

Řešení vybraných příkladů 4. sada

b) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n^2} z^n, \quad a > 0.$$

Řešení: Platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1. \end{cases}$$

Poloměr konvergence R řady (1) je tedy

$$R = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a < 1. \end{cases}$$

Pro $a = 1$ má smysl uvažovat konvergenci (1) na kružnici konvergence, tj. na jednotkové kružnici $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Každé $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ je tvaru $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ pro jednoznačně určené $x \in [0, 2\pi)$. Máme tedy studovat konvergenci řady

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{ix})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx}, \quad x \in [0, 2\pi).$$

Platí $|e^{inx}| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 2\pi)$. Není tedy splněna nutná podmínka pro konvergenci řady, tj. není pravda, že $|e^{inx}| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow +\infty$, a řada (2) tedy nekonverguje.

d) Vyšetřete konvergenci mocninné řady

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} = 1^{-p} = 1.$$

Zde jsme použili $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$ (viz 5. důz. z 5. sady). Poloměr konvergence řady (3) je tedy 1.

Stejně jako v b) má smysl uvažovat konvergenci (3) na jednotkové kružnici. Pišme $z = e^{ix}$, $x \in [0, 2\pi)$. Pak (3) je tvaru

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^p}.$$

Platí $\left| \frac{e^{inx}}{n^p} \right| = n^{-p}$. Vidíme, že řada (4) může konvergovat jen pro $p > 0$. Je-li nyní $p > 0$, pak $n^{-p} \searrow 0$ pro $n \rightarrow +\infty$ a současně řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos(nx) + i \sin(nx))$$

má omezené částečné součty pro $x \neq 0$ (viz příklad m) z 6. sady). Z Dirichletova kritéria tedy plyne konvergence (4) pro $p > 0$ a $x \neq 0$.

Zbývá probrat případ $x = 0$. Pak $e^{in0} = 1$ a máme tedy studovat konvergenci řady

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Víme, že tato řada konverguje právě tehdy, když $p > 1$.

Závěr: Poloměr konvergence řady (3) je 1. Na jednotkové kružnici řada konverguje pro $p > 0$ a $z \neq 1$. Je-li $p > 1$, pak řada konverguje všude na jednotkové kružnici (a to dokonce absolutně). Pro ostatní hodnoty z a p řada na kružnici nekonverguje.

f) Vyšetřete konvergenci mocnné řady

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n z^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Označme $a_n := (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p$, $n = 1, 2, \dots$. Pak

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \right)^p \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 4n + 2}{4n^2 + 10n + 6} \right)^p = \frac{1}{2^p}. \end{aligned}$$

Poloměr konvergence je tedy 2^p .

Nechť dále $z = 2^p e^{ix}$, $x \in [0, 2\pi)$. Zbývá určit, pro která x konverguje řada

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 2^{pn} e^{inx} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p = - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{inx} \left(\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p.$$

Označme

$$b_n := \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} b_n^p &= \left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p \\ &= \left(\frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n))^2}{(2n+1)!} \right)^p \\ &= \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \right)^p \\ &= \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^p. \end{aligned}$$

Připomeňme, že $(2n)!! := (2n)(2n-2)\cdots 2$, $(2n+1)!! := 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$. Máme $|(-1)^n e^{inx}| = 1$. Je-li $p \leq 0$, pak $b_n^p \geq 1$ a řada (7) tedy nemůže konvergovat.

Stačí tedy dále uvažovat $p > 0$. Máme $(-1)^n = (\cos(\pi n))^n = e^{i\pi n}$ a tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in(x+\pi)}.$$

Víme, že tato řada má omezenou posloupnost částečných součtů kdykoliv $x + \pi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvažujeme-li $x \in [0, 2\pi)$, pak $x + \pi = 2k\pi$ nastává jen pro $x = \pi$, $k = 1$. Jelikož $\frac{b_{n+1}^p}{b_n^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+3} \right)^p < 1$, pak je jasné, že posloupnost $\{b_n^p\}_{n=1}^{+\infty}$ je klesající. Jestliže navíc ukážeme

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^p = 0,$$

pak z Dirichletova kritéria plyne, že (7) konverguje pro $x \neq \pi$ a $p > 0$. K ověření (8) nám zřejmě stačí ukázat, že $b_n^p \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow +\infty$ pro pevně zvolenou hodnotu $p > 0$. Ukážeme si dva postupy, jak (8) dokázat.

1. postup. Použijeme Stirlingovu formuli. Máme

$$\begin{aligned} b_n &\cong \frac{2^{2n} \left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \right)^2}{\left(\frac{2n+1}{e} \right)^{2n+1} \sqrt{2\pi(2n+1)}} \\ &= \frac{(2n)^{2n+1} e\pi}{(2n+1)^{2n+1} \sqrt{2\pi(2n+1)}} \\ &= \frac{e\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n+1}} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Odsud je pak jasné, že $b_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow +\infty$ a tedy i (8) pro $p > 0$.

2. postup. Zkusme dokázat (8) pro $p = 2$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \right)^2 = 0.$$

Platí

$$b_{n+1}^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+3} \right)^2 b_n^2 < \frac{n+1}{n+2} b_n^2.$$

Indukcí dle n ,

$$b_{n+1}^2 < \frac{n+1}{n+2} b_n^2 < \frac{n}{n+2} b_{n-1}^2 < \dots < \frac{2}{n+2} b_1^2 = \frac{2}{n+2} \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{8}{9(n+2)}$$

a tedy (8) skutečně platí.

Zbývá určit, pro která p řada (7) konverguje, jestliže $x = \pi$. To je to samé jako konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$. Z Raabeho kritéria dostaneme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p$ konverguje (absolutně) právě tehdy, když $p > 2$.

Závěr: Poloměr konvergence řady (3) je 2^p . Na kružnici konvergence o poloměru 2^p řada konverguje pro $p > 0$ a $z \neq -2^p$. Je-li $p > 2$, pak řada konverguje všude na jednotkové kružnici (a to dokonce absolutně). Pro ostatní hodnoty z a p řada na kružnici konvergence nekonverguje.