**Řešení vybraných příkladů**
**8. sada**

1.b) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n^2} z^n, \ a > 0. \tag{1}$$

Řešení: Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1. \end{cases}$$

Poloměr konvergence $R$ řady (1) je tedy

$$R = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a < 1. \end{cases}$$

Pro $a = 1$ má smysl uvažovat konvergenci (1) na kružnici konvergence, tj. na jednotkové kružnici $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Každé $z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1$ je tvaru $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ pro jednoznačně určené $x \in [0, 2\pi)$. Máme tedy studovat konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{ix})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx}, \ x \in [0, 2\pi). \tag{2}$$

Platí $|e^{inx}| = 1, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in [0, 2\pi)$. Není tedy splněna nutná podmínka pro konvergenci řady, tj. není pravda, že $|e^{inx}| \to 0$ pro $n \to +\infty$, a řada (2) tedy nekonverguje.

1.e) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^p}, \ p \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Řešení: Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} = 1^{-p} = 1.$$

Zde jsme použili $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$ (viz 5. dú z 5. sady). Poloměr konvergence řady (3) je tedy 1.

Stejně jako v b) má smysl uvažovat konvergenci (3) na jednotkové kružnici. Pišme $z = e^{ix}, \ x \in [0, 2\pi)$. Pak (3) je tvaru

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^p}. \tag{4}$$

Platí $\left|\frac{e^{inx}}{n^p}\right| = n^{-p}$. Vidíme, že řada (4) může konvergovat jen pro $p > 0$. Je-li nyní $p > 0$, pak $n^{-p} \searrow 0$ pro $n \to +\infty$ a současně řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos(nx) + i \sin(nx))$$

má omezené částečné součty pro $x \neq 0$ (viz příklad m) z 6. sady). Z Dirichletova kritéria tedy plyne konvergence (4) pro $p > 0$ a $x \neq 0$.

Zbývá probrat případ $x = 0$. Pak $e^{in0} = 1$ a máme tedy studovat konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}. \tag{5}$$

Víme, že tato řada konverguje právě tehdy, když $p > 1$.

Závěr: Poloměr konvergence řady (3) je 1. Na jednotkové kružnici řada konverguje pro $p > 0$ a $z \neq 1$. Je-li $p > 1$, pak řada konverguje všude na jednotkové kružnici (a to dokonce absolutně). Pro ostatní hodnoty $z$ a $p$ řada na kružinici nekonverguje.

1.g) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

(6) $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n z^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p,\ p\in\mathbb{R}.$$

Řešení: Označme $a_n := (-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p,\ n=1,2,\cdots$. Pak

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}\right)^p\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+4n+2}{4n^2+10n+6}\right)^p = \frac{1}{2^p}.\end{aligned}$$

Poloměr konvergence je tedy $2^p$.

Nechť dále $z=2^pe^{ix},\ x\in[0,2\pi)$. Zbývá určit, pro která $x$ konveguje řada

(7) $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n 2^{pn}e^{inx}\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p = -\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{inx}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p.$$

Označme

$$b_n := \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}b_n^p &= \left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\\ &= \left(\frac{(2.4.6\cdots(2n))^2}{(2n+1)!}\right)^p\\ &= \left(\frac{2.4.6\cdots(2n)}{3.5\cdots(2n+1)}\right)^p\\ &= \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^p.\end{aligned}$$

Připomeňme, že $(2n)!! := (2n)(2n-2)\cdots 2,\ (2n+1)!! := 3.5\cdots(2n+1)$. Máme $|(-1)^n e^{inx}|=1$. Je-li $p\le 0$, pak $b_n^p\ge 1$ a řada (7) tedy nemůže konvergovat.

Stačí tedy dále uvažovat $p>0$. Máme $(-1)^n=\cos(\pi n)^n = e^{i\pi n}$ a tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in(x+\pi)}.$$

Víme, že tato řada má omezenou posloupnost částečných součtů kdykoliv $x+\pi\ne 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Uvažujeme-li $x\in[0,2\pi)$, pak $x+\pi=2k\pi$ nastává jen pro $x=\pi,\ k=1$. Jelikož $\frac{b_{n+1}^p}{b_n^p}=(\frac{2n+2}{2n+3})^p<1$, pak je jasné, že posloupnost $\{b_n^p\}_{n=1}^{+\infty}$ je klesající. Jestliže navíc ukážeme

(8) $$\lim_{n\to+\infty} b_n^p = 0,$$

pak z Dirichletova kritéria plyne, že (7) konverguje pro $x\ne\pi$ a $p>0$. K ověření (8) nám žřejmě stačí ukázat, že $b_n^p\to 0$ pro $n\to+\infty$ pro pevně zvolenou hodnotu $p>0$. Ukážeme si tři postupy, jak (8) dokázat.

1. postup. V příkladě 4.p) z 6. sady jsme ukázali, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$$

konverguje pro $p>2$. Nutná podmínka pro konvergenci znamená, že

(9) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p = 0$$

pro $p>2$. Pak ale zřejmě (9) platí kdykoliv $p>0$. Postup tohoto příkladu funguje beze změny i pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$. Speciálně dostaneme (8) pro $p>0$.

2. postup. Použijeme Stirlingovu formuli. Máme

$$\begin{aligned} b_n &\cong \frac{2^{2n}\big((\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}\big)^2}{(\frac{2n+1}{e})^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}} \\ &= \frac{(2n)^{2n+1}e\pi}{(2n+1)^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}} \\ &= \frac{e\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1}{(1+\frac{1}{2n})^{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},\ n\to+\infty. \end{aligned}$$

Odsud je pak jasné, že $b_n \to 0$ pro $n \to +\infty$ a tedy i (8) pro $p > 0$.

3. postup. (Analogie postupu k příkladu 4.p) z 6. sady). Zkusme dokázat (8) pro $p = 2$, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} b_n^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\right)^2 = 0.$$

Platí

$$b_{n+1}^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^2 b_n^2 < \frac{n+1}{n+2}b_n^2.$$

Indukcí dle $n$,

$$b_{n+1}^2 < \frac{n+1}{n+2}b_n^2 < \frac{n}{n+2}b_{n-1}^2 < \cdots < \frac{2}{n+2}b_1^2 = \frac{2}{n+2}\big(\frac{2}{3}\big)^2 = \frac{8}{9(n+2)}$$

a tedy (8) skutečně platí.

Zbývá určit, pro která $p$ řada (7) konverguje, jestliže $x = \pi$. To je to samé jako konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$. Analogicky jako v příkladě 4.p) z 6. sady dostaneme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$ konverguje (absolutně) právě tehdy, když $p > 2$.

Závěr: Poloměr konvergence řady (3) je $2^p$. Na kružnici konvergence o poloměru $2^p$ řada konverguje pro $p > 0$ a $z \neq -2^p$. Je-li $p > 2$, pak řada konverguje všude na jednotkové kružnici (a to dokonce absolutně). Pro ostatní hodnoty $z$ a $p$ řada na kružnici konvergence nekonverguje.

2.b) Najděte součet řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n. \tag{10}$$

Řešení: Z limitního podílového kritéria plyne, že řada (10) konverguje pro $|x| < 1$. Z Dirichletova kritéria plyne, že konverguje i pro $x = -1$. Pro ostatní $x \in \mathbb{R}$ řada diverguje. Platí

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n &= \frac{1.3.\cdots(2n-1)}{2.4\cdots 2n}x^n \\ &= \frac{1.3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n \\ &= \frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-1)}{2}\frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x)^n. \end{aligned}$$

Jelikož platí

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{-1}{2}}{n}(-x)^n,\ x\in[-1,1),$$

pak vidíme, že (10) lze sečíst na

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1,\ x\in[-1,1).$$

3.a) Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}. \tag{11}$$

Řešení: Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n. \tag{12}$$

Z limitního odmocninového kritéria plyne, že (12) konverguje pro $|x| < 2$. Budeme potřebovat, že uvnitř $(-2, 2)$, řada (12) konverguje lokálně stejnoměrně, můžeme tedy derivovat i integrovat člen po členu. Díky tomu máme:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n\Big)' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} (x^n)' \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^{n-1} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \\
&= \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - 1\Big) \\
&= \frac{1}{x}\Big(\frac{2}{2-x} - 1\Big) \\
&= \frac{2}{x(2-x)} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{2-x}.
\end{aligned}$$

Tedy (12) je primitivní k $\frac{1}{2-x}$ na $(-2, 2)$. Na druhou stranu:

$$\int \frac{dx}{2-x} = -\ln(2-x) + c, \ x \in (-2, 2).$$

To znamená, že

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n = -\ln(2-x) + c.$$

Porovnáním obou stran pro $x = 0$ vidíme, že $c = \ln(2)$. Tedy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n = -\ln(2-x) + \ln 2, \ x \in (-2, 2).$$

Tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln(2-1) + \ln 2 = \ln 2.$$

(3.b) Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}. \tag{13}$$

Řešení: Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1}. \tag{14}$$

Z limitního podílového kritéria plyne, že (14) konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Skutečně,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n}{(n-1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0.$$

Budeme potřebovat, že řada (14) konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$, můžeme tedy derivovat i integrovat člen po členu. Díky tomu máme:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{x^n}{(n-1)!}\Big)' \\
&= \left( x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right)' \\
&= \left( x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' \\
&= (xe^x)' = e^x(x+1).
\end{aligned}$$

To znamená, že

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} \Big|_{x=1} = 2e.$$

3.c) Najděte součet řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}. \tag{15}$$

Řešení: Uvažujme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1}. \tag{16}$$

Z limitního podílového kritéria plyne, že řada (16) konverguje pro $|x| < 1$. Z Dirichletova kritéria plyne, že konverguje i pro $x = 1$. Máme:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}\Big)' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} (x^{2n-1})' \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (x^2)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že (16) je primitivní k $\frac{1}{1+x^2}$ na $(-1,1)$. Tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1} = \arctan x + c, \ x \in (-1,1).$$

Dosadíme za $x = 0$ a vidíme, že $c = 0$. Tudíž

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1}\Big|_{x=1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

3.e) Najděte součet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{17}$$

Řešení: Platí:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big|_{x=-1} \\ &= \lim_{x\to -1^+} \left( (1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.\end{aligned}$$

Zde jsme využili cvičení 4.b).

(3.f) Najděte součet řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n. \tag{18}$$

Řešení: Uvažujme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}. \tag{19}$$

Podobně jako v (8), platí

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(n)-\ln(n+1)}{n}} = e^0 = 1.$$

Z limitního podílového kritéria tedy plyne, že řada (18) konverguje pro $|x| < 1$. Z Dirichletova kritéria plyne, že konverguje i pro $x = 1$, zjevně $\frac{1}{n(n+1)} \searrow 0$ pro $n \to +\infty$ and $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ má omezené částečné součty. Pro ostatní $x$ řada (18) nekonverguje. Máme:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}\Big)'' &= \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n\Big)' \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-1} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^{n-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= -\frac{1}{1+x}.\end{aligned}$$

Funkci $\frac{1}{1+x}$ nyní dvakrát zintegrujeme a dostaneme

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+x} &= \ln(1+x) + c,\ x \in (-1,1) \\
\int \ln(1+x)\ dx &= x\ln(1+x) - \int \frac{x\ dx}{1+x} \\
&= x\ln(1+x) + \int \frac{dx}{1+x} - \int\ dx \\
&= x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x + d,\ x \in (-1,1).
\end{aligned}$$

Tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1} = -(x+1)\ln(1+x) + x - cx - d,\ x \in (-1,1). \tag{20}$$

Dosadíme za $x = 0$ a vidíme, že $d = 0$. K určení konstanty $c$ zderivujeme obě strany (20) a porovnáme v bodě $x = 0$, dostaneme $0 = -1 + 1 - c = -c$. Tedy i $c = 0$. Tudíž

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1} \Big|_{x=1} \\
&= -\lim_{x\to 1^-} \big((x+1)\ln(1+x) - x\big) = 1 - 2\ln 2 = 1 - \ln 4.
\end{aligned}$$