Úvod do komplexní analýzy
ZS 2022/23, MFF UK

Sada příkladů 1

Komplexní čísla - opakování

Značení $\Re(x + \mathbf{i}y) = x,\ \Im(x + \mathbf{i}y) = y,\ \exp(\mathbf{i}x) = e^{\mathbf{i}x} = \cos x + \mathbf{i}\sin x$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) Najděte reálnou a imaginární část komplexních čísel

a) $\frac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$ b) $\frac{5\mathbf{i}}{(1-\mathbf{i})(2-\mathbf{i})(3-\mathbf{i})}$ c) $(1 + \mathbf{i}\sqrt{2})^3$ d) $\left(\frac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^3$

e) $\frac{(1+\mathbf{i})^5}{(1-\mathbf{i})^3}$ f) $(1 + \sqrt{3}\mathbf{i})^{2020}$

(2) Zapište následující čísla v goniometrickém tvaru

a) $\frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$ b) $-3 + 3\mathbf{i}$ c) $-\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\cos\frac{\pi}{7} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{7}$

(3) Najděte všechny hodnoty komplexních odmocnin

a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{1+\mathbf{i}}$ c) $\sqrt[5]{-1}$

(4) Najděte (v $\mathbb{C}$) všechny kořeny rovnic

a) $z^4 + \mathbf{i}z = 0$ b) $z^n = \bar{z},\ n \in \mathbb{N}$ c) $z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$

(5) Rozložte následující polynomy jako součin nejvýše kvadratických polynomů s reálnými koeficienty

a) $x^4 + 1$ b) $x^5 - 1$ c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Řešení 1. **a**) $0; -1$, **b**) $-\frac{1}{2}; 0$, **c**) -5; $\sqrt{2}$, **d**) $0; 1$, **e**) $2; 0$, **f**) $-2^{2019};\ -2^{2019}\sqrt{3}$
2. **a**) $\exp(\frac{1}{2}\pi\mathbf{i})$, **b**) $3\sqrt{2}\exp(\frac{3}{4}\pi\mathbf{i})$, **c**) $\exp(\frac{2}{3}\pi\mathbf{i})$, **d**) $\exp(\frac{6}{7}\pi\mathbf{i})$,
3. **a**) $\{\exp(\frac{2k}{3}\pi\mathbf{i}):\ k = 0, 1, 2\}$, **b**) $\{\sqrt[6]{2}\big(\exp(\frac{1+8k}{12}\pi\mathbf{i})\big):\ k = 0, 1, 2\}$, **c**) $\{\exp(\frac{1+2k\pi}{5}\pi\mathbf{i}):\ k = 0, 1, \cdots, 4\}$.
4. **a**) $\{0, \exp(\frac{3+4k}{6}\pi\mathbf{i}):\ k = 0, 1, 2\}$, **b**) $\{0, \exp(\frac{2k}{n+1}\pi\mathbf{i}):\ k = 0, 1, \cdots, n\}$, **c**) $\{\exp(\frac{2k}{5}\pi\mathbf{i}):\ k = 1, 2, 3, 4\}$.
5. **a**) $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$, **b**) $(x - 1)(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1)$,
c) $(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1)$.

(6) Načrtněte množinu všech bodů v komplexní rovině splňující vztahy

a) $|\Re z| < 2$ b) $|\Im z| \leq 1,\ 0 \leq \Re z < 1$ c) $|z - 1| < 1$

d) $|z - 1 - \mathbf{i}| = |z + 1|$ e) $|z - 2| + |z + 2| = 5$ f) $2|z| = |z - 2|$

g) $|\Re z| + |\Im z| \leq 1$

(7) Dokažte pro každé $z, w \in \mathbb{C}$:

a) $|z + w| \leq |z| + |w|$ b) $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$

(8) Nechť $z \in \mathbb{C}$ splňuje $|z| > 1$. Dokažte odhady

$$\frac{|z|^4 - |z|}{|z|^2 + |z| + 1} \leq \left|\frac{z^4 + \mathbf{i}z}{z^2 + z + 1}\right| \leq \frac{|z|^4 + |z|}{(|z| - 1)^2}.$$

(9) Spočtěte

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbf{dx}}{1+x^4}.$$

(Návod: Integrál počítejte jako

$$\Im \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2+\mathbf{i}}{x^4+1}\mathbf{dx}$$

a využijte vzorec

$$\int \frac{\mathbf{dx}}{x-(a+b\mathbf{i})} = \ln\sqrt{(x-a)^2+b^2} + \mathbf{i}\arctan\frac{x-a}{b} + C,$$

kde $a, b, C \in \mathbb{R}$ a $b \neq 0$.)

Příklady pro koumáky

(10) Spočtěte integrál

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathbf{dx}\ , \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |\alpha| \neq 1.$$

$\big($Návod: Uvažujte limitu $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \ln(1-2\alpha\cos(\frac{i}{n})+\alpha^2)\big)$.

(11) Ukažte, že kruhové inverze zobrazují kružnice a přímky v rovině $\mathbb{R}^2$ na kružnice a přímky v rovině.

(Návod: Nechť $k(s,r)$ značí kružnici v rovině se středem v s a poloměrem $r > 0$. Vzdálenost bodů $x, y \in \mathbb{R}^2$ značíme $|xy|$. Kruhová inverze určená kružnicí $k(s,r)$ je zobrazení $I_{s,r}:\ \mathbb{R}^2\backslash\{s\} \to \mathbb{R}^2\backslash\{s\},\ I_{s,r}(x) = x'$, kde bod x' je jednoznačně určen tím, že x' leží na polopřímce vycházející z s a procházející x a $|sx||sx'| = r^2$.

Ukažte, že kruhová inverze určená jednotkovou kružnicí se středem v počátku odpovídá zobrazení $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ a převeďte případ obecné kruhové inverze na tento speciální případ. Zde $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.)