Úvod do komplexní analýzy
ZS 2022/23, MFF UK

SADA PŘÍKLADŮ 7

Izolované singularity a Laurentovy řady

(1) Klasifikujte izolované singularity (včetně chování v ∞)

a) $\frac{z^2-1}{z-1}$

b) $\frac{\sin z}{z}$

c) $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}$

d) $\tan \pi z$

(2) Najděte Laurentovy rozvoje následujících funkcí na všech mezikružích s danými středy

a) $f(z) = \frac{1}{z-z^2}$, 0 a 1.

b) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$, 0.

Řešení

1. **a)** $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$, v bodě 1 je odstranitelná singularita, v ∞ je jednoduchý pól,
b) $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, v bodě 0 je odstranitelná singularita, v ∞ je podstatná singularita,
c) $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{2k\pi\mathbf{i},\ k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\})$, v bodě 0 je odstranitelná singularita, v bodech $\{2k\pi\mathbf{i},\ k\pi :\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ je jednoduchý pól, v ∞ není izolovaná singularita,
d) $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{k + \frac{1}{2} :\ k \in \mathbb{Z}\})$, v bodech $k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, má jednoduché póly, v ∞ není izolovaná singularita.

2. **a)** $\sum_{k=-1}^{+\infty} z^k$ na $P(0,0,1)$, $-\sum_{k=2}^{+\infty} z^{-k}$ na $P(0,1,+\infty)$, $\sum_{k=-1}^{+\infty} (-1)^k (z-1)^k$ na $P(1,0,1)$, $-\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (z-1)^{-k}$ na $P(1,1,+\infty)$, **b)** $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-1}$.

$P(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} :\ r < |z-a| < R\}$