Variace na invarianci: Domácí úkoly

Filip Filipi

19. dubna 2021

Zadání:

Najděte a popište grupy symetrií,

1) rovnostranného trojúhelníku

2) čtverce

3) čtyřstěnu

Najděte třídy konjugací grupy symetrií

4) rovnostranného trojúhelníku

5) čtverce

6) čtyřstěnu

7) Najděte charakter reprezentace grupy symetrií rovnostranného trojúhelníku na vektorovém prostoru všech řezů vektorových bandlů malých vychýlení molekuly a charakter této reprezentace napište jako součet charakterů ireducibilních reprezentací.

1) Pojmenujme si vrcholy daného rovnostranného trojúhelníku A, B, C. Jeho těžiště, které splývá s ortocentrem nazývejme středem S. Tvrdím, že grupou symetrií tohoto trojúhelníka je grupa s operací „$\circ$“ skládání složená z prvků

- i : identity (případně libovolného otočení kolem bodu S o úhel, který je celočíselným násobkem 360)
- o_1 : otočení kolem bodu S o úhel $+120°$ (případně libovolného jiného otočení kolem bodu S, které je je tvaru $360k + 120$ pro nějaké celé k)
- o_2 : otočení kolem bodu S o úhel $-120°$ (případně libovolného jiného otočení kolem bodu S, které je tvaru $360k - 120$ pro nějaké celé k)
- s_1 : osové symetrie podél výšky incidentní s vrcholem A
- s_2 : osové symetrie podél výšky incidentní s vrcholem B
- s_3 : osové symetrie podél výšky incidentní s vrcholem C

Grupa je maximální možná, protože máme-li permutovat dané 3 vrcholy trojúhelníka, tak nemáme více než $3 \times 2 \times 1 = 6$ různých možností, jak toho docílit.

Pokud vrcholy pojmenujeme v pořadí „po směru kladného úhlu“, pak můžeme psát, že platí následující:

X	$i(X)$	$o_1(X)$	$o_2(X)$	$s_1(X)$	$s_2(X)$	$s_3(X)$
A	A	B	C	A	C	B
B	B	C	A	C	B	A
C	C	A	B	B	A	C

Tabulka operace skládání:

$\circ$	i	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
i	i	o_1	o_2	s_1	s_2	s_3
o_1	o_1	o_2	i	s_2	s_3	s_1
o_2	o_2	i	o_1	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	i	o_2	o_1
s_2	s_2	s_1	s_3	o_1	i	o_2
s_3	s_3	s_2	s_1	o_2	o_1	i

Vidíme, že je grupa uzavřená, že má neutrální prvek, že ke každému prvku existuje prvek inverzní a z vlastnosti skládání funkcí víme, že je operace „$\circ$“ asociativní.

2) Pojmenujme si vrcholy daného čtverce A, B, C, D. Jeho těžiště, které je určeno průsečíkem úhlopříček, nazývejme středem S. Tvrdím, že grupou symetrií tohoto čtverce je grupa s operací „$\circ$“ skládání složená z prvků

- i : identity (případně libovolného otočení kolem bodu S o úhel, který je celočíselným násobkem 360)
- o_1 : otočení kolem bodu S o úhel $+90°$ (případně libovolného jiného otočení kolem bodu S, které je je tvaru $360k + 90$ pro nějaké celé k)
- o_2 : otočení kolem bodu S o úhel $+180°$ (případně libovolného jiného otočení kolem bodu S, které je tvaru $360k + 180$ pro nějaké celé k, nebo též středové symetrie se středem v S)
- o_3 : otočení kolem bodu S o úhel $+270°$ (případně libovolného jiného otočení kolem bodu S, které je tvaru $360k + 270$ pro nějaké celé k)
- s_1 : osové symetrie podél osy strany AB
- s_2 : osové symetrie podél osy strany BC
- s_3 : osové symetrie podél úhlopříčky AC
- s_4 : osové symetrie podél úhlopříčky BD

Grupa je maximální možná, protože máme-li permutovat dané 4 vrcholy čtverce se zachováním jeho struktury (sousednosti vrcholů), tak nemáme více než $4 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$ různých možností, jak toho docílit.

Pokud vrcholy pojmenujeme v pořadí „po směru kladného úhlu“, pak můžeme psát, že platí následující:

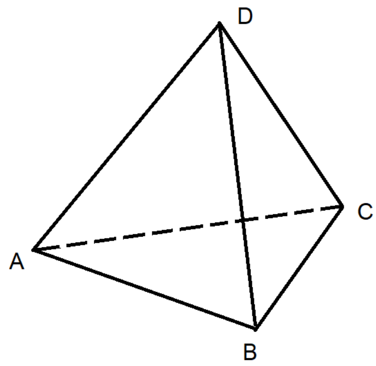
X	$i(X)$	$o_1(X)$	$o_2(X)$	$o_3(X)$	$s_1(X)$	$s_2(X)$	$s_3(X)$	$s_4(X)$
A	A	B	C	D	B	D	A	C
B	B	C	D	A	A	C	D	B
C	C	D	A	B	D	B	C	A
D	D	A	B	C	C	A	B	D

Tabulka operace skládání:

$\circ$	i	o_1	o_2	o_3	s_1	s_2	s_3	s_4
i	i	o_1	o_2	o_3	s_1	s_2	s_3	s_4
o_1	o_1	o_2	o_3	i	s_3	s_4	s_2	s_1
o_2	o_2	o_3	i	o_1	s_2	s_1	s_4	s_3
o_3	o_3	i	o_1	o_2	s_4	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_4	s_2	s_3	i	o_2	o_3	o_1
s_2	s_2	s_3	s_1	s_4	o_2	i	o_1	o_3
s_3	s_3	s_1	s_4	s_2	o_1	o_3	i	o_2
s_4	s_4	s_2	s_3	s_1	o_3	o_1	o_2	i

Vidíme, že je grupa uzavřená, že má neutrální prvek, že ke každému prvku existuje prvek inverzní a z vlastnosti skládání funkcí víme, že je operace „$\circ$“ asociativní.

3) Popis grupy symetrií čtyřstěnu bude značně komplikovanější. Pojmenujme si body jako na obrázku níže a hledejme prvky grupy s operací „$\circ$“ skládání. Těžiště tohoto čtyřstěnu pojmenujme S. Uveďme, že platí, že přímka XS pro libovolné $X \in \{A, B, C, D\}$ tvoří výšku čtyřstěnu incidentní s vrcholem X. A definujme si, že S_{XY} označuje střed úsečky XY. Když mluvíme o orientovaném úhlu vůči výšce incidentní s bodem X, tak jeho orientaci určíme pravidlem pravé ruky z orientované úsečky SX.



Snížíme míru podrobnosti a určíme zastupitele operací, které zvolíme jako prvky grupy:

- i : identita
- o_{A1} : otočení kolem výšky incidentní s bodem A o úhel $+120°$
- o_{A2} : otočení kolem výšky incidentní s bodem A o úhel $-120°$
- o_{B1} : otočení kolem výšky incidentní s bodem B o úhel $+120°$
- o_{B2} : otočení kolem výšky incidentní s bodem B o úhel $-120°$
- o_{C1} : otočení kolem výšky incidentní s bodem C o úhel $+120°$
- o_{C2} : otočení kolem výšky incidentní s bodem C o úhel $-120°$
- o_{D1} : otočení kolem výšky incidentní s bodem D o úhel $+120°$
- o_{D2} : otočení kolem výšky incidentní s bodem D o úhel $-120°$
- $o_{S_{AB}S_{CD}}$: otočení kolem přímky $S_{AB}S_{CD}$ o úhel $+180°$
- $o_{S_{AC}S_{BD}}$: otočení kolem přímky $S_{AC}S_{BD}$ o úhel $+180°$
- $o_{S_{AD}S_{BC}}$: otočení kolem přímky $S_{AD}S_{BC}$ o úhel $+180°$
- s_{AB} : plošná symetrie vůči ploše určené body ABS
- s_{AC} : plošná symetrie vůči ploše určené body ACS
- s_{AD} : plošná symetrie vůči ploše určené body ADS
- s_{BC} : plošná symetrie vůči ploše určené body BCS
- s_{BD} : plošná symetrie vůči ploše určené body BDS
- s_{CD} : plošná symetrie vůči ploše určené body CDS

Maximální velikost grupy symetrií můžeme určit výpočtem $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. My jsme nalezli 18 symetrií, proto je možné, že na další narazíme během sestrojování tabulky operace „$\circ$“.

Můžeme definovat již nalezené symetrie výpisem funkčních hodnot:

X	$i(X)$	$o_{A1}(X)$	$o_{A2}(X)$	$o_{B1}(X)$	$o_{B2}(X)$	$o_{C1}(X)$	$o_{C2}(X)$	$o_{D1}(X)$	$o_{D2}(X)$
A	A	A	A	C	D	D	B	B	C
B	B	D	C	B	B	A	D	C	A
C	C	B	D	D	A	C	C	A	B
D	D	C	B	A	C	B	A	D	D

X	$o_{S_{AB}S_{CD}}(X)$	$o_{S_{AC}S_{BD}}(X)$	$o_{S_{AD}S_{BC}}(X)$
A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

X	$s_{AB}(X)$	$s_{AC}(X)$	$s_{AD}(X)$	$s_{BC}(X)$	$s_{BD}(X)$	$s_{CD}(X)$
A	A	A	A	D	C	B
B	B	D	C	B	B	A
C	D	C	B	C	A	C
D	C	B	D	A	D	D

V tuto chvíli mi došly iluze, že celou tabulky sepíši ručně a tak jsem si vytvořil program, který ji spočítá za mě. Pro případný zájem kód v souboru typu „.py“ a vstupní textové dokumenty zasílám spolu s tímto dokumentem. Současně jsem si tímto softwarem zkontroloval již uskutečněné výpočty.

Sestrojíme tabulku operace „$\circ$“ z již definovaných operací (viz předposlední stránka dokumentu).

Můj software při jejím sestrojování nalezl nové prvky a pojmenoval je abecedně, zde je tabulka jejich definice:

X	$a(X)$	$b(X)$	$c(X)$	$d(X)$	$e(X)$	$f(X)$
A	D	C	B	D	C	B
B	A	D	D	C	A	C
C	B	B	A	A	D	D
D	C	A	C	B	B	A

Tyto prvky nedokáži pojmenovat z geometrického pohledu, ale vznikly složením již definovaných. Ověřme teď, zda je již grupa uzavřená.

Sestrojíme novou tabulku se zahrnutými nově nalezenými prvky (viz poslední stránka dokumentu níže).

Jelikož software při jejím sestrojování již další prvky nenašel a tabulka je zcela vyplněna, tak je grupa uzavřená. Čítá 24 prvků, což je rovno hornímu odhadu a je tedy kompletní. Grupa má neutrální prvek (identitu) a díky tomu, že se právě identita nachází v každém řádku i sloupci, tak ke každému prvku existuje prvek inverzní, dále z vlastnosti skládání funkcí víme, že je operace „$\circ$“ asociativní.

4) Se sestrojenými tabulkami operace „$\circ$“ by už nemělo být tak těžké odhadnout třídy konjugací. Přijdeme na ně pomocí skutečnosti, že $G \ni a \sim b \in G \Leftrightarrow \exists p \in G : a = pbp^{-1}$, kde G je naše zkoumaná grupa.

$$\begin{aligned}\forall p \in G : pi(p)^{-1} = p(p)^{-1} = i \Rightarrow [i] = \{i\}\\ s_2o_1(s_2)^{-1} = s_1s_2 = o_2 \Rightarrow [o_1] = [o_2]\\ s_2s_1(s_2)^{-1} = o_1s_2 = s_3 \Rightarrow [s_1] = [s_3]\\ s_3s_2(s_3)^{-1} = o_1s_3 = s_1 \Rightarrow [s_2] = [s_1]\end{aligned}$$

Tvrdím, že $o_1 \nsim s_1$:

- $i : io_1(i)^{-1} = o_1$
- $o_1 : o_1o_1(o_1)^{-1} = o_2o_2 = o_1$
- $o_2 : o_2o_1(o_2)^{-1} = io_1 = o_1$
- $s_1 : s_1o_1(s_1)^{-1} = s_3s_2 = o_1$
- $s_2 : s_2o_1(s_2)^{-1} = s_1s_2 = o_2$
- $s_3 : s_3o_1(s_3)^{-1} = s_2s_3 = o_2$

Z toho už vidíme, že $[i] = \{i\}$, $[o_1] = \{o_1, o_2\}$ a $[s_1] = \{s_1, s_2, s_3\}$

5) Budeme postupovat obdobně jako v předchozí úloze. Označme zkoumanou grupu jako H.

$$\forall p \in H : pi(p)^{-1} = p(p)^{-1} = i \Rightarrow [i] = \{i\}$$
$$s_1o_1(s_1)^{-1} = s_4s_1 = o_3 \Rightarrow [o_1] = [o_3]$$
$$s_3s_1(s_3)^{-1} = o_1s_3 = s_2 \Rightarrow [s_1] = [s_2]$$
$$s_1s_3(s_1)^{-1} = o_3s_1 = s_4 \Rightarrow [s_3] = [s_4]$$

Tvrdím, že $[o_2] = \{o_2\}$:

- $i : io_2(i)^{-1} = o_2$
- $o_1 : o_1o_2(o_1)^{-1} = o_3o_3 = o_2$
- $o_2 : o_2o_2(o_2)^{-1} = io_2 = o_2$
- $o_3 : o_3o_2(o_3)^{-1} = o_1o_1 = o_2$
- $s_1 : s_1o_2(s_1)^{-1} = s_2s_1 = o_2$
- $s_2 : s_2o_2(s_2)^{-1} = s_1s_2 = o_2$
- $s_3 : s_3o_2(s_3)^{-1} = s_4s_3 = o_2$
- $s_4 : s_4o_2(s_4)^{-1} = s_3s_4 = o_2$

Tvrdím, že $[o_1] = \{o_1, o_3\}$

- $i : io_1(i)^{-1} = o_1$
- $o_1 : o_1o_1(o_1)^{-1} = o_2o_3 = o_1$
- $o_2 : o_2o_1(o_2)^{-1} = o_3o_2 = o_1$
- $o_3 : o_3o_1(o_3)^{-1} = o_4o_1 = o_1$
- $s_1 : s_1o_1(s_1)^{-1} = s_4s_1 = o_3$
- $s_2 : s_2o_1(s_2)^{-1} = s_3s_2 = o_3$
- $s_3 : s_3o_1(s_3)^{-1} = s_1s_3 = o_3$
- $s_4 : s_4o_1(s_4)^{-1} = s_2s_4 = o_3$

Tvrdím, že $[s_1] = \{s_1, s_2\}$

- $i : is_1(i)^{-1} = s_1$
- $o_1 : o_1s_1(o_1)^{-1} = s_3o_3 = s_2$
- $o_2 : o_2s_1(o_2)^{-1} = s_2o_2 = s_1$
- $o_3 : o_3s_1(o_3)^{-1} = s_4o_1 = s_2$
- $s_1 : s_1s_1(s_1)^{-1} = is_1 = s_1$
- $s_2 : s_2s_1(s_2)^{-1} = o_2s_2 = s_1$
- $s_3 : s_3s_1(s_3)^{-1} = o_1s_3 = s_2$
- $s_4 : s_4s_1(s_4)^{-1} = o_3s_4 = s_2$

Ze získaného již plyne, že $[i] = \{i\}$, $[o_1] = \{o_1, o_3\}$, $[o_2] = \{o_2\}$, $[s_1] = \{s_1, s_2\}$ a $[s_3] = \{s_3, s_4\}$.

6) Tuto úlohu budu opět řešit pomocí algoritmu a zase si zpětně zkontroluji výsledky. Budu importovat tabulku operace „$\circ$" a vyhodnocovat přímo třídy konjugací.

$$
\begin{aligned}
[i] &= \{i\} \\
[o_{A1}] &= \{o_{A1}, o_{A2}, o_{B1}, o_{B2}, o_{C1}, o_{C2}, o_{D1}, o_{D2}\} \\
[o_{S_{AB}S_{CD}}] &= \{o_{S_{AB}S_{CD}}, o_{S_{AC}S_{BD}}, o_{S_{AD}S_{BC}}\} \\
[s_{AB}] &= \{s_{AB}, s_{AC}, s_{AD}, s_{BC}, s_{BD}, s_{CD}\} \\
[a] &= \{a, b, c, d, e, f\}
\end{aligned}
$$

Omlouvám se, že takhle sprostě vyplivnu výsledek bez postupu, mohl bych donutit algoritmus alespoň nějaké mezivýpočty vypsat, ale myslím, že by jich bylo tolik, že by to stejně nikdo neměl zájem číst.

7) Položme si trojúhelník do prostoru $\mathbb{R}^2$, položme počátek tohoto prostoru do těžiště trojúhelníka a nechť osa x je rovnoběžná se stranou a trojúhelníka ABC, kde jsou vrcholy pojmenovány v pořadí „po směru kladného úhlu“, označme příslušné fíbry k těmto vrcholům po řadě E_1, E_2, E_3, pak platí $E_1 \simeq E_2 \simeq E_3 = \mathbb{R}^2$ a $M(E) \cong \mathbb{R}^6$.

Už víme, že grupa symetrií rovnostranného trojúhelníku je $G = \{i, o_1, o_2, s_1, s_2, s_3\}$, přičemž jsme již našli i třídy konjugací $[i] = \{i\}$, $[o_1] = \{o_1, o_2\}$ a $[s_1] = \{s_1, s_2, s_3\}$. Díky tomu nemusíme vyčíslovat všechny charaktery, protože už víme, že si jsou napříč třídou konjugace rovny a stačí nám si vždy zvolit jednoho zástupce třídy, zvolím prvky, kterými jsem třídy pojmenoval.

$$
\begin{aligned}
i : & E_j \to E_j, j = 1,2,3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
o_1 : & E_1 \to E_2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
& E_2 \mapsto E_3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
& E_3 \mapsto E_1, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) & -\sin(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
s_1 : & E_1 \mapsto E_1, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
& E_2 \mapsto E_3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
& E_3 \mapsto E_2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Spočteme charaktery

$$
\begin{aligned}
\chi^{M(E)}(i) &= \sum_{\substack{i(j)=j \\ j=1,2,3}} \chi^{E_i}(i) = \sum_{j=1,2,3} (1+1) = 6 \\
\chi^{M(E)}(o_1) &= \sum_{\substack{o_1(j)=j \\ j=1,2,3}} \chi^{E_i}(o_1) = \sum_{\emptyset} \chi^{E_i}(o_1) = 0 = \chi^{M(E)}(o_2) \\
\chi^{M(E)}(s_1) &= \sum_{\substack{s_1(j)=j \\ j=1,2,3}} \chi^{E_i}(s_1) = \sum_{j=1} (-1+1) = 0 = \chi^{M(E)}(s_2) = \chi^{M(E)}(s_3)
\end{aligned}
$$

Tím jsme již určili charakter reprezentace naší grupy.

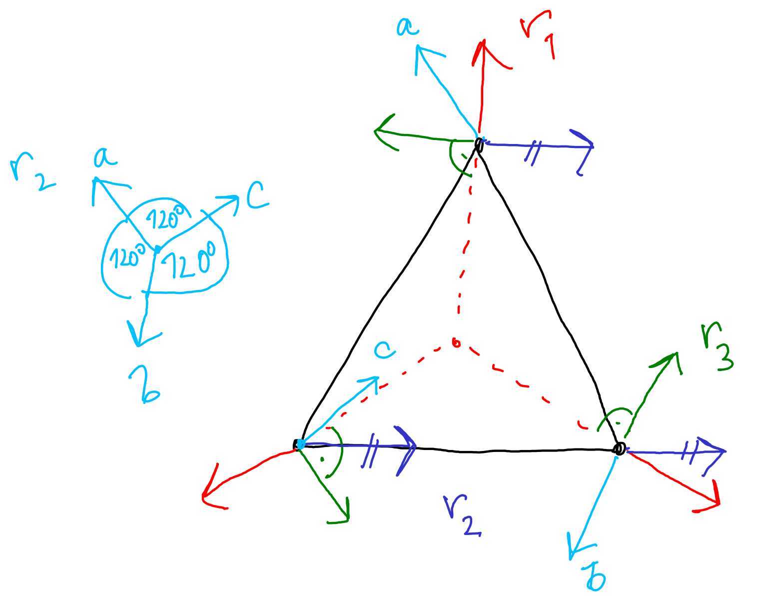
Jelikož má grupa G právě 3 třídy konjugací, tak má 3 neekvivalentní reprezentace. Pomocí skalárních součinů nalezneme vyjádření vůči těmto 3, nutně ireducibilních reprezentacím. Nechť $r^{M(E)} = ar_1 + br_2 + cr_3$.

$$
\begin{aligned}
a = (\chi^{M(E)}, \chi^{r_1}) &= \frac{1}{6}\left(\sum_{g\in G}\chi^{M(E)}(g)\chi^{r_1}(g)\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(\chi^{M(E)}(i)\chi^{r_1}(i) + 2\cdot\chi^{M(E)}(o_1)\chi^{r_1}(o_1) + 3\cdot\chi^{M(E)}(s_1)\chi^{r_1}(s_1)\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(6\chi^{r_1}(i) + 2\cdot 0\cdot\chi^{r_1}(o_1) + 3\cdot 0\cdot\chi^{r_1}(s_1)\right) = \chi^{r_1}(i)\\
b = (\chi^{M(E)}, \chi^{r_2}) &= \frac{1}{6}\left(6\chi^{r_2}(i) + 2\cdot 0\cdot\chi^{r_2}(o_1) + 3\cdot 0\cdot\chi^{r_2}(s_1)\right) = \chi^{r_2}(i)\\
c = (\chi^{M(E)}, \chi^{r_3}) &= \frac{1}{6}\left(6\chi^{r_3}(i) + 2\cdot 0\cdot\chi^{r_3}(o_1) + 3\cdot 0\cdot\chi^{r_3}(s_1)\right) = \chi^{r_3}(i)\\
&\Rightarrow \chi^{M(E)} = \chi^{r_1}(i)\chi^{r_1} + \chi^{r_2}(i)\chi^{r_2} + \chi^{r_3}(i)\chi^{r_3}
\end{aligned}
$$

Z tabulky charakterů grupy S_3 (jde o stejnou grupu jako naše G) již vyčteme, že $\chi^{r_1}(i) = 1$, $\chi^{r_2}(i) = 2$ a $\chi^{r_3}(i) = 1$. Rovnost tedy bude vypadat takto:

$$\chi^{M(E)} = \chi^{r_1} + 2\chi^{r_2} + \chi^{r_3}$$

Kde r_1, r_2 a r_3 jsou akce neekvivalentních reprezentací grupy G.



invariantní podprostory

r_3 odpovídá rotaci kolem středu Δ

r_2 odpovídá posunutí o pevný vektor celého Δ

V případě, že uvažujeme atom i ve středu trojúhelníku, pak charakter vyjde

$$\chi^{\Gamma(E)} = \chi^{r_1} + 3\chi^{r_2} + \chi^{r_3}.$$

$\circ$	i	o_{A1}	o_{A2}	o_{B1}	o_{B2}	o_{C1}	o_{C2}	o_{D1}	o_{D2}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	s_{AB}	s_{AC}	s_{AD}	s_{BC}	s_{BD}	s_{CD}
i	i	o_{A1}	o_{A2}	o_{B1}	o_{B2}	o_{C1}	o_{C2}	o_{D1}	o_{D2}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	s_{AB}	s_{AC}	s_{AD}	s_{BC}	s_{BD}	s_{CD}
o_{A1}	o_{A1}	o_{A2}	i	o_{D2}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{B2}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{C2}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{D1}	o_{B1}	o_{C1}	s_{AD}	s_{AB}	s_{AC}	a	b	c
o_{A2}	o_{A2}	i	o_{A1}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{C1}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{D1}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{B1}	o_{C2}	o_{D2}	o_{B2}	s_{AC}	s_{AD}	s_{AB}	d	e	f
o_{B1}	o_{B1}	o_{C2}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{B2}	i	o_{D2}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{A2}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{C1}	o_{A1}	o_{D1}	s_{BC}	b	f	s_{BD}	s_{AB}	e
o_{B2}	o_{B2}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{D1}	i	o_{B1}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{A1}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{C1}	o_{D2}	o_{C2}	o_{A2}	s_{BD}	c	d	s_{AB}	s_{BC}	a
o_{C1}	o_{C1}	o_{D2}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{A2}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{C2}	i	o_{B2}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{B1}	o_{D1}	o_{A1}	e	s_{CD}	a	s_{AC}	d	s_{BC}
o_{C2}	o_{C2}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{B1}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{D1}	i	o_{C1}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{A1}	o_{A2}	o_{B2}	o_{D2}	f	s_{BC}	b	s_{CD}	c	s_{AC}
o_{D1}	o_{D1}	o_{B2}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{C2}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{A2}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{D2}	i	o_{A1}	o_{C1}	o_{B1}	c	d	s_{BD}	f	s_{CD}	s_{AD}
o_{D2}	o_{D2}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{C1}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{A1}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{B1}	i	o_{D1}	o_{B2}	o_{A2}	o_{C2}	a	e	s_{CD}	b	s_{AD}	s_{BD}
$o_{S_{AB}S_{CD}}$	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{C1}	o_{D2}	o_{D1}	o_{C2}	o_{A1}	o_{B2}	o_{B1}	o_{A2}	i	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	s_{CD}	a	e	c	f	s_{AB}
$o_{S_{AC}S_{BD}}$	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{D1}	o_{B2}	o_{C1}	o_{A2}	o_{B1}	o_{D2}	o_{A1}	o_{C2}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	i	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	d	s_{BD}	c	e	s_{AC}	b
$o_{S_{AD}S_{BC}}$	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{B1}	o_{C2}	o_{A1}	o_{D2}	o_{D1}	o_{A2}	o_{C1}	o_{B2}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	i	b	f	s_{BC}	s_{AD}	a	d
s_{AB}	s_{AB}	s_{AC}	s_{AD}	s_{BD}	s_{BC}	a	c	f	e	s_{CD}	b	d	i	o_{A1}	o_{A2}	o_{B2}	o_{B1}	$o_{S_{AB}S_{CD}}$
s_{AC}	s_{AC}	s_{AD}	s_{AB}	e	d	s_{BC}	s_{CD}	c	b	f	s_{BD}	a	o_{A2}	i	o_{A1}	o_{C1}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{C2}
s_{AD}	s_{AD}	s_{AB}	s_{AC}	b	a	d	f	s_{CD}	s_{BD}	c	e	s_{BC}	o_{A1}	o_{A2}	i	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	o_{D2}	o_{D1}
s_{BC}	s_{BC}	b	f	s_{AB}	s_{BD}	s_{CD}	s_{AC}	d	a	e	c	s_{AD}	o_{B1}	o_{C2}	$o_{S_{AD}S_{BC}}$	i	o_{B2}	o_{C1}
s_{BD}	s_{BD}	c	d	s_{BC}	s_{AB}	e	b	s_{AD}	s_{CD}	a	s_{AC}	f	o_{B2}	$o_{S_{AC}S_{BD}}$	o_{D1}	o_{B1}	i	o_{D2}
s_{CD}	s_{CD}	a	e	f	c	s_{AC}	s_{BC}	s_{BD}	s_{AD}	s_{AB}	d	b	$o_{S_{AB}S_{CD}}$	o_{C1}	o_{D2}	o_{C2}	o_{D1}	i

$\circ$	i	o_{A1}	o_{A2}	o_{B1}	o_{B2}	o_{C1}	o_{C2}	o_{D1}	o_{D2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	s_{AB}	s_{AC}	s_{AD}	s_{BC}	s_{BD}	s_{CD}	a	b	c	d	e	f
i	i	o_{A1}	o_{A2}	o_{B1}	o_{B2}	o_{C1}	o_{C2}	o_{D1}	o_{D2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	s_{AB}	s_{AC}	s_{AD}	s_{BC}	s_{BD}	s_{CD}	a	b	c	d	e	f
o_{A1}	o_{A1}	o_{A2}	i	o_{D2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{D1}	o_{B1}	o_{C1}	s_{AD}	s_{AB}	s_{AC}	a	b	c	d	e	f	s_{BC}	s_{BD}	s_{CD}
o_{A2}	o_{A2}	i	o_{A1}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{C1}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{D1}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{B1}	o_{C2}	o_{D2}	o_{B2}	s_{AC}	s_{AD}	s_{AB}	d	e	f	s_{BC}	s_{BD}	s_{CD}	a	b	c
o_{B1}	o_{B1}	o_{C2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B2}	i	o_{D2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{A2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C1}	o_{A1}	o_{D1}	s_{BC}	b	f	s_{BD}	s_{AB}	e	s_{CD}	c	s_{AC}	s_{AD}	a	d
o_{B2}	o_{B2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{D1}	i	o_{B1}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{A1}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{C1}	o_{D2}	o_{C2}	o_{A2}	s_{BD}	c	d	s_{AB}	s_{BC}	a	e	s_{AC}	b	f	s_{CD}	s_{AD}
o_{C1}	o_{C1}	o_{D2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{A2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{C2}	i	o_{B2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B1}	o_{D1}	o_{A1}	e	s_{CD}	a	s_{AC}	d	s_{BC}	b	s_{AD}	s_{BD}	c	f	s_{AB}
o_{C2}	o_{C2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B1}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{D1}	i	o_{C1}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{A1}	o_{A2}	o_{B2}	o_{D2}	f	s_{BC}	b	s_{CD}	c	s_{AC}	s_{AD}	a	d	s_{BD}	s_{AB}	e
o_{D1}	o_{D1}	o_{B2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{C2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{A2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{D2}	i	o_{A1}	o_{C1}	o_{B1}	c	d	s_{BD}	f	s_{CD}	s_{AD}	s_{AB}	s_{BC}	a	e	s_{AC}	b
o_{D2}	o_{D2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C1}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{A1}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{B1}	i	o_{D1}	o_{B2}	o_{A2}	o_{C2}	a	e	s_{CD}	b	s_{AD}	s_{BD}	c	f	s_{AB}	s_{AC}	d	s_{BC}
$o_{s_{AB}s_{CD}}$	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C1}	o_{D2}	o_{D1}	o_{C2}	o_{A1}	o_{B2}	o_{B1}	o_{A2}	i	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	s_{CD}	a	e	c	f	s_{AB}	s_{AC}	d	s_{BC}	b	s_{AD}	s_{BD}
$o_{s_{AC}s_{BD}}$	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{D1}	o_{B2}	o_{C1}	o_{A2}	o_{B1}	o_{D2}	o_{A1}	o_{C2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	i	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	d	s_{BD}	c	e	s_{AC}	b	f	s_{CD}	s_{AD}	s_{AB}	s_{BC}	a
$o_{s_{AD}s_{BC}}$	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B1}	o_{C2}	o_{A1}	o_{D2}	o_{D1}	o_{A2}	o_{C1}	o_{B2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	i	b	f	s_{BC}	s_{AD}	a	d	s_{BD}	s_{AB}	e	s_{CD}	c	s_{AC}
s_{AB}	s_{AB}	s_{AC}	s_{AD}	s_{BD}	s_{BC}	a	c	f	e	s_{CD}	b	d	i	o_{A1}	o_{A2}	o_{B2}	o_{B1}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C1}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{C2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{D2}	o_{D1}
s_{AC}	s_{AC}	s_{AD}	s_{AB}	e	d	s_{BC}	s_{CD}	c	b	f	s_{BD}	a	o_{A2}	i	o_{A1}	o_{C1}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{C2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{D2}	o_{D1}	o_{B2}	o_{B1}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$
s_{AD}	s_{AD}	s_{AB}	s_{AC}	b	a	d	f	s_{CD}	s_{BD}	c	e	s_{BC}	o_{A1}	o_{A2}	i	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{D2}	o_{D1}	o_{B2}	o_{B1}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C1}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{C2}
s_{BC}	s_{BC}	b	f	s_{AB}	s_{BD}	s_{CD}	s_{AC}	d	a	e	c	s_{AD}	o_{B1}	o_{C2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	i	o_{B2}	o_{C1}	o_{D2}	o_{A1}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{D1}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{A2}
s_{BD}	s_{BD}	c	d	s_{BC}	s_{AB}	e	b	s_{AD}	s_{CD}	a	s_{AC}	f	o_{B2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{D1}	o_{B1}	i	o_{D2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C2}	o_{A1}	o_{A2}	o_{C1}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$
s_{CD}	s_{CD}	a	e	f	c	s_{AC}	s_{BC}	s_{BD}	s_{AD}	s_{AB}	d	b	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C1}	o_{D2}	o_{C2}	o_{D1}	i	o_{A1}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{A2}	o_{B1}
a	a	e	s_{CD}	s_{AD}	b	c	s_{AB}	s_{BC}	d	s_{BD}	f	s_{AC}	o_{D2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C1}	o_{A1}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{A2}	o_{B1}	o_{C2}	o_{D1}	i
b	b	f	s_{BC}	a	s_{AD}	s_{BD}	e	s_{AC}	c	d	s_{AB}	s_{CD}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B1}	o_{C2}	o_{D2}	o_{A1}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{D1}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{A2}	i	o_{B2}	o_{C1}
c	c	d	s_{BD}	s_{CD}	f	s_{AB}	a	b	s_{AC}	s_{AD}	s_{BC}	e	o_{D1}	o_{B2}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C2}	o_{A1}	o_{A2}	o_{C1}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B1}	i	o_{D2}
d	d	s_{BD}	c	s_{AC}	e	f	s_{AD}	a	s_{BC}	b	s_{CD}	s_{AB}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{D1}	o_{B2}	o_{A2}	o_{C1}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B1}	i	o_{D2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{C2}	o_{A1}
e	e	s_{CD}	a	d	s_{AC}	b	s_{BD}	s_{AB}	f	s_{BC}	s_{AD}	c	o_{C1}	o_{D2}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	$o_{s_{AC}s_{BD}}$	o_{A2}	o_{B1}	o_{C2}	o_{D1}	i	o_{A1}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B2}
f	f	s_{BC}	b	c	s_{CD}	s_{AD}	d	e	s_{AB}	s_{AC}	a	s_{BD}	o_{C2}	$o_{s_{AD}s_{BC}}$	o_{B1}	o_{D1}	$o_{s_{AB}s_{CD}}$	o_{A2}	i	o_{B2}	o_{C1}	o_{D2}	o_{A1}	$o_{s_{AC}s_{BD}}$