CVIČENÍ K PŘEDMĚTU NMAG336
ÚVOD DO TEORIE KATEGORIÍ

5. CVIČENÍ / 5. KVĚTNA 2023

Úloha 5.1. Diagonální funktor $\Delta\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ *přiřadí*

- *objektu a kategorie $\mathbf{A}$ dvojici $\Delta(a) = \langle a, a \rangle$;*
- *morfismu f v kategorii $\mathbf{A}$ morfismus $\Delta(f) = \langle f, f \rangle$.*

Buď $\eta = \langle i, j \rangle : \langle a, b \rangle \to \Delta(c) = \langle c, c \rangle$ univerzální morfismus z objektu $\langle a, b \rangle$ do funktoru Δ. Ukažte, že $\langle c \mid i, j \rangle$ je kosoučinem objektů a, b v kategorii $\mathbf{A}$.

Úloha 5.2. *Nechť $\mathbf{J}$ a $\mathbf{A}$ jsou kategorie a uvažme kategorii $\mathbf{A}^{\mathbf{J}}$ všech funktorů* $\mathbf{J} \to \mathbf{A}$. Diagonální funktor $\Delta\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\mathbf{J}}$ *přiřadí*

- *objektu a kategorie $\mathbf{A}$* konstantní funktor*, který zobrazí každý objekt kategorie $\mathbf{J}$ na a a každý morfismus kategorie $\mathbf{J}$ na identický morfismus 1_a;*
- *morfismu $f\colon a \to b$ v kategorii $\mathbf{A}$ přirozenou transformaci $\Delta(f)\colon \Delta(a) \to \Delta(b)$ danou předpisem $\Delta(f)_j = f$ pro každé $j \in \mathbf{ob}\,\mathbf{J}$.*

Buď $F \in \mathbf{A}^{\mathbf{J}}$ diagram v kategorii $\mathbf{A}$ indexovaný kategorií $\mathbf{J}$ a $\langle c, \eta \rangle$ univerzální morfismus z F do Δ. Ukažte, že $\langle c \mid \eta_j,\ j \in \mathbf{ob}\,\mathbf{J} \rangle$ je kolimitou diagramu F.

Úloha 5.3. *Mějme kategorie $\mathbf{J}$, $\mathbf{A}$ a funktor $\Delta\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\mathbf{J}}$ jako v předchozí úloze. Nechť $F \in \mathbf{A}^{\mathbf{J}}$. Buď $\langle d, \pi \rangle$ univerzální morfismus Δ do F. Ukažte, že $\langle d \mid \pi_j,\ j \in \mathbf{ob}\,\mathbf{J} \rangle$ je limitou diagramu F.*

Úloha 5.4. *Reprezentací funktoru $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ rozumíme dvojici $\langle a, \varphi \rangle$, kde $a \in \mathbf{ob}\,\mathbf{A}$ a $\varphi\colon A(a, -) \to F$ je přirozený izomorfismus.*

Uvažme dvojici funktorů $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ s reprezentacemi $\langle a, \varphi \rangle$, funktoru F, a $\langle b, \psi \rangle$, funktoru G. Ukažte, že pro každou přirozenou transfomaci $\tau\colon F \to G$ existuje právě jeden morfismus $h\colon b \to a$ v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že

$$\tau \circ \varphi = \psi \circ \mathbf{A}(h, -)\colon \mathbf{A}(a, -) \to G.$$

Úloha 5.5. *Nechť $\mathbf{A}$ je úplná podkategorie kategorie $\mathbf{B}$. Označme $J\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ funktor odpovídající vnoření inkluzí. Ukažte, že pro každou dvojici funktorů $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ platí, že*

$$\mathbf{Nat}(F, G) \simeq \mathbf{Nat}(JF, JG).$$

Úloha 5.6. *Ukažte, že existuje koprodukt objektů a, b kategorie $\mathbf{A}$ právě když je funktor*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(a, -) \times \mathbf{A}(b, -)\colon \mathbf{A} &\to \mathbf{Set} \\ c &\mapsto \mathbf{A}(a, c) \times \mathbf{A}(b, c) \\ f &\mapsto \mathbf{A}(a, f) \times \mathbf{A}(b, f) \end{aligned}$$

reprezentovatelný.