

**Úvod do komplexní analýzy  
ZS 2022/23, MFF UK**

SADA PŘÍKLADŮ 9-11

**Aplikace residuové věty**

$R$  značí racionální funkci jedné nebo dvou reálných proměnných

(1) **Integrály typu**  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)},$

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1},$

c) ♣  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2},$

d) ♣  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, a, b > 0,$

e) ♣  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3}, a > 0.$

Řešení: **a)**  $\frac{\pi}{\sqrt{3}},$  **b)**  $\frac{\pi}{\sqrt{2}},$  **c)**  $-\frac{\pi}{27},$  **d)**  $\frac{\pi}{ab(a+b)},$  **e)**  $\frac{\pi}{16a^3}.$

(2) **Integrály typu**  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)R(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)R(x)dx$

a) ♣  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+a^2}, a > 0,$

b) ♣  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) dx}{x^3-x},$

c) ♣  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-8)\cos(\pi x) dx}{4x^2-1}.$

Řešení: **a)**  $\frac{\pi e^{-a}}{a},$  **b)**  $-\pi,$  **c)**  $4\pi.$

(3) **Integrály typu**  $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$

a) ♣  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}, |a| > 1,$

b) ♣  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}, a > b > 0,$

c) ♣  $\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx) dx}{1-2a\cos x+a^2}, a \in \mathbb{R}, |a| \neq 1, n \in \mathbb{N},$

d) ♣  $\int_0^{\pi} \tan(x+ia) dx, a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

Řešení: **a)**  $\frac{2\pi \operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2-1}},$  **b)**  $\frac{2\pi a}{(\sqrt{a^2-b^2})^3},$  **d)**  $\operatorname{sgn}(a)\pi i.$

♣ značí, že řešení daného příkladu je naznačeno v souboru na mých stránkách