Úvod do komplexní analýzy
ZS 2022/23, MFF UK

SADA PŘÍKLADŮ 6

Taylorovy řady

(1) Najděte Taylorovu řadu holomorfní funkce v daném bodě a obor konvergence

a) $f(z) = \frac{1}{z}$ v obecném bodě $0 \neq a \in \mathbb{C}$

b) $f(z) = \exp(z-1)$ v bodě $z = 1$

c) $f(z) = \log(z)$ v bodě 1, kde log je hlavní větev logaritmu

(2) Najděte prvních n členů Taylorovy řady holomorfní funkce v daném bodě

a) $f(z) = \frac{\sin z}{1-z^2}$ v bodě $z = 0$ a pro $n = 6$.

b) $f(z) = \tan z$ v bodě $z = 0$ a pro $n = 4$.

c) $f(z) = \sqrt{z}$ v bodě $z = 1$ pro $n = 4$ (zde $\sqrt{1} = 1$).

(3) Určete násobnosti kořenů funkcí:

a) $z^2 - z^5$, všechny kořeny

b) $(1-\sqrt{z})^3$, kořen 1

c) $e^{z^2} - 1$, všechny kořeny

d) $1 - \cos z$, všechny kořeny

e) $e^{\sin z} - e^{\tan z}$, kořen 0

Řešení

1. **a)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(z-a)^n$ na $U(a, |a|)$, **b)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^k}{k!}$ na $\mathbb{C}$, **c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$ na $U(1,1)$,

2. **a)** $z + \frac{5}{6}z^3 + \frac{101}{120}z^5$, **b)** $z + \frac{1}{3}z^3$, **c)** $1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{8}(z-1)^2 + \frac{1}{16}(z-1)^3$.

3. **a)** 0 násobnosti 2; $1, e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$ násobnosti 1, **b)** 3,
c) 0 násobnosti 2, ostatní $\sqrt{k\pi}(\pm 1 \pm i)$, $k \in \mathbb{Z}$, násobnosti 1. **d)** $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, násobnosti 2, **e)** 3.

$U(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < r\}, \ a \in \mathbb{C}, \ r \geq 0$