových, že $b' = b'_1 \vee \dots \vee b'_{m-1}$. Položme $b'_m = c' \leq b_m$. Z rovnost $a = b' \vee c'$ dostaneme, že $a = b'_1 \vee \dots \vee b'_m$. $\square$

TVRZENÍ 12.8. *$\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz $\boldsymbol{C}$ je distributivní právě když pro všechna $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_m \in C$ taková, že*

$$a_1 \vee \dots \vee a_n = b_1 \vee \dots \vee b_m,$$

existují $c_{ij} \in C$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, splňující

$$a_i = c_{i1} \vee \dots \vee c_{im} \quad a \quad b_j = c_{1j} \vee \dots \vee c_{nj}, \tag{12.4}$$

pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ a všechna $j \in \{1, \dots, m\}$.

DŮKAZ. ($\Leftarrow$) Nechť $a, b, c \in C$ jsou takové, že $a \leq b \vee c$. Položme $a_1 = a$, $a_2 = b \vee c$, $b_1 = b$ a $b_2 = c$. Potom $a_1 \vee a_2 = b_1 \vee b_2$ a tedy existují $c_{ij} \in C$, $i, j = 1, 2$, takové, že $a_1 = c_{11} \vee c_{12}$, $b_1 = c_{11} \vee c_{21}$ a $b_2 = c_{12} \vee c_{22}$. Položme $b' = c_{11}$ a $c' = c_{12}$. Potom $b' \leq b$, $c' \leq c$ a $a = b' \vee c'$. ($\Rightarrow$) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že $a_i \leq b_1 \vee \dots \vee b_m$ a proto podle Lemmatu 12.4 existují $b'_{ij} \leq b_j$, $j = 1, \dots, m$, takové, že $a_i = b'_{i1} \vee \dots \vee b'_{im}$. Podobně pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ existují $a'_{ij} \leq a_i$, $i = 1, \dots, n$ takové, že $b_j = a'_{1j} \vee \dots \vee a'_{nj}$. Položíme $c_{ij} = a'_{ij} \vee b'_{ij}$. Snadno nahlédneme, že takto definované prvky splňují rovnosti (12.3). $\square$

DEFINICE. $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz $\boldsymbol{C}$ je *modulární* pokud pro každé $a, b, c \in C$ splňující $a \leq c \leq a \vee b$ existuje $b' \leq b$ takové, že $c = a \vee b'$.

VĚTA 12.9. *$\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz $\boldsymbol{C}$ je modulární právě když je modulární svaz jeho ideálů.*

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že $\boldsymbol{C}$ je modulární $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz. Ukážeme, že $(I \vee J) \cap K \subseteq I \vee (J \cap K)$ pro každou trojici jeho ideálů I, J, K

takovou, že $I \subseteq K$. Buď $c \in (I \vee J) \cap K$. Potom existují $a \in I$, $b \in J$ tak, že $c \le a \vee b$. Položme $c' = a \vee c$. Protože $a \in J \subseteq K$ a $c \in K$, platí, že $c' \in K$. Z nerovností $a \le c' \le a \vee b$ a z modularity polosvazu $\boldsymbol{C}'$ plyne, že existuje $b' \le b$ takové, že $c' = a \vee b'$. Protože $b' \le b \in J$ a zároveň $b' \le c' \in K$, platí, že $b' \in J \cap K$. Protože $a \in I$, dostaneme odtud, že $c \le c' = a \vee b' \in I \vee (J \cap K)$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že je svaz $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$ modulární. Nechť $a, b, c \in C$ jsou takové, že $a \le c \le a \vee b$. Protože $a \le c$, ${\downarrow}a \subseteq {\downarrow}c$ a z modularity svazu $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{C})$ dostaneme, že $({\downarrow}a \vee {\downarrow}b) \cap {\downarrow}c = {\downarrow}a \vee ({\downarrow}b \cap {\downarrow}c)$. Z nerovnosti $c \le a \vee b$ plyne, že ${\downarrow}c \le {\downarrow}a \vee {\downarrow}b$, a proto ${\downarrow}c = {\downarrow}a \vee ({\downarrow}b \cap {\downarrow}c)$. Proto existuje $b' \in {\downarrow}b \cap {\downarrow}c$ takové, že $c \le a \vee b'$. Protože $a \le c$ a $b' \le c$, dostáváme odtud, že $c = a \vee b'$. Nakonec z $b' \in {\downarrow}b$ plyne, že $b' \le b$. □

Z Vět 12.2, 12.3 a 12.6 dostaneme, že

Důsledek 12.10. *Algebraický svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní (resp. modulární) právě když je $\langle \vee, 0 \rangle$-polosvaz jeho kompaktních prvků $\boldsymbol{A}_c$ distributivní (resp. modulární).*

12.4. Další vlastnosti algebraických svazů. Podmnožina B uspořádané množiny je *nahoru usměrněná*, pokud pro každou konečnou $F \subseteq B$ existuje prvek $b \in B$ takový, že $a \le b$ pro všechna $a \in F$. Duálně definujeme *dolů usměrněnou* podmnožinu.

Definice. Řekneme, že úplný svaz $\boldsymbol{A}$ je *nahoru spojitý* pokud pokud pro každé $a \in A$ a každou nahoru usměrněnou $B \subseteq A$ platí, že

$$a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b \in B} (a \wedge b).$$

Duálně definujeme *dolů spojitý* svaz.

Tvrzení 12.11. *Algebraický svaz je nahoru spojitý.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ algebraický svaz, $a \in A$ a $B \subseteq A$ nahoru usměrněná podmnožina. Ukážeme, že $a \wedge \bigvee B \le \bigvee_{b \in B}(a \vee b)$. Opačná nerovnost zřejmě platí. Nechť c je kompaktní prvek svazu $\boldsymbol{A}$ takový, že $c \le a \wedge \bigvee B$. Potom $c \le \bigvee B$ a proto existuje konečná $F \subseteq B$ taková, že $c \le \bigvee F$. Protože je množina B nahoru usměrněná, existuje $b \in B$ takové, že $c \le \bigvee F \le b$. Potom je $c \le a \wedge b$ a tedy $c \le \bigvee_{b \in B}(a \wedge b)$. Protože je každý prvek algebraického svazu spojením kompaktních prvků, plyne odtud dokazovaná nerovnost. □

Svaz podalgeber nebo kongruencí algebry je algebraický. Roli kompaktních prvků v něm hrají konečně generované podalgebry respektive konečně generované kongruence. Příkladem je svaz podprostorů vektorového prostoru $\boldsymbol{V}$, který budeme značit $\mathrm{Sub}(\boldsymbol{V})$. Protože podprostory vektorových prostorů odpovídají jádrům homomorfismů, je tento svaz izomorfní svazu $\mathrm{Con}(\boldsymbol{V})$ kongruencí prostoru $\boldsymbol{V}$. Operace průseku ve svazu $\mathrm{Sub}(\boldsymbol{V})$ odpovídá průniku, spojení množiny podprostorů je podprostor generovaný jejich sjednocením.

Uvažme vektorový prostor $\boldsymbol{V} := \{(q_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid q_i \in \mathbb{Q}\}$ všech posloupností racionálních čísel nad tělesem $\mathbb{Q}$. Buď

$$\boldsymbol{U} := \{(q_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\forall j > n)(q_j = 0)\}$$

podprostor posloupností, které jsou skoro všude nulové. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ označme $\boldsymbol{e}_j = (e_i^j)_{i\in\mathbb{N}}$ posloupnost, danou předpisem

$$e_i^j = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Množina $\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ tvoří bázi podprostoru $\boldsymbol{U}$. Podprostor $\boldsymbol{U}$ je spočetný, zatímco $\boldsymbol{V}$ je mohutnosti kontinua. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ definujme ještě podprostor $\boldsymbol{W}_j := \{(q_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \boldsymbol{V} \mid q_1 = \dots = q_j = 0\}$. Všimněme si, že $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \boldsymbol{W}_j = \boldsymbol{0}$, a že $\boldsymbol{U} \vee \boldsymbol{W}_j = \boldsymbol{V}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Proto platí, že

$$\boldsymbol{U} \vee \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \boldsymbol{W}_j = \boldsymbol{U} \subsetneq \boldsymbol{V} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (\boldsymbol{U} \vee \boldsymbol{W}_j)\,.$$

Vidíme tak, že algebraický svaz nemusí být dolů spojitý.

Definice. Řekneme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je *slabě atomární* pokud pro každé $a, b \in A$ takové, že $a < b$ existují $u, v \in A$ splňující $a \le u \prec v \le b$.

Uzavřený interval $\langle 0, 1\rangle$ chápaný jako lineárně uspořádaný svaz není slabě atomární, neboť pro každé $u, v \in \langle 0, 1\rangle$ takové, že $u < v$ existuje $w \in \langle 0, 1\rangle$ splňující $u < w < v$.

Věta 12.12. *Každý algebraický svaz je slabě atomární.*

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{A}$ je algebraický svaz a $a < b$ uspořádaná dvojice prvků v A. Protože je každý prvek algebraického svazu spojením kompaktních prvků, existuje $c \in \boldsymbol{A}_c$ takový, že $c \nleq a$ ale $c \le b$. Uvažme množinu $C := \{x \in b/a \mid x \nleq a\}$. Protože $a \in C$, je množina C neprázdná. Je-li $C' \subseteq C$ řetězec, potom z kompaktnosti prvku c plyne, že $c \nleq \bigvee C'$. Kdyby totiž platilo, že $c \le \bigvee C'$, existovala by konečná $F \subseteq C'$ taková, že $c \le \bigvee F$. Protože je C' řetězec a podmnožina F je konečná, má F největší prvek. Označme jej f. Potom $c \le f$, což je ve sporu s předpokladem, že $f \in C$.

Podle Zornova lemmatu existuje maximální prvek u množiny C. Položme $v = u \vee c$. Potom platí, že $a \le u < v \le b$. Je-li $u \le w \le v$, pak buďto $c \nleq w$ nebo $c \le w$. V prvním případě plyne z maximality prvku u v množině C, že $u = w$. Ve druhém případě je $u \vee c \le w \le v = u \vee c$, a tedy $w = v$. Proto platí, že $u \prec v$. $\square$

12.5. Intervaly algebraických svazů.

Lemma 12.13. *Buď b/a interval svazu $\boldsymbol{A}$. Je-li $c \le b$ kompaktní prvek svazu $\boldsymbol{A}$, je $c \vee a$ kompaktní prvek intervalu b/a. Je-li svaz $\boldsymbol{A}$ algebraický, jsou všechny kompaktní prvky intevalu b/a tohoto tvaru. To znamená, že platí rovnost*

$$(b/a)_c = \{a \vee c \mid c \le b,\ \text{a zároveň } c \in \boldsymbol{A}_c\}. \tag{12.5}$$

Důkaz. Buď U neprázdná podmnožina intervalu b/a. Pokud existuje spojení w množiny U v intervalu b/a, potom platí, že $w = \bigvee U$ ve svazu $\boldsymbol{A}$. Stačí ukázat, že pro každé $x \in A$ takové, že $u \leq x$ pro všechna $u \in U$ platí, že $w \leq x$. Protože je množina U neprázdná, $a \leq x$. Odtud plyne, že $b \wedge x$ leží v intervalu b/a, a proto $w \leq b \wedge x \leq x$.

Buď $c \leq b$ kompaktní prvek svazu $\boldsymbol{A}$. Buď U podmnožina intervalu b/a jejíž spojení v tomto intervalu existuje a je větší nebo rovno prvku $c \vee a$. Potom je $c \leq \bigvee U$ a proto existuje konečná $F \subseteq U$ taková, že $c \leq \bigvee F$. Protože $F \subseteq U \subseteq\subseteq b/a$, platí, že $c \vee a \leq \bigvee F$. Proto je $c \vee a$ kompaktní prvek intervalu b/a.

Předpokládejme nakonec, že je svaz $\boldsymbol{A}$ algebraický. Zbývá ukázat, že každý kompaktní prvek intervalu b/a je tvaru $a \vee c$ pro nějaký kompaktní prvek $c \leq b$ svazu $\boldsymbol{A}$. Buď y kompaktní prvek intervalu b/a. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ algebraický, je prvek y spojením množiny jeho kompaktních prvků, tedy $y = \bigvee X$ pro nějakou $X \subseteq \boldsymbol{A}_c$ taková, že $y = \bigvee\{x \vee c \mid x \in X\}$. Protože $y \in (b/a)_c$, existuje konečná $F \subseteq X$ taková, že $y = \bigvee_{x \in F} a \vee x = a \vee \bigvee F$. Protože jsou kompaktní prvky uzavřeny na konečná spojení, je $\bigvee F \in \boldsymbol{A}_c$. □

Tvrzení 12.14. *Interval v algebraickém svazu je opět algebraický svaz.*

Důkaz. Buď b/a interval v algebraickém svazu $\boldsymbol{A}$. Interval úplného svazu je zřejmě úplný podsvaz. Stačí tedy ukázat, že je každý prvek $x \in b/a$ spojením kompaktních prvků tohoto intervalu. Podle Lemmatu 12.10 to jsou právě prvky tvaru $a \vee c$, kde c jsou kompaktní prvky svazu $\boldsymbol{A}$ menší nebo rovné prvku b. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ algebraický, je prvek x spojením množiny jeho kompaktních prvků. Označme ji Y. Potom je $\{a \vee y \mid y \in Y\}$ množina kompaktních prvků intervalu b/a a prvek x je jejím spojením. □

12.6. Úplně průsekově nerozložitelné prvky. Prvek a svazu $\boldsymbol{A}$ je *úplně průsekově nerozložitelný*, má-li množina $\uparrow a \setminus \{a\} = \{x \in A \mid a < x\}$ nejmenší prvek. Tento prvek označíme a^*. Množinu všech úplně průsekově nerozložitelných prvků svazu $\boldsymbol{A}$ označíme $\mathrm{M}^*(\boldsymbol{A})$. Pro úplně průsekově nerozložitelný prvek a platí, že $a \prec a^*$ a $a < b$ právě když $a^* \leq b$ pro každé $b \in \boldsymbol{A}$. V úplném svazu jsou úplně nerozložitelné prvky charakterizovány takto:

Lemma 12.15. *Buď $\boldsymbol{A}$ úplný svaz. Prvek $a \in \boldsymbol{A}$ je úplně průsekově nerozložitelný právě když pro každou podmnožinu $B \subseteq A$ platí, že $a = \bigwedge B \implies a \in B$.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Nechť $B \subseteq A$ a $a = \bigwedge B \in \mathrm{M}^*(\boldsymbol{A})$. Pro spor předpokládejme, že $a \notin B$. Odtud plyne, že $a < b$ a tedy $a^* \leq b$, pro všechna $b \in B$. Dostaneme, že $a < a^* \leq \bigwedge B$. To je ve sporu s původní rovností $a = \bigwedge B$. ($\Leftarrow$) Položme $B = \{x \in A \mid a < x\}$. Potom platí, že $a \leq \bigwedge B$, a protože $a \notin B$, máme dokonce nerovnost $a < \bigwedge B$. Proto $\bigwedge B \in B$ a tedy je $\bigwedge B$ nejmenší prvek množiny B. Z definice je a úplně průsekově nerozložitelný. □

Věta 12.16. *V algebraickém svazu je každý prvek průsekem úplně průsekově nerozložitelných prvků.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ algebraický svaz a nechť $a \in A$. Položme

$$B = \{u \in \mathrm{M}^*(\boldsymbol{A}) \mid a \leq u\}$$

a $b = \bigwedge B$. Pro spor předpokládejme, že $a < b$. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ algebraický, existuje kompaktní $c \in \boldsymbol{A}$ takový, že $a \nleq c$ a $c \leq b$. Položme $C := \{x \in A \mid c \nleq x\}$. Je-li $C' \subseteq C$ řetězec, potom z kompaktnosti prvku c plyne, že $\bigvee C' \in C$ (argumentujeme podobně jako v důkazu Věty 12.9). Podle Zornova lemmatu existuje maximální prvek d množiny C takový, že $a \leq d$. Z maximality d v množině C plyne, že $c \leq x$ pro každé $x \in A$ takové, že $d < x$. Proto $c \leq \bigwedge\{x \in \boldsymbol{A} \mid d < x\}$. Odtud plyne, že $d < \bigwedge\{x \in \boldsymbol{A} \mid d < x\}$. Proto je prvek d úplně průsekově nerozložitelný. Potom ale $d \in B$ a tedy $c \leq b \leq d$. To je spor. $\square$

KAPITOLA 13

Subdirektní a redukovaný součin

SHRNUTÍ. Prozkoumáme vlastnosti subdirektního a redukovaného součinu z pohledu univerzální algebry. Nakonec se podíváme na některé vlastnosti ultrafiltrů. Ukážeme, že na nekonečných množinách existují ultrafiltry, které nejsou hlavní..

13.1. Vlastnosti variet. Uvažujeme algebry ve smyslu univerzální algebry. Formálně je *algebra* trojice $\boldsymbol{A} = \langle A, \mathcal{F}_{\boldsymbol{A}}, \rho_{\boldsymbol{A}} \rangle$, kde A je množina, $\mathcal{F}_{\boldsymbol{A}}$ soubor operací a $\rho_{\boldsymbol{A}} \colon \mathcal{F}_{\boldsymbol{A}} \to \mathbb{N}_0$ zobrazení, které určuje aritu operace $f \in \mathcal{F}_{\boldsymbol{A}}$. Je-li $\rho_{\boldsymbol{A}}(f) = n$, máme operaci $f \colon A^n \to A$. *Typ algebry* je dvojice $\langle \mathcal{F}, \rho \rangle$, tedy typ algebry určuje operace a jejich arity na této algebře. Algebry jsou *podobné*, mají-li stejný typ. Dále uvažujme jen algebry stejného, pevně daného typu.

Buď $\mathcal{K}$ třída algeber. Označme

- $\mathbf{H}(\mathcal{K})$ - třídu všech homomorfních obrazů algebra z $\mathcal{K}$,
- $\mathbf{S}(\mathcal{K})$ - třídu všech podalgeber prvků $\mathcal{K}$,
- $\mathbf{P}(\mathcal{K})$ - třídu všech součinů prvků z $\mathcal{K}$.

Důkaz následujícího lemmatu je přímočarý. Ponecháme jej na čtenáři

LEMMA 13.1. *Pro třídu algeber $\mathcal{K}$ platí, že $\mathbf{SH}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HS}(\mathcal{K})$, $\mathbf{PH}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HP}(\mathcal{K})$ a $\mathbf{PS}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{SP}(\mathcal{K})$. Proto je třída $\mathbf{HSP}(\mathcal{K})$ uzavřená na všechny tři výše uvedené operace.*

Varietou algeber rozumíme třídu algeber $\mathcal{V}$ uzavřenou na všechny tři operace $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ a $\mathbf{P}$. Je-li $\mathcal{K}$ třída algeber, je soubor všech variet obsahující $\mathcal{K}$ uzavřen na průniky a tedy existuje nejmenší taková varieta. Budeme ji nazývat *varieta generovaná třídou* $\mathcal{K}$ a značit $\mathbf{V}(\mathcal{K})$. Z Lemmatu 13.1 dostaneme, že

VĚTA 13.2. *Pro třídu algeber $\mathcal{K}$ platí rovnost $\mathbf{V}(\mathcal{K}) = \mathbf{HSP}(\mathcal{K})$.*

13.2. Direktní a subdirektní součin. Mějme $\langle \boldsymbol{A}_i \mid i \in I \rangle$ soubor algeber. *Direktním součinem* tohoto souboru míníme algebru

$$\prod_{i \in I} \boldsymbol{A}_i := \{(a_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I \colon a_i \in A_i\},$$

tedy algebru sestávající ze všech posloupností $(a_i)_{i \in I}$ jejichž i-tá složka leží v A_i. Operace této algebry jsou dány po složkách. To znamená, že pro každou

n-ární operaci f platí rovnost

$$f\left((a_i^1)_{i\in I},(a_i^2)_{i\in I},\dots,(a_i^n)_{i\in I}\right)=\left(f(a_i^1,a_i^2,\dots,a_i^n)\right)_{i\in I},$$

pro všechna $(a_i^j)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i$. Pro každé $i\in I$ je dána kanonická projekce, tedy homomorfismus

$$\begin{aligned}\pi_i\colon \prod_{i\in I}\boldsymbol{A}_i&\to\boldsymbol{A}_i\\ (a_i)_{i\in I}&\mapsto a_i\end{aligned}.$$

Lemma 13.3. *Pro každý homomorfismus $\varphi\colon\boldsymbol{B}\to\prod_{i\in I}\boldsymbol{A}_i$ platí, že*

$$\ker\varphi=\bigcap_{i\in I}\ker(\pi_i\circ\varphi).$$

Důkaz. Pro $\boldsymbol{a}=(a_i)_{i\in I},\boldsymbol{b}=(b_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i$ platí, že $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\bigcap_{i\in I}\ker\pi_i$ právě když $a_i=\pi_i(\boldsymbol{a})=\pi_i(\boldsymbol{b})=b_i$ pro všechna $i\in I$ právě když $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. Odtud plyne, že pro každé $a,b\in B$ platí, že $(a,b)\in\bigcap_{i\in I}\ker(\pi_i\circ\varphi)$ právě když $(\varphi(a),\varphi(b))\in\bigcap_{i\in I}\ker\pi_i$ právě když $\varphi(a)=\varphi(b)$. □

Vnoření $\beta\colon\boldsymbol{B}\hookrightarrow\prod_{i\in I}\boldsymbol{A}_i$ je *subdirektním součinem* souboru $\mathcal{A}=\langle\boldsymbol{A}_i\mid i\in I\rangle$ pokud je $(\pi_i\circ\beta)(B)=A_i$ pro každé $i\in I$, tj. pokud jsou všechna složení $\pi_i\circ\beta$ homomorfismy na. Z definice je vidět, že β je subdirektním součinem souboru $\mathcal{A}$ právě když pro každé $i\in I$ a každé $a\in A_i$ existuje $b\in B$ takové, že $\beta(b)_i=a$. Buď $\mathcal{K}$ třída algeber. Symbolem $\mathbf{P}_S(\mathcal{K})$ označíme soubor všech subdirektních součinů souborů algeber z třídy K.

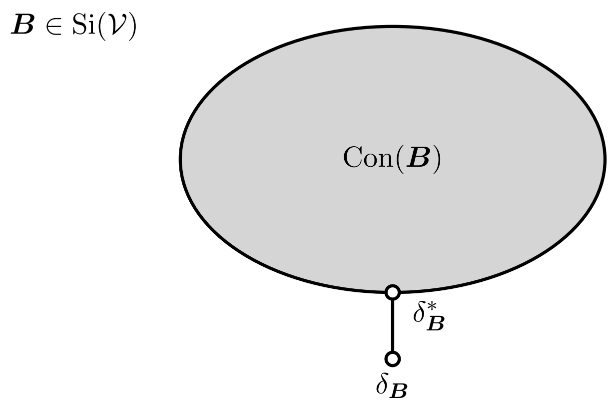
Řekneme, že algebra $\boldsymbol{B}$ je *subdirektně nerozložitelná* pokud pro každý subsdirektní součin $\beta\colon\boldsymbol{B}\hookrightarrow\prod_{i\in I}\boldsymbol{A}_i$ existuje $i\in I$ takové, že je $\pi_i\circ\beta\colon\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{A}_i$ izomorfismus.

Připomeňme, že symbolem $\mathrm{Con}(\boldsymbol{A})$ značíme svaz kongruencí algebry $\boldsymbol{A}$. Symbolem $\delta_{\boldsymbol{A}}$ značíme nejmenší kongruenci algebry $\boldsymbol{A}$, tj. kongruenci takovou, že $a\equiv b\pmod{\delta_{\boldsymbol{A}}}$ právě když $a=b$ pro všechna $a,b\in A$. Tuto nejmenší kongruenci $\delta_{\boldsymbol{A}}$ nazýváme také *triviální kongruencí*.

Lemma 13.4. *Algebra $\boldsymbol{B}$ je subdirektně nerozložitelná právě když je její triviální kongruence $\delta_{\boldsymbol{B}}$ úplně průsekově nerozložitelná.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že je algebra $\boldsymbol{B}$ subdirektně nerozložitelná a označme J množinu všech netriviálních kongruencí algebry $\boldsymbol{B}$ (tj., kongruencí větších než $\delta_{\boldsymbol{B}}$). Pro každou kongruenci $\theta\in J$ je dán kanonický homomorfismus $\varphi_\theta\colon\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}/\theta$. Tato zobrazení indukují homomorfismus $\varphi\colon\boldsymbol{B}\to\prod_{\theta\in J}\boldsymbol{B}/\theta$, $a\mapsto(\varphi_\theta(a))_{\theta\in J}$. Pro každé $\theta\in J$ máme kanonickou projekci $\pi_\theta\colon\prod_{\theta\in J}\boldsymbol{B}/\theta\to\boldsymbol{B}/\theta$, $(\varphi_\theta(a))_{\theta\in J}\mapsto\varphi_\theta(a)$ a platí rovnost $\varphi_\theta=\pi_\theta\circ\varphi$. Protože $\theta=\ker\varphi_\theta$ a kongruence θ jsou netriviální, není žádný z homomorfismů $\pi_\theta\circ\varphi$ prostý. Protože je $\boldsymbol{B}$ subdirektně nerozložitelná, nemůže být $\varphi\colon\boldsymbol{B}\to\prod_{\theta\in J}\boldsymbol{B}/\theta$ subdirektním součinem a tedy není prosté. Vzhledem k Lemmatu 13.3 platí, že $\delta_{\boldsymbol{B}}\subsetneq\ker\varphi=\bigcap_{\theta\in J}\ker(\pi_\theta\circ\varphi)=\bigcap_{\theta\in J}\varphi_\theta=\bigcap J$. Proto je kongruence $\delta_{\boldsymbol{B}}$ úplně průsekově nerozložitelná. ($\Leftarrow$) Nyní předpokládejme, že je kongruence $\delta_{\boldsymbol{B}}$ úplně průsekově nerozložitelná a buď $\beta\colon\boldsymbol{B}\hookrightarrow$

$\prod_{i\in I} A_i$ subdirektní součin. Potom je $\delta_{\boldsymbol{B}} = \ker\varphi = \bigcap_{i\in I}\ker(\pi_i\circ\varphi)$, a protože je kongruence $\delta_{\boldsymbol{B}}$ úplně průsekově nerozložitelná, existuje $i \in I$ takové, že $\delta_B = \ker(\pi_i\circ\varphi)$. Proto je algebra $\boldsymbol{B}$ subdirektně nerozložitelná. □



Obrázek 13.1. Svaz kongruencí subdirektně nerozložitelné algebry

Symbolem $\delta^*_{\boldsymbol{B}}$ označíme průnik všech netriviálních kongruencí algebry $\boldsymbol{B}$. Z lemmatu 13.4 je vidět, že mohou nastat právě tyto dva případy: Buďto $\delta_{\boldsymbol{B}} = \delta^*_{\boldsymbol{B}}$, nebo $\delta_{\boldsymbol{B}} \prec \delta^*_{\boldsymbol{B}}$, kongruence $\delta_{\boldsymbol{B}}$ je úplně průsekově nerozložitelná a algebra $\boldsymbol{B}$ je subdirektně nerozložitelná.

Pro každou kongruenci θ algebry $\boldsymbol{A}$ je interval $\uparrow\theta$ ve svazu $\mathrm{Con}\,\boldsymbol{A}$ izomorfní svazu kongruencí algebry $\boldsymbol{A}/\theta$. Z Lemmatu 13.4 proto plyne, že

Důsledek 13.5. *Pro každou kongruenci θ algebry $\boldsymbol{A}$ je faktorová algebra $\boldsymbol{A}/\theta$ subdirektně nerozložitelná právě když je kongruence θ úplně průsekově nerozložitelná.*

Věta 13.6. *Ve varietě algeber platí, že každá algebra je subdirektním součinem subdirektně nerozložitelných algeber.*

Důkaz. Buď $\mathcal{V}$ varieta algeber a $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$. Svaz $\mathrm{Con}(\boldsymbol{A})$ kongruencí algebry $\boldsymbol{A}$ je algebraický. Podle Věty 12.11 je proto každá kongruence algebry $\boldsymbol{A}$ průsekem průsekově nerosložitelných kongruencí. Speciálně platí, že

$$\delta_{\boldsymbol{A}} = \bigcap \mathrm{M}^*(\mathrm{Con}\,\boldsymbol{A}),$$

a proto je homomorfismus

$$\boldsymbol{A} \mapsto \prod_{\theta\in \mathrm{M}^*(\mathrm{Con}\,\boldsymbol{A})} \boldsymbol{A}/\theta$$

indukovaný kanonickými projekcemi $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}/\theta$ prostý a tedy je subdirektním součinem. Vzhledem k Důsledku 13.5 jsou algebry $\boldsymbol{A}/\theta$, $\theta \in \mathrm{M}^*(\mathrm{Con}\,\boldsymbol{A})$, subdirektně nerozložitené. □

Označme $\mathrm{Si}(\mathcal{V})$ třídu všech subdirektně nerozložitelných algeber v dané varietě $\mathcal{V}$. Podle předchozí věty je

$$\mathcal{V} = \mathbf{P}_S(\mathrm{Si}(\mathcal{V})) \subseteq \mathbf{SP}(\mathrm{Si}(\mathcal{V})). \tag{13.1}$$

13.3. Redukovaný součin.

Definice. *Filtr* na množině I je systém $\mathcal{F}$ podmnožin I takový, že

(1) $I \in \mathcal{F}$ a $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
(2) pokud $J \in \mathcal{F}$ a $J \subseteq K \subseteq I$, pak také $K \in \mathcal{F}$,
(3) pokud $J, K \in \mathcal{F}$, pak také $J \cap K \in \mathcal{F}$.

Všimněme si, že podmínka (2) imlikuje, že $\bigcap F \in \mathcal{F}$ pro každou neprázdnou konečnou podmnožinu $F \subseteq \mathcal{F}$.

Filtr $\mathcal{F}_J$ určený podmnožinou $J \subseteq I$ je dán předpisem

$$\mathcal{F}_J := \{K \mid J \subseteq K \subseteq I\}.$$

Takový filtr budeme nazývat *hlavní filtr*. Je-li I konečná množina, je každý filtr na I hlavní. Na nekonečné množině I existují filtry, které nejsou hlavní. Příkladem je *Fréchetův filtr* (značíme jej $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$) daný předpisem

$$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}} := \{K \subseteq I \mid \text{Množina } I \setminus K \text{ je konečná}\}.$$

Buď $\langle \boldsymbol{A}_i \mid i \in I\rangle$ soubor algeber. Filtr $\mathcal{F}$ na množině I určuje relaci $\Theta_{\mathcal{F}}$ na součinu $\prod_{i\in I} \boldsymbol{A}_i$ danou předpisem

$$((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in \Theta_{\mathcal{F}} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{F}.$$

Všimněme si, že $((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in \Theta_{\mathcal{F}}$ právě když existuje množina $J \in eF$ taková, že $a_j = b_j$ pro všechna $j \in J$.

Lemma 13.7. *Relace $\Theta_{\mathcal{F}}$ je kongruencí součinu $\prod_{i\in I} \boldsymbol{A}_i$.*

Důkaz. Z definice je relace $\Theta_{\mathcal{F}}$ symetrická. Protože $I \in \mathcal{F}$, je reflexivní. Ukážeme tranzitivitu. Nechť $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in I}$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i\in I}$ a $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \boldsymbol{A}_i$. Předpokládejme, že $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \Theta_{\mathcal{F}}$ a zároveň $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \Theta_{\mathcal{F}}$. Potom je

$$\{i \in I \mid a_i = b_i\} \cap \{i \in I \mid b_i = c_i\} \in \mathcal{F}$$

a $a_i = b_i = c_i$ na tomto průniku. Proto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \in \Theta_{\mathcal{F}}$. Ukázali jsme, že $\Theta_{\mathcal{F}}$ je ekvivalence na součinu $\prod_{i\in I} \boldsymbol{A}_i$.

Buď f n-ární operace a nechť $\boldsymbol{a}^j = (a_i^j)_{i\in I}, \boldsymbol{b}^j = (b_i^j)_{i\in I}$, $j = 1, \dots, n$, jsou prvky součinu $\prod_{i\in I} \boldsymbol{A}_i$ takové, že $(\boldsymbol{a}^j, \boldsymbol{b}^j) \in \Theta_{\mathcal{F}}$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$. Položme

$$J^j := \{i \in I \mid a_i^j = b_i^j\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Potom $\bigcap_{j=1}^n J^j \in \mathcal{F}$ a

$$f(a_i^1, \dots, a_i^n) = f(b_i^1, \dots, b_i^n), \quad \text{pro všechna } i \in \bigcap_{j=1}^n J^j. \tag{13.2}$$

Protože $f(\boldsymbol{a}^1,\dots,\boldsymbol{a}^n) = (f(a_i^1,\dots,a_i^n))_{i\in I}$ a $f(\boldsymbol{b}^1,\dots,\boldsymbol{b}^n) = (f(b_i^1,\dots,b_i^n))_{i\in I}$, dostaneme z (13.2), že

$$\big(f(\boldsymbol{a}^1,\dots,\boldsymbol{a}^n), f(\boldsymbol{b}^1,\dots,\boldsymbol{b}^n)\big) \in \Theta_{\mathcal{F}}.$$

Ukázali jsme, že $\Theta_{\mathcal{F}}$ je kongruence součinu $\prod_{i\in I}\boldsymbol{A}_i$. □

Definice. *Redukovaným součinem* souboru algeber $\langle \boldsymbol{A}_i \mid i \in I\rangle$ podle filtru $\mathcal{F}$ rozumíme algebru

$$\prod_{\mathcal{F}} \boldsymbol{A}_i := \prod_{i\in I}\boldsymbol{A}_i/\Theta_{\mathcal{F}}.$$

Lemma 13.8. *Pro podalgebru $\boldsymbol{B}$ algebry $\boldsymbol{A}$ platí, že*

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{HP}_S(\boldsymbol{A}).$$

Důkaz. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ položme $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}$ a uvažme algebru

$$\boldsymbol{C} := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}}\boldsymbol{A}_i \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\forall j \geq n)(a_j = a_n \in B)\}$$

posloupností $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}}\boldsymbol{A}_i$, které jsou skoro všude konstantní a mají hodnotu, označíme ji $\psi(\boldsymbol{a})$, která leží v algebře $\boldsymbol{B}$. Protože v každé ze souřadnic mohou posloupnosti z C nabývat libovolných hodnot, je $\boldsymbol{C} \in P_S(\boldsymbol{A})$. Přiřazením $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \psi(\boldsymbol{a})$ je dán surjektivní homomorfismus $\psi\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$. Proto $\boldsymbol{B} \in \mathbf{HP}_S(\boldsymbol{A})$. □

Všimněme si, že $\ker\psi = \Theta_{\mathcal{F}_{\text{fin}}} \restriction \boldsymbol{C}$.

Důsledek 13.9. *Pro každou třídu algeber $\mathcal{K}$ platí, že*

$$\mathbf{HSP}(\mathcal{K}) = \mathbf{HP}_S(\mathcal{K}).$$

Důkaz. Zřejmě platí, že $\mathbf{P}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{P}_S(\mathcal{K})$ a proto $\mathbf{HP}_S(\mathcal{K}) = \mathbf{HHP}_S\mathbf{P}(\mathcal{K})$. Proto stačí ukázat, že $\mathbf{SP}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HP}_S\mathbf{P}(K)$. Vzhledem k Lemmatu 13.8 platí pro každou třídu algeber $\mathcal{K}'$, že $\mathbf{S}(\mathcal{K}') \subseteq \mathbf{HP}_S(\mathcal{K}')$. Proto stačí položit $\mathcal{K}' = \mathbf{P}(\mathcal{K})$. □

13.4. Utrafiltry. Označme $\boldsymbol{F}(I)$ množinu všech filtrů na množině I uspořádanou inkluzí. Z defiice filtru snadno nahlédneme, že sjednocením řetězce filtrů je opět filtr ($\emptyset$ neleží v tomto sjednocení a další podmínky, které filtr musí splňovat snadno ověříme). Z Zornova lemmatu existují maximální filtry vzhledem k inkluzi. Budeme je nazývat *ultrafiltry*.

Lemma 13.10. *Filtr $\mathcal{U}$ na množině I je ultrafiltr právě když pro každou podmnožinu $J \subseteq I$ platí, že $J \in \mathcal{U}$, nebo $I \setminus J \in \mathcal{U}$.*

Důkaz. Protože $J \cap (I \setminus J) = \emptyset$, obsahuje každý filtr nejvýše jednu z množin J a $I \setminus J$. Proto musí být každý filtr splňující podmínku v lemmatu maximální. Předpokládejme, že $\mathcal{U}$ je ultrafiltr a nechť $J \subseteq I$. Pokud exituje $K \in \mathcal{U}$ taková, že $K \cap J = \emptyset$, je $K \subseteq I \setminus J$ a tedy $I \setminus J \in \mathcal{U}$. V opačném případě tvoří množina $\mathcal{F} = \{K \cap J \mid K \in \mathcal{U}\}$ filtr a platí, že $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$. Z maximality $\mathcal{U}$ plyne, že $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Protože $J = I \cap J \in \mathcal{F}$, platí, že $J \in \mathcal{U}$. □

Poznámka. *Filtr na množině můžeme chápat jako soubor* velkých mno*žin. Například v případě fréchetova filtru jsou velké ty množiny, jejichž doplněk je konečný. Na doplňky velkých množin z filtru můžeme nahlížet jako na množiny malé. V případě obecného filtru tak máme velké množiny, malé množiny a množiny, které nejsou ani velké ani malé. V případě ultrafiltru je každá množina buďto velká, nebo malá. Princip redukovaného součinu pak spočívá v úvaze* dvě posloupnosti se shodují právě když se shodují na velké množině *nebo ekvivalentně* právě když se liší na malé (zanedbatelné) množině.

Lemma 13.11. *Buď $\mathcal{U}$ ultrafiltr na množině I a $J \in \mathcal{U}$. Potom pro každý konečný rozklad $J = \bigsqcup_{i=1}^{n} J_i$ množiny J existuje právě jedno $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $J_i \in \mathcal{U}$.*

Důkaz. Protože $J_i \cap J_j = \emptyset$ pro všechna $1 \leq i < j \leq n$, leží v $\mathcal{U}$ nejvýše jedna z množin J_i. Pro spor předpokládejme, že tam žádná neleží. Potom podle Lemmatu 13.10 platí, že $I \setminus J_i \in \mathcal{U}$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Pak ale $I \setminus J = \bigcap_{i=1}^{n}(I \setminus J_i) \in \mathcal{U}$. To je spor. □

Lemma 13.12. *Každý hlavní ultrafiltr na množině I je tvaru $\uparrow\{i\}$ pro právě jedno $i \in I$.*

Důkaz. Buď $\mathcal{H}$ hlavní ultrafiltr na množině I. Podle Lemmatu **??** existuje neprázdná podmnožina $J \subseteq I$ taková, že $\mathcal{H} = \uparrow J$. Nechť $i \in J$. Je-li množina $J \setminus \{j\}$ neprázdná, leží podle předchozího Lemmatu 13.11 v $\mathcal{H}$ právě jedna z množin $\{i\}$ a $J \setminus \{i\}$. Protože jsou obě vlastní podmnožiny J, dostáváme spor s $\mathcal{H} = \uparrow J$. Proto je množina J jednoprvková. □

Hlavní ultrafiltry na množině I jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu s prvky této množiny. Pokud je množina I konečná, jsou všechny ultrafiltry na I hlavní. Pokud je I nekonečná, plyne z Zornova lemmatu, že existuje ultrafiltr $\mathcal{U}$ na I, který rozšiřuje Fréchetův filtr. Ten vzhledem k Lemmatu 13.12 hlavní být nemůže.

KAPITOLA 14

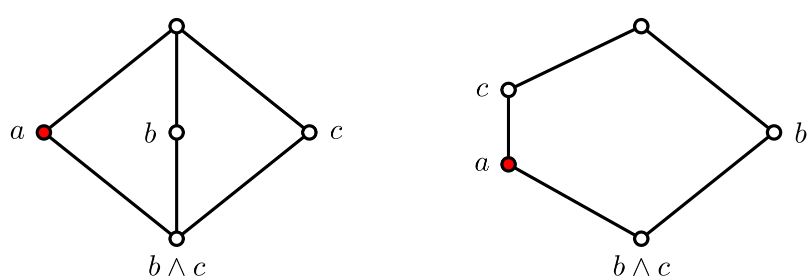
Kongruenčně distributivní variety

SHRNUTÍ. Svaz kongruencí svazu je distributivní. Charakterizujeme kongruenčně distributivní variety a ukážeme Jónssonovo lemma..

14.1. Ultraproduct a Jónssonovo lemma. Buď $\langle \boldsymbol{A}_i \mid i \in I \rangle$ soubor algeber. *Ultraprodukt* tohoto souboru je redukovaný produkt $\prod_{\mathcal{U}} \boldsymbol{A}_i$, kde $\mathcal{U}$ je ultrafiltr na množině I. Pro soubor algeber K označíme symbolem $\mathbf{P}_U(K)$ soubor všech ultraproduktů algeber z K.

Řekneme, že varieta $\mathcal{V}$ algeber je *kongruenčně distributivní*, pokud je svaz konguencí $\mathrm{Con}(\boldsymbol{A})$ distributivní pro každou algebru $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$. Vzhledem k Větě 7.6 je svaz kongruencí svazu distributivní. Proto ja každá varieta svazů kongruenčně distributivní.

Připomeňme, že prvek p svazu $\boldsymbol{A}$ je *průsekově nerozložitelný* pokud z $p = \bigwedge F$ plyne, že $p \in F$ pro každou konečnou $F \subseteq A$. Řekneme, že $p \in A$ je *průsekový prvočinitel* pokud z $\bigwedge F \leq p$ plyne, že existuje $a \leq p$ pro nějaké $a \in F$ pro každou konečnou $F \subseteq A$. Každý průsekový prvočinitel je z definice průsekově nerozložitelný. Naopak to platit nemusí. Prvek a va svazu $\boldsymbol{M_3}$, resp. $\boldsymbol{N_5}$, je průsekově nerozložitelný, ale není průsekovým prvočinitelem. Platí totiž, že $a \geq b \wedge c$ ale $b, c \nleq a$.



OBRÁZEK 14.1. Svazy $\boldsymbol{M_3}$ a $\boldsymbol{N_5}$

LEMMA 14.1. *V distributivním svazu je každý průsekově nerozložitelný prvek průsekovým prvočinitelem.*

DŮKAZ. Buď $\boldsymbol{A}$ distributivní svaz a $a \in A$ jeho průsekově nerozložitelný prvek. Uvažme konečnou $F \subseteq A$ takovou, že $a \geq \bigwedge F$. Potom z distributivity

dostaneme, že
$$a = a \vee \bigwedge F = \bigwedge_{b \in F} (a \vee b).$$
Protože je a průsekově nerozložitelný, existuje $b \in F$ takový, že $a = a \vee b$, ekvivalentně, $a \geq b$. Proto je a průsekovým prvočinitelem. □

Bez důkazu poznamenejme, že konečné svazy jsou distributivní právě když je každý jejich průsekově nerozložitelný prvek průsekovým prvočinitelem (cf. Důsledek 5.8). Duálně bychom definovali spojové prvočinitele a ukázali, že v distributivních svazech odpovídají spojově nerozložitelným prvkům.

Věta 14.2 (Jónssonovo lemma). *Pro každou třídu algeber $\mathcal{K}$ v kongruenčně distributivní varietě $\mathcal{V}$ platí, že*
$$\mathbf{HSP}(\mathcal{K}) = \mathbf{P}_S\mathbf{HSP}_U(\mathcal{K}).$$

Důkaz. Protože pro každou třídu algeber $\mathcal{K}'$ zřejmě platí, že $\mathbf{SP}(\mathcal{K}') \supseteq \mathbf{P}_S(\mathcal{K}')$ a $\mathbf{HP}(\mathcal{K}') \supseteq \mathbf{P}_U(\mathcal{K}')$, platí, že $\mathbf{HSP}(\mathcal{K}) \supseteq \mathbf{P}_S\mathbf{HSP}_U(\mathcal{K})$.

Ukážeme opačnou inkluzi. Podle Věty 13.6 je každá algebra ve varietě $\mathbf{HSP}(\mathcal{K})$ subdirektním součinem subdirektně nerozložitelných algeber z této variety. Proto stačí ukázat, že každá subdirektně nerozložitelná algebra $\boldsymbol{A} \in \mathbf{HSP}(\mathcal{K})$ leží v $\mathbf{HSP}_U(\mathcal{K})$.

Nejprve si rozeberme co znamená, že $\boldsymbol{A} \in \mathbf{HSP}(\mathcal{K})$. Existuje soubor algeber $\langle \boldsymbol{A}_i \mid i \in I \rangle \subseteq \mathcal{K}$, podalgebra $\boldsymbol{B} \leq \prod_{i \in I} \boldsymbol{A}_i$ a epimorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$. Existenci epimorfismu φ můžeme nahradit exitencí kongruence $\Phi(= \ker \varphi)$ algebry $\boldsymbol{B}$ takové, že $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}/\Phi$.

Ukážeme, že existuje ultrafiltr $\mathcal{U}$ na množině I takový, že $\Theta_{\mathcal{U}} \restriction \boldsymbol{B} \subseteq \Phi$.

Pro každou podmnožinu $J \subseteq I$ uvažme kongruneci Θ_J na $\prod_{i \in i} \boldsymbol{A}_i$ definovanou předpisem
$$(a_i)_{i \in I} \equiv (b_i)_{i \in I} \pmod{\Theta_J} \iff \forall j \in J\colon a_j = b_j.$$
Pro $J \neq \emptyset$ je $\Theta_J = \Theta_{\mathcal{F}_J}$. Položme
$$\mathcal{E} := \{J \subseteq I \mid \Theta_J \restriction \boldsymbol{B} \subseteq \Phi\}.$$

Protože $\Theta_\emptyset \restriction \boldsymbol{B} = B \times B$, $\emptyset \notin \mathcal{E}$. Kongruence Θ_I je triviální a proto $I \in \mathcal{E}$. Protože je algebra $\boldsymbol{B}$ subdirektně nerozožitelná, je kongruence Φ úplně průsekově nerozložitelná (cf. Důsledek 13.5). Protože je svaz kongruencí algebry $\boldsymbol{B}$ distributivní, je Φ průsekovým prvočinitelem ve svazu $\mathrm{Con}(\boldsymbol{B})$ (k tomu nám stačí, že je Φ průsekově nerozložtelná). Z definice je vidět, že pro dvojici podmnožin $J, K \subseteq I$ platí, že $\Theta_{J \cup K} = \Theta_J \cap \Theta_K$. Proto $\Theta_{J \cup K} \restriction \boldsymbol{B} \subseteq \Phi$ právě když $\Theta_J \restriction \boldsymbol{B} \subseteq \Phi$ nebo $\Theta_K \restriction \boldsymbol{B} \subseteq \Phi$. Proto platí, že

$$J \cup K \in \mathcal{E} \iff J \in \mathcal{E} \text{ nebo } K \in \mathcal{E}. \tag{14.1}$$

Všimněme si, že z (14.1) plyne, že $\mathcal{E}$ je uzavřeno na nadmnožiny.

Označme $\boldsymbol{F}$ množinu všech filtrů $\mathcal{F}$ na I takových, že $\mathcal{F} \subseteq \boldsymbol{E}$. Množina $\boldsymbol{F}$ je neprázdná neboť $\{I\} \in \boldsymbol{F}$. Protože sjednocením řetězce filtrů na I je opět filtr na I, je množina $\boldsymbol{F}$ uzavřená na tato sjednocení. Podle Zornova lemmatu existuje maximální prvek $\mathcal{U}$ množiny $\boldsymbol{F}$. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ je ultrafiltr.

Pro spor předpokládejme, že pro nějakou podmnožinu $J \subseteq I$ platí, že $J \notin \mathcal{U}$ a zároveň $I \setminus J \notin \mathcal{U}$. Pokud pro každé $K \in \mathcal{U}$ platí, že $J \cap K \in \mathcal{E}$, byl by $\{K' \subseteq I \mid \exists K \in \mathcal{U} \colon J \cap K \subseteq K'\}$ filtr z $\mathcal{F}$ obsahující J a rozšiřující $\mathcal{U}$. To by byl spor s maximalitou $\mathcal{U}$ v množině $\boldsymbol{F}$. Proto existuje $K \in \mathcal{U}$ taková, že $J \cap K \notin \mathcal{E}$. Podobně existuje $L \in \mathcal{U}$ taková, že $(I \setminus J) \cap K \notin \mathcal{E}$. Položme $M = K \cap L \in \mathcal{U}$. Potom $J \cap M, (I \setminus J) \cap M \notin \mathcal{E}$. Vzhledem k (14.1) je

$$M = (J \cap M) \cup ((I \setminus J) \cap M) \notin \mathcal{E}.$$

To je ve sporu s $M \in \mathcal{U}$.

Zřejmě platí, že $\Theta_{\mathcal{U}} = \bigcup_{J \in \mathcal{U}} \Theta_J$. Proto platí, že $\Theta_{\mathcal{U}} \restriction \boldsymbol{B} \subseteq \Phi$ a tedy existuje epimorfismus $\boldsymbol{B}/(\Theta_{\mathcal{U}} \restriction \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{B}/\Phi \simeq \boldsymbol{A}$. Zároveň je $\boldsymbol{B}/(\Theta_{\mathcal{U}} \restriction \boldsymbol{B}) \leq \prod_{i \in I} \boldsymbol{A}_i/\Theta_{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \boldsymbol{A}_i$. Proto $\boldsymbol{B}/(\Theta_{\mathcal{U}} \restriction \boldsymbol{B}) \in \mathbf{SP}_U(\mathcal{K})$ a $\boldsymbol{A} \in \mathbf{HSP}_U(\mathcal{K})$. $\square$

Důsledek 14.3. *Buď $\mathcal{V}$ kongruenčně distributivní varieta generovaná třídou algeber $\mathcal{K}$. Potom*

$$\mathrm{Si}(\mathcal{V}) \subseteq \mathbf{HSP}_U(\mathcal{K}).$$

Symbolem $\mathbf{I}(\mathcal{K})$ označme třídu všech algeber izomorfních prvkům dané třídy algeber $\mathcal{K}$.

Lemma 14.4. *Je-li $\mathcal{K}$ konečná množina konečných algeber, pak*

$$\mathbf{P}_U(\mathcal{K}) = \mathbf{I}(\mathcal{K}).$$

Důkaz. Buď $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{B}_1, \dots, \boldsymbol{B}_n\}$, kde $\boldsymbol{B}_i$ jsou konečné algebry. Uvažme soubor $\langle \boldsymbol{A}_i \mid i \in I \rangle$ takový, že pro každé $i \in I$ existuje $\alpha(i) \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\boldsymbol{A}_i \simeq \boldsymbol{B}_{\alpha(i)}$. Nechť $\mathcal{U}$ je ultrafiltr na množině I. Ukážeme, že existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\prod_{\mathcal{U}} \boldsymbol{A}_i \simeq \boldsymbol{B}_k$. Pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ položme $I_j = \alpha^{-1}(j)$. Množiny $I_1, \dots, I_n$ tvoří rozklad I. Vzhledem k Lemmatu 13.11 $I_j \in \mathcal{U}$ pro právě jedno $j \in \{1, \dots, n\}$.

Buď $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$. Pro každé $b \in B_j$ označme $I_{\boldsymbol{a},b} := \{i \in I_j \mid a_i = b\}$. Potom je $I_j = \bigsqcup_{b \in B_j} I_{\boldsymbol{a},b}$ konečný rozklad množiny I_j. Opět podle Lemmatu 13.11 existuje právě jedno $b \in B_j$ takové, že $I_{\boldsymbol{a},b} \in \mathcal{U}$. Položíme $I_{\boldsymbol{a}} = I_{\boldsymbol{a},b}$ a $\varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{a}) = b$. Definovali jsme zobrazení $\varphi_{\mathcal{U}} \colon \prod_{i \in I} \boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{B}_j$.

Buď f m-ární operace a $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m \in \prod_{i \in I} A_i$. Položme $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in I} = f(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)$. Protože je každý filtr uzavřený na konečné průniky, platí $J = I_{\boldsymbol{a}_1} \cap \dots \cap I_{\boldsymbol{a}_m} \in \mathcal{U}$ a pro každé $i \in J$ máme rovnost

$$a_i = f(\varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{a}_1), \dots, \varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{a}_n)).$$

Proto $\varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{a}) = f(\varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{a}_1), \dots, \varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{a}_n))$. Ukázali jsme, že $\varphi_{\mathcal{U}}$ je homomorfismus.

Uvažme dvojici $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in I}, \boldsymbol{b} = (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \boldsymbol{A}_i$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} \pmod{\Theta_{\mathcal{U}}}$. Potom existuje $J \in \mathcal{U}$ takové, že $a_i = b_i$ pro všechna $i \in J$. Protože $J, I_{\boldsymbol{a}}, I_{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{U}$, je průnik těchto množin neprázdný. Zvolme $j \in J \cap I_{\boldsymbol{a}} \cap I_{\boldsymbol{b}}$. Potom $\varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{a}) = a_j = b_j = \varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{b})$. Odtud plyne, že $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \ker \varphi_{\mathcal{U}}$, a proto $\Theta_{\mathcal{U}} \subseteq \ker \varphi_{\mathcal{U}}$. Proto existuje homomorfismus $\psi_{\mathcal{U}} \colon \prod_{\mathcal{U}} \boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{B}_j$

takový, že $\varphi_{\mathcal{U}} = \psi_{\mathcal{U}} \circ \pi_{\mathcal{U}}$, kde $\pi_{\mathcal{U}} \colon \prod_{i \in I} \boldsymbol{A}_i \to \prod_{\mathcal{U}} \boldsymbol{A}_i$ je kanonická projekce (cf. Obrázek 14.1).

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} \boldsymbol{A}_i \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{U}}"'] & \boldsymbol{B}_i \\
\prod_{\mathcal{U}} \boldsymbol{A}_i \arrow[ur, "\psi_{\mathcal{U}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Je-li $\varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{a}) = \varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{b})$, potom $a_i = b_i$ pro každé $i \in I_{\boldsymbol{a}} \cap I_{\boldsymbol{b}}$. Protože $I_{\boldsymbol{a}} \cap I_{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{U}$, platí, že $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} \pmod{\Theta_{\mathcal{U}}}$, a tedy $\ker \varphi_{\mathcal{U}} \subseteq \Theta_{\mathcal{U}}$. Proto platí, že $\ker \varphi_{\mathcal{U}} = \Theta_{\mathcal{U}}$ a proto homomorfimus $\psi_{\mathcal{U}}$ prostý.

Pro každé $b \in B_j$ uvažme libovolné $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \boldsymbol{A}_i$ takové, že $a_i = b$ pro všechna $i \in I_j$. Potom $\varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{a}) = b$ a tedy je $\varphi_{\mathcal{U}}$ epimorfismus. Protože $\varphi_{\mathcal{U}} = \psi_{\mathcal{U}} \circ \pi_{\mathcal{U}}$, je epimorfismus také $\psi_{\mathcal{U}}$.

Ukázali jsme, že $\psi_{\mathcal{U}} \colon \prod_{\mathcal{U}} \boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{B}_j$ je izomorfismus a tedy ultraprodukt $\prod_{\mathcal{U}} \boldsymbol{A}_i$ je izomorfní jedné z algeber z $\mathcal{K}$. Proto platí dokazovaná rovnost $\mathbf{P}_U(\mathcal{K}) = \mathbf{I}(\mathcal{K})$. □

Varieta $\mathcal{V}$ se nazývá *konečná* pokud $\mathcal{V} = \mathbf{HSP}(\mathcal{K})$ pro konečnou třídu konečných algeber $\mathcal{K}$. Důsledek 14.3 v kombinace s Lemmatem 14.4 nám umožňuje snadno popsat všechny subdirektně nerozložitelné algebry konečných kongeruenčně distributivních variet.

Věta 14.5. *Buď $\mathcal{V}$ kongruenčně distributivní varieta generovaná konečnou třídou konečných algeber $\mathcal{K}$. Potom*

$$\mathrm{Si}(\mathcal{V}) \subseteq \mathbf{HS}(\mathcal{K}).$$

14.2. Aplikace. Ukážeme si několik jednoduchých aplikací Věty 14.5.

Příklad 14.1. *Připomeňme, že varietu všech distributivních svazů značíme $\mathcal{D}$. V Kapitole 4 jsme ukázali, že je to nejmenší svazová varieta obsahující netriviální (t.j., alespoň dvouprvkový) svaz. Z Věty 4.3 plyne, že $\mathcal{D} = \mathbf{HSP}(\boldsymbol{C}_2)$ a z Věty 14.5 dostaneme, že $\mathrm{Si}(\mathcal{D}) = \mathbf{HS}(\boldsymbol{C}_2) = \{\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2\}$. Proto existuje (až na izomorfismus) jediný netriviální subdirektně nerozložitelný distributivní svaz, dvouprvkový svaz $\boldsymbol{C}_2$.*

Příklad 14.2. *Označme $\mathcal{M}_3$ varietu generovanou svazem $\boldsymbol{M}_3$. Svaz $\boldsymbol{M}_3$ má pět podsvazů: $\boldsymbol{M}_3$, $\boldsymbol{C}_2 \times \boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{C}_3$, $\boldsymbol{C}_2$ a $\boldsymbol{C}_1$. Snadno nahlédneme, že tento výčet zahrnuje i všechny homomorfní obrazy těchto podsvazů. Tři z nich jsou subdirektně nerozložitelné a to $\boldsymbol{M}_3$, $\boldsymbol{C}_2$ a $\boldsymbol{C}_1$. Z Věty 14.5 plyne, že $\mathrm{Si}(\mathcal{M}_3) = \{\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{M}_3\}$. Předpokládejme, že existuje varieta $\mathcal{V}$ taková, že $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{V} \subsetneq \mathcal{M}_3$. Protože je každá varieta generovaná svými subdirektně nerozložitelnými algebrami, muselo by platit, že $\mathrm{Si}(\mathcal{D}) \subsetneq \mathrm{Si}(\mathcal{V}) \subsetneq \mathrm{Si}(\mathcal{M}_3)$. To ale vzhledem k $|\mathrm{Si}(\mathcal{M}_3) \setminus \mathrm{Si}(\mathcal{D})| = 1$ není možné. Proto $\mathcal{D} \prec \mathcal{M}_3$ v uspořádání inkluzí svazových variet.*

mkijář

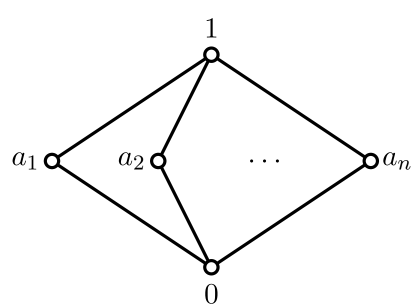
Příklad 14.3. *Označme* $\mathcal{N}_5$ *varietu generovanou svazem* $\boldsymbol{N}_5$. *Snadno nahlédneme, že* $\mathbf{HS}(\boldsymbol{N}_5) = \{\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{C}_2 \times \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{N}_5\}$. *V Příkladu 8.2 jsme popsali svaz kongruencí svazu* $\boldsymbol{N}_5$. *Protože má tento svaz nejmenší netriviální kongruenci, je subdirektně nerozložitelný. Zbylé subdirektně nerozložitelné svazy variety* $\mathcal{N}_5$ *jsou* $\boldsymbol{C}_1$ *a* $\boldsymbol{C}_2$. *Opět tak dostaneme, že* $\mathcal{D} \prec \mathcal{N}_5$ *v uspořádání daném inkluzí.*

Protože každý svaz, který není distributivní, obsahuje podsvaz izomorfní $\boldsymbol{M}_3$ nebo $\boldsymbol{N}_5$ (cf. Důsledek 3.5), platí pro každou nedistributivní svazovou varietu $\mathcal{V}$, že $\mathcal{M}_3 \subseteq \mathcal{V}$ nebo $\mathcal{N}_5 \subseteq \mathcal{V}$. Proto jsou $\mathcal{M}_3$ a $\mathcal{N}_5$ jediné variety pokrývající varietu $\mathcal{D}$ v uspořádání inkluzí. Zároveň platí, že $\mathcal{D} = \mathcal{M}_3 \cap \mathcal{N}_5$.

Příklad 14.4. *Pro přirozené číslo* $n \geq 3$ *označme symbolem* $\boldsymbol{M}_n$ *svaz délky* 2 *s* n *atomy znázorněný na Obrázku 14.2. Symbolem* $\mathcal{M}_n$ *označíme varietu generovanou tímto svazem. Všechny svazy* $\boldsymbol{M}_n$ $(n \geq 3)$ *jsou jednoduché a tedy subdirektně nerozložitelné. Snadno nahlédneme, že subdirektně nerozložitelné svazy ve varietě* $\mathcal{M}_n$ *jsou právě svazy* $\boldsymbol{M}_k$ *pro* $3 \leq k \leq n$, $\boldsymbol{C}_1$ *a* $\boldsymbol{C}_2$. *Dostaneme tak nekonečný maximální řetízek*

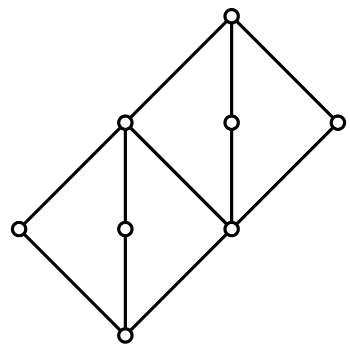
$$\mathcal{D} \prec \mathcal{M}_3 \prec \mathcal{M}_4 \prec \mathcal{M}_5 \prec \dots$$

v uspořádané množině všech svazových variet. Navíc, protože jsou svazy $\boldsymbol{M}_n$ *délky* 2, *nemohou obsahovat podsvaz izomorfní svazu* $\boldsymbol{N}_5$, *a tedy jsou všechny modulární. Proto varieta* $\mathcal{M}$ *všech modulárních svazů obsahuje nekonečně mnoho vzájemně neizomorfních subdirektně nerozložitelných svazů. Vzhledem k Větě 14.5 není tato varieta konečná.*



Obrázek 14.2. Svaz $\boldsymbol{M}_n$

Příklad 14.5. *Uvažme svaz* $\boldsymbol{M}_{3,3}$ *znázorněný na Obrázku 14.3 a označme* $\mathcal{M}_{3,3}$ *varietu generovanou tímto svazem. Rozborem všech podsvazů svazu* $\boldsymbol{M}_{3,3}$ *a jejich homomorfních obrazů ukážeme, že* $\mathrm{Si}(\mathcal{M}_{3,3}) = \{\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{M}_3, \boldsymbol{M}_{3,3}\}$, *a že je svaz* $\boldsymbol{M}_{3,3}$ *modulární (neobsahuje podsvaz izomorfní* $\boldsymbol{N}_5$*). Odtud plyne, že* $\mathcal{M}_3 \prec \mathcal{M}_{3,3} \subseteq \mathcal{M}$.



OBRÁZEK 14.3. Svaz $\boldsymbol{M}_{3,3}$

KAPITOLA 15

Geometrické svazy

SHRNUTÍ. Nejprve se podíváme na nezávislost v semimodulárních svazech. Dále definujeme geometrické svazy a popíšeme některé jejich vlastnosti. Nakonec ukážeme, že je každý geometrický svaz direktním součinem direktně nerozložitelných svazů, a že je perspektivita atomů v geometrických svazech tranzitivní..

15.1. Množiny atomů v semimodulárních svazech. V Kapitole 9 jsme definovali délku $\ell(\boldsymbol{A})$ svazu $\boldsymbol{A}$ konečné délky a dimenzi $\dim a$ prvku a ve svazu lokálně konečné délky. Rozšíříme tyto definice takto: Pokud není svaz $\boldsymbol{A}$ konečné délky (tj. ve svazu $\boldsymbol{A}$ existuje řetězec délky n pro každé přirozené číslo n), položíme $\ell(\boldsymbol{A}) = \infty$ a pro $a \in \boldsymbol{A}$ definujeme $\dim a = \ell(\downarrow a)$. Položíme-li $n + \infty = \infty + n = \infty$ a $n \leq \infty$ pro každé n, ukážeme podobně jako v Kapitole 9, že

LEMMA 15.1. *Je-li svaz* $\boldsymbol{A}$

(a) *semimodulární, potom*

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) \leq \dim a + \dim b, \quad \textit{pro všechna } a, b \in A;$$

(b) *modulární, potom*

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) = \dim a + \dim b, \quad \textit{pro všechna } a, b \in A.$$

Připomeňme, že podmnožina I svazu $\boldsymbol{A}$ je *nezávislá*, pokud pro každou dvojici konečných $X, Y \subseteq I$ platí rovnost

$$\bigvee X \wedge \bigvee Y = \bigvee (X \cap Y).$$

Indukcí snadno ukážeme, že podmnožina I svazu $\boldsymbol{A}$ je *nezávislá*, právě když pro libovolné konečné $X_1, X_2, \dots, X_n \subseteq I$ platí, že

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee X_i = \bigvee \bigcap_{i=1}^{n} X_i. \tag{15.1}$$

Z definice je vidět, že množina je nezávislá právě když je nezávislá každá její konečná podmnožina. Podle Lemmatu 6.5 je konečná podmnožina $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ modulárního svazu nezávislá, právě když pro všechna $k = 1, \dots, n-1$ platí, že

$$(a_1 \vee \cdots \vee a_k) \wedge a_{k+1} = 0.$$

V semimodulárních svazech je touto podmínkou charakterizována nezávislost konečných podmnožin atomů.

LEMMA 15.2. *Pro konečnou množinu $I = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ atomů semimodulárního svazu $\boldsymbol{A}$ je ekvivalentní:*

(1) *množina I je nezávislá.*
(2) $(u_1 \vee \cdots \vee u_k) \wedge u_{k+1} = 0$ *pro všechna* $k = 1, \ldots, k-1$.
(3) $u_{k+1} \not\leq u_1 \vee \cdots \vee u_k$ *pro všechna* $k = 1, \ldots, k-1$.
(4) $\dim (u_1 \vee \cdots \vee u_n) = n$.

DŮKAZ. ($1 \Rightarrow 2$) Zřejmé z definice nezávislosti. ($2 \Rightarrow 3$) Zřejmé. ($3 \Rightarrow 4$) Indukcí podle k ukážeme, že $\dim (u_1 \vee \cdots \vee u_k) = k$. Protože je u_1 atom, je $\dim u_1 = 1$. Předpokládejme, že $k < n$, a že $\dim (u_1 \vee \cdots \vee u_k) = k$. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ semimodulární a $0 \prec u_{k+1}$ platí, že $u_1 \vee \cdots \vee u_k \preceq u_1 \vee \cdots \vee u_{k+1}$. Vzhledem k podmínce (3) platí, že $u_1 \vee \cdots \vee u_k \prec u_1 \vee \cdots \vee u_{k+1}$. Odtud a z Jordanovy-Hölderovy-Oreho věty (Věta 9.3) plyne, že

$$\dim (u_1 \vee \cdots \vee u_{k+1}) = \dim (u_1 \vee \cdots \vee u_k) + 1 = k + 1.$$

($4 \Rightarrow 1$) Uvažme $X, Y \subseteq I$ a položme $a = \bigvee X \wedge \bigvee Y$ a $b = \bigvee (X \cup Y)$. Snadno nahlédneme, že $a \geq b$ a tedy prvky a a b jsou porovnatelné. Ukážeme, že $\dim a = \dim b$, odkud plyne jejich rovnost. Z Lemmatu 15.1(a) plyne, že

$$\dim(\bigvee X) + \dim(\bigvee Y) \geq \dim a + \dim(\bigvee (X \cup Y)). \tag{15.2}$$

Všimněme si, že z (3) plyne, že $\dim X = |X|$ pro každou podmnožinu X množiny I. Odtud v kombinaci s (15.2) dostaneme, že

$$|X| + |Y| \geq \dim a + |X \cup Y|,$$

a proto

$$\dim a \leq |X| + |Y| - |X \cup Y| = |X \cap Y| = \dim b.$$

Protože $a \geq b$ a $\dim a \leq \dim b$, platí rovnost $a = b$. □

Symbolem $\mathrm{At}(\boldsymbol{A})$ označíme množinu všech atomů svazu $\boldsymbol{A}$. *Lineárním obalem* množiny $U \subseteq \mathrm{At}(\boldsymbol{A})$ budeme rozumět množinu

$$\overline{U} = \{u \in \mathrm{At}(\boldsymbol{A}) \mid u \leq \bigvee F \text{ pro nějakou konečnou } F \subseteq U\}.$$

V algebraickém svazu je $\overline{U} = \{u \in \mathrm{At}(\boldsymbol{A}) \mid u \leq \bigvee U\}$. Řekneme, že množina U *generuje* podmnožinu $V \subseteq \mathrm{At}(\boldsymbol{A})$ pokud platí, že $V \subseteq \overline{U}$.

Nezávislou množinu atomů generující celé $\mathrm{At}(A)$ můžeme chápat jako obdobu pojmu báze vektorového prostoru. V následujícím lemmatu ukážeme, že v semimodulárním svazu můžeme každou nezávislou množinu rozšířit do nezávislé generující množiny (= báze).

DŮSLEDEK 15.3. *Buď J nezávislá množina atomů semimodulárního svazu. Pro atom $u \notin J$ je množina $J \cup \{u\}$ nezávislá právě když $u \notin \overline{J}$.*

Důkaz. Stačí ukázat, že dokazovaná ekvivalence platí pro každou konečnou $I \subseteq J$. Protože je u atom a množina I je konečná, je $u \notin \overline{I}$ právě když $u \not\leq \bigvee I$ právě když $u \wedge \bigvee I = 0$. Vzhledem k Lemmatu 15.2(2) je to ekvivalentní nezávislosti množiny $I \cup \{u\}$. □

Lemma 15.4. *Buď B množina atomů semimodulárního svazu. Potom pro každou nezávislou $I \subseteq B$ existuje nezávislá $I \subseteq J \subseteq B$, která generuje B.*

Důkaz. Označme $\mathcal{N}$ množinu všech nezávislých podmnožin množiny B. Množina $\mathcal{N}$ je neprázdná, neboť $I \in \mathcal{N}$, a je uzavřená na sjednocení řetězců. Podle Zornova lemmatu existuje její maximální prvek J takový, že $I \subseteq J$. Pro spor předpokládejme, že existuje $a \in B \setminus \overline{J}$. Vzhledem k Důsledku 15.3 je množina $J \cup \{a\}$ nezávislá což je ve sporu s maximalitou množiny J v $\mathcal{N}$. □

Lemma 15.5 (O výměně). *Buď $\boldsymbol{A}$ semimodulární svaz. Pro atomy u, v svazu $\boldsymbol{A}$ a podmnožinu $U \subseteq \mathrm{At}(U)$ platí, že $u \notin \overline{U}$ a zároveň $u \in \overline{\{v\} \cup U}$ právě když $v \notin \overline{U}$ a zároveň $v \in \overline{\{u\} \cup U}$.*

Důkaz. Vzhledem k symetrii stačí ukázat jen jednu z implikací. Předpokládejme, že $u \notin \overline{U}$ a zároveň $u \in \overline{\{v\} \cup U}$. Z předpokladu je vidět, že $\overline{U} \subsetneq \overline{\{v\} \cup U}$, a proto $v \notin \overline{U}$.

Zbývá ukázat, že $v \in \overline{\{u\} \cup U}$. Existuje konečná $K \subseteq U$ taková, že $u \leq v \vee \bigvee K$. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ semimodulární, plyne odtud, že $\dim(u \vee \bigvee K) = 1 + \dim \bigvee K$. Zároveň z $v \notin \overline{U}$ plyne, že $v \not\leq \bigvee K$, odkud dostaneme, že $\dim(v \vee \bigvee K) = 1 + \dim \bigvee K$. Protože $u \leq v \vee \bigvee K$, platí nerovnost $u \vee \bigvee K \leq v \vee \bigvee K$. Porovnáním dimenzí dostenem, že se oba prvky rovnají. Proto platí, že $v \leq u \vee \bigvee K$, odkud $v \in \overline{\{u\} \cup U}$. □

15.2. Geometrické svazy. Řekneme, že úplný svaz $\boldsymbol{A}$ je *atomární*, je-li každý jeho prvek spojením množiny atomů.

Lemma 15.6. *Algebraický svaz je atomární právě když jsou jeho kompaktní prvky právě konečná spojení atomů.*

Důkaz. Každý prvek algebraického svazu je spojením kompaktních prvků. Proto jsou všechny jeho atomy kompaktní. Protože jsou kompaktní prvky algebraického svazu uzavřeny na konečná spojení, jsou konečná spojení atomů tohoto svazu kompaktní. (⇒) Předpokládejme, že je algebraický svaz atomární a buď c kompaktní prvek tohoto svazu. Potom je prvek c spojením množiny atomů, a protože je kompaktní, je spojením nějaké konečné podmnožiny této množiny. (⇐) Každý prvek algebraického svazu je spojením kompaktních prvků a tedy je spojením množiny atomů. □

Definice. Svaz $\boldsymbol{G}$ je *geometrický* pokud je algebraický, atomární a semimodulární.

Lemma 15.7. *Kompaktní prvky geometrického svazu jsou právě prvky konečné dimenze.*

Důkaz. Vzhledem k Lemmatu 15.6 jsou kompaktní prvky geometrického svazu právě konečná spojení atomů. Vzhledem k Lemmatu 15.4 je z každé konečné množiny atomů J možné vybrat nezávislou podmnožinu I takovou, že $\bigvee I = \bigvee J$. Podle Lemmatu 15.2 je $\dim \bigvee I = |I|$. □

Snadno ukážeme, že prvky konečné dimenze semimodulárního svazu tvoří ideál. Proto platí, že

Důsledek 15.8. *Kompaktní prvky geometrického svazu tvoří ideál tohoto svazu.*

Lemma 15.9. *Interval v geometrickém svazu je opět geometrický svaz.*

Důkaz. Podle Tvrzení 12.11 je interval v algebraickém (a tím spíše v geometrickém) svazu algebraický. Z definice je zřejmé, že interval v semimodulárním svazu je opět semimodulární. Zbývá ukázat, že interval v geometrickém svazu je atomární. u Buď b/a interval v geometrickém svazu $\boldsymbol{G}$. Je-li u atom svazu $\boldsymbol{G}$, je $0 \prec u$ a ze semimodularity plyne, že $a \preceq a \vee u$. Přitom $a \prec a \vee u$ právě když $u \nleq a$. Protože je svaz $\boldsymbol{G}$ geometrický, je atomární. Prvek $x = a$ je v intervalu b/a spojením prázdné množiny. Pokud $a < x$, tak

$$x = \bigvee \{a \vee u \mid u \in \mathrm{At}(\boldsymbol{G}), u \nleq a \text{ a zároveň } u \leq x\}.$$

Proto je x spojením atomů v intervalu b/a. □

Lemma 15.10. *Každý prvek geometrického svazu je spojením nezávislé množiny atomů.*

Důkaz. Každý prvek x geometrického svazu je spojením množiny atomů. Označme tuto množinu X. Podle Lemmatu 15.4 existuje nezávislá $I \subseteq X$, která množinu X generuje. Potom platí, že $x = \bigvee X = \bigvee I$. □

Úsekový doplněk prvku a ve svazu $\boldsymbol{A}$ s nejmenším prvkem je b takové, že $a \wedge b = 0$. V tomto případě budeme spojení prvků a, b značit také $a \oplus b$ (tj., $c = a \oplus b$ značí, že $c = a \vee b$ a zároveň $a \wedge b = 0$. *Doplněk* prvku a v omezeném svazu je prvek b takový, že $1 = a \oplus b$. Řekneme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je *komplementární* je-li omezený a každý jeho prvek má alespoň jeden doplněk. Řekneme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je *relativně komplementární* pokud je každý jeho interval komplementární.

Věta 15.11. *Každý geometrický svaz je komplementární.*

Důkaz. Geometrický svaz je algebraický a tedy z definice omezený. Buď $\boldsymbol{G}$ geometrický svaz a $a \in G$ jeho prvek. Podle Lemmatu 15.4 existuje nezavislá podmnožina I množiny $\{u \in \mathrm{At}(\boldsymbol{G}) \mid u \leq a\}$, která tuto množinu generuje. Navíc lze množinu I rozšířit na nezávislou množinu J, která generuje celou množinu $\mathrm{At}(\boldsymbol{G})$. Platí, že $a = \bigvee I$. Položme $b = \bigvee (J \setminus I)$. Z nazávislosti množiny J plyne, že

$$a \wedge b = \bigvee I \wedge \bigvee (J \setminus I) = \bigvee (I \cap (J \setminus I)) = \bigvee \emptyset = 0.$$

Protože je svaz $\boldsymbol{G}$ atomární a J generuje množinu všech jeho atomů, $\bigvee J = 1$. Proto

$$a \vee b = \bigvee I \vee \bigvee (J \setminus I) = \bigvee (I \cup (J \setminus I)) = \bigvee J = 1.$$

Ukázali jsme, že b je doplněk prvku a. □

Podle Lemmatu 15.9 je každý interval geometrického svazu geometrický a tedy komplementární svaz. Odtud dostaneme, že

Důsledek 15.12. *Geometrický svaz je úsekově komplementární.*

15.3. Perspektivita, projektivita atomů a direktní rozklad. Prvky a, b svazu $\boldsymbol{A}$ jsou *perspektivní*, pokud mají společný úsekový doplněk, tj., pokud existuje $c \in A$ takové, že $a \oplus c = b \oplus c$. To, že jsou prvky a, b perspektivní, značíme $a \sim b$.

Lemma 15.13. *V omezeném relativně komplementárním svazu $\boldsymbol{A}$ jsou dva prvky perspektivní právě když mají společný doplněk.*

Důkaz. Nechť $a, b, c \in A$ jsou takové, že $a \oplus c = b \oplus c$. Uvažme doplněk d prvku $a \oplus c$ v intervalu $1/c$. Potom platí, že $a \vee d = a \vee c \vee d = 1$ a zároveň $a \wedge d = a \wedge (a \oplus c) \wedge d = a \wedge c = 0$. Proto $1 = a \oplus d$. Podobně ukážeme, že $1 = b \oplus d$. Proto je d společný doplňek prvků a a b. □

Řekneme, že prvky a, b svazu $\boldsymbol{A}$ jsou *projektivní*, značíme $a \approx b$, pokud existuje posloupnost $a = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_n = b$. To znamená, že relace projektivity je tranzitivním obalem perspektivity. Obě relace jsou z definice symetrické. V komplementárním svazu jsou i reflexivní a tedy relace projektivity určuje ekvivalenci na množině A. Pro nás bude zvlášť zajímavá restrikce relace $\approx$ na množinu $\mathrm{At}(\boldsymbol{A})$.

Svaz $\boldsymbol{A}$ je *direktně nerozložitelný* pokud nelze vyjádřit jako direktní součin dvou svých vlastních podsvazů.

Lemma 15.14. *Atomární svaz ve kterém jsou každé dva atomy projektivní, je direktně nerozložitelný.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ atomární svaz jehož každé dva atomy jsou projektivní. Pro spor předpokládejme, že je direktním součinem svých dvou vlastních podsvazů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$. Svaz $\boldsymbol{A}$ ztotožníme se součinem $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$. Každý prvek svazu $\boldsymbol{A}$ má tedy jednoznačné vyjádření ve tvaru (b, c), kde $b \in B$ a $c \in C$. Pro atom (u, v) svazu $\boldsymbol{A}$ platí, že $(u, v) = (u, 0) \vee (0, v)$, a proto buďto $u = 0$, nebo $v = 0$. Naopak, je-li u atom svazu $\boldsymbol{B}$, je $(u, 0)$ atom svazu $\boldsymbol{A}$ a podobně, je-li v atom svazu $\boldsymbol{C}$, je $(0, v)$ atom svazu $\boldsymbol{A}$. Proto platí, že $\mathrm{At}(\boldsymbol{A}) = (\mathrm{At}(\boldsymbol{B}) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathrm{At}(\boldsymbol{C}))$. Zvolme $u \in \mathrm{At}(\boldsymbol{B})$ a $v \in \mathrm{At}(\boldsymbol{C})$. Podle předpokladu je $(u, 0) \approx (0, v)$ a proto ve svazu $\boldsymbol{A}$ existuje posloupnost $(u, 0) = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_n = (0, v)$. Exituje $i < n$ takové, že $x_i = (b, 0)$ a $x_{i+1} = (b', c')$ je takové, že $c' \neq 0$. Protože $x_i \sim x_{i+1}$ existuje $y = (e, f) \in B \times C$ takové, že $x_i \oplus y = x_{i+1} \oplus y$. Odtud plyne, že $(b \vee e, f) = x_i \vee y = x_{i+1} \vee y = (b' \vee e, c' \vee f)$. Proto $f = c' \vee f$. Odtud plyne, že $c' \leq f$, a tedy $c' = c' \wedge f$. Zároveň platí, že $0 = x_{i+1} \wedge y = (0, c' \wedge f)$. Odtud dostaneme, že $c' = 0$. To je spor. $\square$

Množina $U \subseteq \mathrm{At}(\boldsymbol{A})$ je *minimální závislá* pokud není nezávislá a každá její vlastní podmnožina je nezávislá. Protože je nekonečná množina nezávislá právě když je nezávislá každá její konečná podmnožina. Odtud vidíme, že minimální závislá množina musí být konečná.

LEMMA 15.15. *Buď $\boldsymbol{A}$ semimodulární svaz. Je-li množina $U \subseteq \mathrm{At}(\boldsymbol{A})$ minimální závislá, pak $u \in \overline{U \setminus \{u\}}$ pro všechna $u \in U$.*

DŮKAZ. Množina $U \setminus \{u\}$ je nezávislá. Předpokládejme, že $u \notin \overline{(}U \setminus \{u\})$. Potom $u \leq \bigvee(U \setminus \{u\})$, a podle Lemmatu 15.2 je množina U nezávislá. To je spor. $\square$

LEMMA 15.16. *Buď U minimální závislá množina atomů semimodulárního svazu. Pak jsou každé dva atomy z U perspektivní.*

DŮKAZ. Nechť $u, v \in U$. Položme $w = \bigvee(U \setminus \{u, v\})$. Protože $u \in \overline{U \setminus \{v\}}$ a zároveň $v \in \overline{U \setminus \{u\}}$, platí rovnost $u \vee w = \bigvee(U \setminus \{v\}) = \bigvee U = \bigvee(U \setminus \{u\}) = v \vee w$. Množiny $U \setminus \{u\}$ a $U \setminus \{v\}$ jsou nezávislé a proto $u \wedge w = v \wedge w = 0$. Celkem tak máme, že $u \oplus w = v \oplus w$, odkud $u \sim v$. $\square$

LEMMA 15.17. *Nechť u je atom semimodulárního svazu $\boldsymbol{A}$. Množina $U \subseteq \mathrm{At}(\boldsymbol{A}) \setminus \{u\}$ je minimální vzhledem k inkluzi taková, že $u \in \overline{U}$ právě když je množina $\{u\} \cup U$ minimální závislá.*

DŮKAZ. Položme $V = \{u\} \cup U$. ($\Rightarrow$) Protože $u \in \overline{U}$, množina V není nezávislá. Zvolme $v \in V$ libovolně. Je-li $v = u$, platí rovnost $V \setminus \{v\} = U$. Pokud by množina U nebyla nezávislá, existovala by $W \subsetneq U$ taková, že $\overline{W} = \overline{U}$. Pak ale $u \in \overline{W}$, což by byl spor s minimalitou U vzhledem k inkluzi. Předpokládejme, že $v \neq u$, a proto $v \in U$. Množina $U \setminus \{v\}$ je nezávislá (neboť U je nezávislá) a z minimality U plyne, že $u \notin \overline{U \setminus \{v\}}$. Vzhledem k Důsledku 15.3 je množina $\{u\} \cup (U \setminus \{v\}) = V \setminus \{v\}$ nezávislá. Proto je množina V minimální závislá. ($\Leftarrow$) Protože $u \notin U$, je U vlastní podmnožina V a proto je nezávislá. Protože množina V nezávislá není, $u \in \overline{U}$ vzhldem k Důsledku 15.3. Je-li W vlastní podmnožina U, je množina $\{u\} \cup W$ vlastní podmnožinou V a proto je nezávislá. Odtud plyne, že $u \notin \overline{W}$. $\square$

DŮSLEDEK 15.18. *Nechť u je atom semimodulárního svazu $\boldsymbol{A}$. Pak v každé $U \subseteq \mathrm{At}(\boldsymbol{A})$ takové, že $u \in \overline{U}$ existuje atom $v \in U$ perspektivní u.*

DŮKAZ. Existuje konečné $V \subseteq U$ takové, že $u \leq \overline{V}$. Zvolme takové V s nejmenším počtem prvků. Z Lemmatu 15.17 plyne, že je množina $\{u\} \cup V$ minimální závislá. Vzhledem k Lemmatu 15.16 je $v \sim u$ pro každé $v \in V$. $\square$

VĚTA 15.19. *Každý geometrický svaz je direktním součinem direktně nerozložitelných geometrických svazů.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ geometrický svaz. Pro každý atom u svazu $\boldsymbol{A}$ položme

$$R_u = \{v \in \mathrm{At}(\boldsymbol{A}) \mid v \approx u\}.$$

Relace projektivity je ekvivalencí na A, a proto množiny R_u tvoří rozklad $\mathrm{At}(\boldsymbol{A})$. Zvolme množinu Δ reprezentantů těchto tříd (tj., $\Delta \subseteq \mathrm{At}(\boldsymbol{A})$ a množina $\Delta \cap R_u$ je jednoprvková pro každé $u \in \mathrm{At}(\boldsymbol{A})$).

Označme $\boldsymbol{A}_u = \bigvee R_u/0$ dolní interval svazu $\boldsymbol{A}$ určený prvkem $\bigvee R_u$. Definujme zobrazení

$$\varphi\colon \boldsymbol{A} \to \prod_{u\in\Delta} \boldsymbol{A}_u$$
$$a \mapsto (a \wedge \bigvee R_u)_{u\in U}.$$

Protože operace spojení, resp. průseku, odpovídají suprému, resp. infimu, je monotónní bijekce svazů svazovým izomorfismem. Zobrazení φ je zřejmě monotónní. Ukážeme, že je prosté. Nechť $a \nleq b$ ve svazu $\boldsymbol{A}$. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ atomární, existuje atom v takový, že $v \leq a$ ale $v \nleq b$. Existuje právě jedno $u \in \Delta$ takové, že $u \approx v$. Potom $v \in R_u$, a proto $v \leq a \wedge \bigvee R_u$ a $v \nleq b \wedge \bigvee R_u$, odkud plyne, že $\varphi(a) = (a \wedge R_u)_{u\in\Delta} \nleq (b \wedge R_u)_{u\in\Delta} = \varphi(b)$. Proto je zobrazení φ prosté. Zbývá ukázat, že je zobrazení φ na. Buď $(a_u)_{u\in\Delta}$ libovolný prvek z $\prod_{u\in\Delta} \boldsymbol{A}_u$. Položme $a = \bigvee_{u\in\Delta} a_u$. Ukážeme, že $\varphi(a) = (a_u)_{u\in\Delta}$. Podle definice je $\varphi(a) = (a \wedge \bigvee R_u)_{u\in\Delta}$. Je tedy třeba ukázat, že pro každé $u \in \Delta$ platí rovnost $a_u = a \wedge \bigvee R_u$. Zřejmě platí, že $a_u \leq a \wedge \bigvee R_u$. Abychom ukázali opačnou nerovnost, uvažme atom $v \leq a \wedge \bigvee R_u$. Protože je každý atom geometrického svazu kompaktní, plyne z $v \leq \bigvee R_u$, že $v \in \overline{R_u}$. Podle Důsledku 15.18 je v projektivní některému atomu z R_u. To znamená, že $v \in R_u$. Pro každé $u \in \Delta$ existuje $S_u \subseteq R_u$ taková, že $a_u = \bigvee S_u$. Položme $S = \bigcup_{u\in\Delta} S_u$. Protože je $v \leq a = \bigvee S$, $v \in \overline{S}$. Z množiny S vybereme podmnožinu T minimální vzhledem k inkluzi takovou, že $v \in \overline{T}$. Pokud $v \in T$, (pak nutně $T = \{v\}$), platí, že $v \in S_u$, a tedy $v \leq a_u$. Pokud $v \notin T$, je vzhledem k Lemmatu 15.17 množina $T \cup \{v\}$ minimální závislá. Podle Lemmatu 15.16 jsou všechny její prvky perspektivní. Proto je $T \subseteq S_u$. Odtud dostaneme, že $v \leq \bigvee T \leq \bigvee S_u = a_u$. Proto platí i opačná nerovnost $a \wedge \bigvee R_u \leq a_u$.

Svazy $\boldsymbol{A}_u$ jsou intervaly v geometrickém svazu $\boldsymbol{A}$, a proto jsou podle Lemmatu 15.9 geometrické. Nakonec ukážeme, že jsou svazy $\boldsymbol{A}_u$ direktně nerozložitelné. Ukážeme, že jsou-li prvky $a, b \in A_u$ projektivní v $\boldsymbol{A}$, jsou projektivní také ve svazu $\boldsymbol{A}_u$. Ve svazu $\boldsymbol{A}$ existuje posloupnost $a = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_n = b$. Pro každé $i = 0, 1, \ldots, n-1$ existuje $y_i \in \boldsymbol{A}$ takové, že $x_i \oplus y_i = x_{i+1} \oplus y_i$. Buď $\pi_u\colon \prod_{v\in\Delta} \boldsymbol{A}_v \to \boldsymbol{A}_u$ kanonická projekce. Potom $\varphi\pi_u(x_i) \oplus \varphi\pi_u(y_i) = \varphi\pi_u(x_{i+1}) \oplus \varphi\pi_u(y_i)$ pro všechna $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Odtud dostaneme, že $a = \varphi\pi_u(x_0) \sim \varphi\pi_u(x_1) \sim \cdots \sim \varphi\pi_u(x_n) = b$ ve svazu $\boldsymbol{A}_u$. Proto jsou všechny atomy svazu $\boldsymbol{A}_u$ projektivní a vzhledem k Lemmatu 15.14 je svaz $\boldsymbol{A}_u$ direktně nerozložitelný. □

Z důkazu Věty 15.19 dostaneme, že

Důsledek 15.20. *Geometrický svaz je direktně nerozložitelný právě když jsou každé jeho dva atomy projektivní.*

Věta 15.21. *V geometrickém svazu je perspektivita atomů tranzitivní.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ geometrický svaz a u, v, w trojice jeho atomů taková, že $u \sim v \sim w$. Ukážeme, že také $u \sim w$. Podle definice existuje $a \in A$ takový, že $u \oplus a = v \oplus a$. Protože je geometrický svaz atomární, existuje podmnožina $U \subseteq \mathrm{At}(\boldsymbol{A}$ taková, že $a = \bigvee U$. Potom $u \leq v \vee \bigvee U$, a protože jsou atomy v geometrickém svazu kompaktní, existuje konečná $K \subseteq U$ taková, že $u \leq v \vee \bigvee K$. Z množiny K můžeme vybrat nezávislou podmnožinu X takovou, že $\bigvee K = \bigvee X$. Předpokládejme, že X je nejmenší nezávislá podmnožina U taková, že $u \leq v \vee \bigvee X$. Protože $u \nleq a$, máme, že $u \nleq \bigvee X$ a vzhledem k minimalitě velikosti X, $u \nleq v \vee \bigvee X'$ pro žádnou vlastní podmnožinu X' množiny X. Vzhledem k Lemmatu 15.17 je množina $\{u, v\} \cup X$ minimální závislá.

Protože $v \sim w$, je $v \oplus b = w \oplus b$ pro nějaké $b \in A$. Najdeme $V \subseteq \mathrm{At}(\boldsymbol{A})$ takovou, že $b = \bigvee V$ a konečnou $L \subseteq V$ takovou, že $v \leq w \vee \bigvee L$. Vzhledem k Lemmatu 15.4 existuje $Y \subseteq L$ taková, že je množina $\{v\} \cup X \cup Y$ nezávislá a zároveň $\bigvee(\{v\} \cup X \cup L) = \bigvee(\{v\} \cup X \cup Y)$.

Vzhledem k nezávislosti množiny $\{v\} \cup X \cup Y$ (cf. rovnost (15.1)) platí, že

$$\Big(\bigvee(Y \cup X)\Big) \wedge \bigwedge_{\xi \in X} \bigvee(Y \cup \{v\} \cup (X \setminus \{\xi\})) =$$

$$= \bigvee \left((Y \cup X) \cap \bigcap_{\xi \in X} (Y \cup \{v\} \cup (X \setminus \{\xi\})) \right) =$$

$$= \bigvee \left(Y \cup \left(X \cap \bigcap_{\xi \in X} (\{v\} \cup (X \setminus \{\xi\})) \right) \right) = \bigvee Y$$

Položme $y = \bigvee Y$, $x = \bigvee X$ a $\hat{\xi} = \bigvee(X \setminus \{\xi\})$ pro každé $\xi \in X$. Potom můžeme odvozenou rovnost přepsat ve tvaru

$$y = (x \vee y) \wedge \bigwedge_{\xi \in X} (v \vee \hat{\xi} \vee y).$$

Protože $Y \subseteq L$ a $w \notin \overline{L}$, platí, že $w \nleq y$. Proto buďto $w \nleq x \vee y$ nebo existuje $\xi \in X$ takové, že $w \nleq v \vee \hat{\xi} \vee y$.

V prvním případě máme, že $w \nleq x \vee y$, ale $w \leq v \vee \bigvee L \leq v \vee x \vee y = u \vee x \vee y$. Vzhledem k Lemmatu 15.5 pak $u \leq w \vee x \vee y$ a zároveň $u \nleq x \vee y$. Odtud plyne, že $u \oplus (x \vee y) = w \oplus (x \vee y)$, a proto $u \sim w$.

Ve druhém případě platí, že $w \nleq v \vee \hat{\xi} \vee y$ pro některé $\xi \in X$. Protože je množina $\{u, v\} \cup X$ minimální závislá, platí, že $u \vee v \vee \hat{\xi} = v \vee x$. Odtud dostaneme, že $w \leq v \vee \bigvee L \leq v \vee x \vee y = u \vee v \vee \hat{\xi} \vee y$. Nyní podobně jako v prvním případě použijeme Lemma 15.5. Dostaneme rovnost $u \oplus (v \vee \xi \vee y) = w \oplus (v \vee \xi \vee y)$, a proto $u \sim w$. □

Literatura

[1] Grätzer, G., **General Lattice Theory (2nd ed.)**, Birkhauser Verlag, Basel, 1998.
[2] Nation, J. B., **Notes on Lattice Theory**: http://math.hawaii.edu/ jb/math618/Nation-LatticeTheory.pdf