Reprezentace konečných grup

Definice Reprezentací grupy G na komplexním vektorovém prostoru V konečné dimense rozumíme akci

$$r_V : G \times V \longrightarrow V \quad \text{takovou, že}$$

$\forall g$ je zobrazení : $V \ni v \longmapsto r_V(g,v) =: g.v \in V$ lineární. (Dokonce lineární isomorfismus.)

Alternativně je reprezentace G na V homomorfismus grup

$$G \longrightarrow \underbrace{GL(V)}$$

grupa všech lineárních isomorfismů na V.

Definice Dvě reprezentace (V, r_V) a (W, r_W) grupy G se nazývají ekvivalentní, jestliže existuje lineární isomorfismus

$$T : V \longrightarrow W \quad \text{tak, že}$$

$$\forall g \in G,\ \forall v \in V : T(r_V(g,v)) = r_W(g, T(v)).$$

Definice Nechť (V, r_V) je reprezentace grupy G. Vektorový podprostor $W \subset V$ se nazývá G-invariantní, jestliže $\forall g \in G\ \forall w \in W : g.w \in W$.

Reprezentace (V, r_V) se nazývá ireducibilní, jestliže

$\{0\}$, V jsou jediné G-invariantní podprostory ve V.

Poznámka: Je-li W G-invariantní podprostor ve V, pak předpis

$$G \times W \longrightarrow W,\ (g,w) \longmapsto r_V(g,w)$$

je reprezentace G na W a tato reprezentace se nazývá restrikce V na W a značíme ji $(W, r_V|_W)$.

Tvrzení Nechť (V_1, r_1) a (V_2, r_2) jsou dvě reprezentace grupy G. Pak předpis $G \times (V_1 \oplus V_2) \longrightarrow V_1 \oplus V_2,\ (g,(v_1,v_2)) \longmapsto (r_1(g,v_1), r_2(g,v_2))$

kde $g \in G$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, je reprezentace grupy G.
Tato reprezentace se nazývá direktním součtem reprezentací (V_1, r_1) a (V_2, r_2) a značíme ji $(V_1 \oplus V_2, r_1 \oplus r_2)$.

Otázka: jsou-li (V_1, r_1) a (V_2, r_2) dvě reprezentace grupy G, kdy jsou tyto reprezentace ekvivalentní?

Nutně $\dim V_1 = \dim V_2$. Tato podmínka ale není postačující.

Zvolme si bázi M vektorového prostoru V_1 a nechť

$[r_1(g)]_M$ je matice lineárního zobrazení

$$V_1 \longrightarrow V_1, \quad v \longmapsto r_1(g, v) =: g \cdot v, \quad g \in G.$$

Je zřejmé, že tato závisí na volbě báze.

Připomenutí z LA:

Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice $n \times n$, pak stopa matice je definována jako $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Je-li $B = (b_{ij})$ matice stejného typu jako A, pak platí:

$$Tr(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = Tr(BA).$$

Jestliže M' je jiná báze V_1 a je-li C matice přechodu od M k M', pak

$$\underbrace{[Id]^{M}_{M'}}_{C} [r_1(g)]_M \underbrace{[Id]^{M'}_{M}}_{C^{-1}} = [r_1(g)]_{M'}$$

a tudíž

$$Tr([r_1(g)]_{M'}) = Tr(C [r_1(g)]_M C^{-1}) =$$
$$= Tr([r_1(g)]_M C \cdot C^{-1}) = Tr([r_1(g)]_M).$$

Vidíme, že stopa matice $[r_1(g)]_M$ nezávisí na volbě báze V_1.

Definice Nechť (V, r) je reprezentace grupy G. Potom charakterem této reprezentace rozumíme zobrazení
$$\chi^r : G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \chi^r(g) = \mathrm{Tr}\,[r(g)]_M,$$
kde M je libovolná báze V.

Důsledek Jsou-li (V_1, r_1) a (V_2, r_2) dvě reprezentace grupy G, které jsou ekvivalentní, pak nutně
$$\chi^{r_1} = \chi^{r_2}.$$

Důkaz: Nechť $T : V_1 \longrightarrow V_2$ splňuje
$$T(g.v) = g.T(v)$$
pro každé $v \in V_1$ a $g \in G$. Je-li $M = (v_1, \dots, v_n)$ báze V_1, pak $M' = (T(v_1), \dots, T(v_2))$ je báze V_2 a zřejmě platí
$$[r_1(g)]_M = [r_2(g)]_{M'} \text{ pro každé } g \in G.$$
Pak ale nutně
$$\chi^{r_1}(g) = \mathrm{Tr}\,[r_1(g)]_M = \mathrm{Tr}\,[r_2(g)]_{M'} = \chi^{r_2}(g). \quad \square$$

Zřejmě platí, že charakter direktního součtu dvou reprezentací je součet charakterů, tj.
$$\chi^{r_1 \oplus r_2} = \chi^{r_1} + \chi^{r_2}$$
pro každé reprezentace (V_1, r_1) a (V_2, r_2).

Jestliže $a, b \in G$ a je-li (V, r) reprezentace grupy G, pak nutně platí
$$\chi^r(aba^{-1}) = \mathrm{Tr}\left([r(aba^{-1})]_M\right) = \mathrm{Tr}\left([r(a)]_M [r(b)]_M [r(a^{-1})]_M\right)$$
$$= \mathrm{Tr}\left([r(b)]_M [r(a)]_M \cdot [r(a)]_M^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left([r(b)]_M\right) = \chi^r(b).$$

Definice Prvky a, b grupy G se nazývají konjugované, jestliže existuje $c \in G$ takový, že
$$a = c \cdot b \cdot c^{-1} \in G.$$

Jestliže a, b jsou konjugované, pak budeme psát

$$a \sim b.$$

Je jednoduché si rozmyslet, že relace $\sim$ je ekvivalence na grupě G a $[a]$ budeme značit množinu všech prvků grupy G, které jsou s a konjugované.

Před chvílí jsme ukázali, že

$$\chi^r(a) = \chi^r(b) \text{ jestliže } a \sim b.$$

<u>Definice</u> Symbolem $\mathbb{C}(G)^G$ značíme vektorový prostor všech funkcí

$$f: G \longrightarrow \mathbb{C},$$

které splňují $f(a) = f(b)$, pokud $a \sim b$. Funkci z $\mathbb{C}(G)^G$ nazýváme centrální funkcí na grupě G.

Speciálně $\chi^r \in \mathbb{C}(G)^G$ pro každou reprezentaci (V, r) grupy G.

<u>Definice</u> Nechť (V, r) je reprezentace grupy G. Skalární součin

$$h: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

nazveme G-invariantní, jestliže

$$h(gu, gv) = h(u, v) \text{ pro každé } u, v \in V \text{ a } g \in G.$$

<u>Tvrzení</u> Nechť (V, r) je reprezentace grupy G. Pak na V existuje G-invariantní skalární součin.

<u>Důkaz:</u> Nechť h' je libovolný skalární součin na V a definujme

$$h: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$h(u, v) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} h'(gu, gv),$$

kde $\#G$ značí počet prvků G. Je jednoduché si rozmyslet, že h je skalární součin, který je G-invariantní.

Je-li $a \in G$, pak

$$h(au, av) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} h'(a(gu), a(gv)) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} h'((ag)u, (ag)v)$$

$$= \frac{1}{\#G} \sum_{q \in G} h(qu, qv) = h(u, v),$$ kde jsme

položili $q = ag$ a využili toho, že zobrazení

$G \longrightarrow G$, $g \longmapsto ag$ je bijekce pro a pevné. □

<u>Důsledek</u> Nechť (V, r) je reprezentace grupy G a W buď G-invariantní ve V. Buď h G-invariantní skalární součin na V. Pak ortogonální doplněk $W^\perp$ ke W vzhledem k h je rovněž G-invariantní podprostor. Speciálně, (V, r) je ekvivalentní s

$$(W \oplus W^\perp, r_{V|W} \oplus r_{V|W^\perp}).$$

<u>Důsledek</u> Je-li M ortonormální báze (V, r) vzhledem ke G-invariantnímu skalárnímu součinu h na V, pak $[r(g)]_M$ je unitární. Tudíž i

$$\chi^r(g^{-1}) = Tr([r(g^{-1})]_M) = Tr([r(g)]_M^{-1}) =$$
$$= Tr([r(g)]_M^*) = \overline{Tr([r(g)]_M)} = \overline{\chi^r(g)}.$$

$*$.. značí hermitovsky sdruženou matici

$A^* = \overline{A}^T$

<u>Důsledek</u> Je-li (V, r) reprezentace grupy G, pak (V, r) je ekvivalentní s direktním součtem reprezentací

$$(V_1 \oplus \dots \oplus V_\ell, r_1 \oplus \dots \oplus r_\ell),$$ kde

všechny reprezentace (V_i, r_i), $i = 1, \dots, \ell$, jsou ireducibilní.

<u>Příklad</u> $G = S_2$ je grupa permutací na dvouprvkové množině. G je isomorfní s grupou $(\mathbb{Z}_2, 1, \cdot)$, $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$.

Grupa $\mathbb{Z}_2$ má dvě neekvivalentní reprezentace, a to jednak triviální reprezentaci $(\mathbb{C}, r_1)$ a znaménkovou reprezentaci $(\mathbb{C}, r_2)$, kde

$$r_1 : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad r_1(g) = 1$$

$$r_2 : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad r_2(\pm 1) = \pm 1.$$

$$\chi^{r_1}(g) = 1$$

$$\chi^{r_2}(g) = \pm 1$$

Charakterová tabulka

	$[1]$	$[-1]$
χ^{r_1}	1	1
χ^{r_2}	1	-1

Na vektorovém prostoru $\mathbb{C}(G)^G$ definuje předpis

$$(f, g) = \frac{1}{\# G} \sum_{a \in G} f(a) \overline{g(a)}$$

skalární součin. Z Schurova lemmatu plyne

<u>Tvrzení</u> Nechť (V_1, r_1) a (V_2, r_2) jsou dvě ireducibilní reprezentace grupy G. Pak

$$(\chi^{r_1}, \chi^{r_2}) = \begin{cases} 1, & r_1 \text{ a } r_2 \text{ jsou ekvivalentní} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

<u>Důsledek</u> Nechť (V, r) je direktním součtem ireducibilních reprezentací $(V_1, r_1), \dots, (V_e, r_e)$ a nechť (W, s) je ireducibilní reprezentace grupy G. Pak platí

$(\chi^r, \chi^s) = n$, kde n je nezáporné celé číslo které se rovná i takových, že (W, s) je ekvivalentní s (V_i, r_i).

Věta Grupa G má právě tolik neekvivalentních reprezentací, kolik má tříd konjugací $[g]$ pro $g \in G$.

Důsledek Množina všech charakterů grupy G tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}(G)^G$ vzhledem k výše uvedenému skalárnímu součinu.

Jsou-li $(V_1, r_1), \ldots, (V_e, r_e)$ všechny navzájem neekvivalentní ireducibilní reprezentace grupy G a je-li (V, r) libovolná reprezentace G, pak

$$\chi^r = \sum_{i=1}^{e} m_i \chi^{r_i}, \quad \text{kde } m_i \in \mathbb{Z}, m_i \geq 0$$

a navíc toto vyjádření je jednoznačné. Dále vidíme, že

$$(\chi^r, \chi^r) = \left(\sum m_i \chi^{r_i}, \sum m_j \chi^{r_j} \right) = \sum_{i=1}^{e} m_i^2 .$$

Speciálně, (V, r) je ireducibilní právě tehdy, když $(\chi^r, \chi^r) = 1$.

DÚ Najděte třídy konjugací grupy symetrií

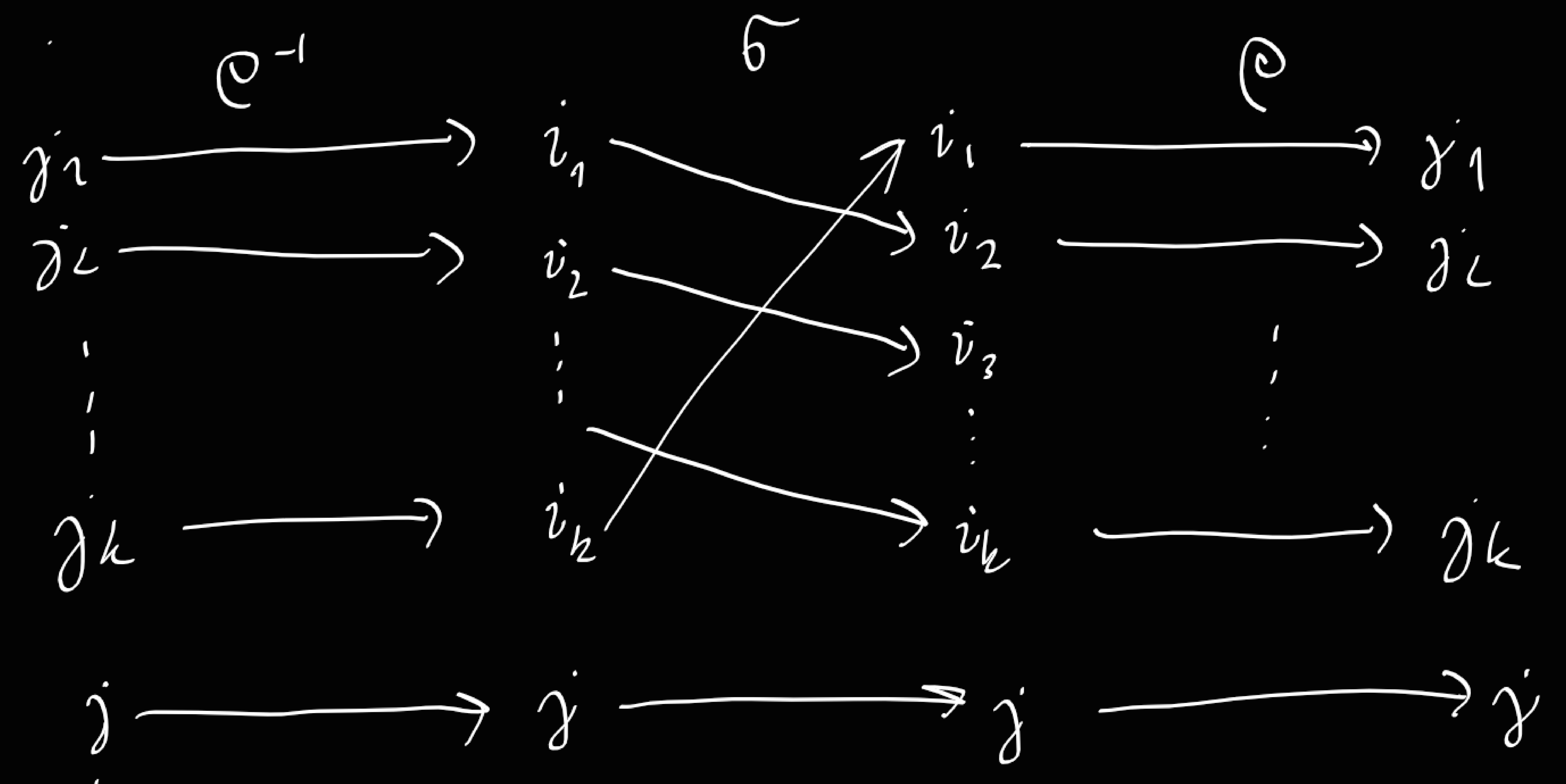
1) rovnostranného trojúhelníku, (1 bod)
2) čtverce a (1 bod)
3) čtyřstěnu (3 body)

Příklad Nechť S_3 je grupa permutací $\{1, 2, 3\}$.

Obecně nechť S_n je grupa permutací $\{1, \ldots, n\}$.

Z přednášky z LA víme, že $\pi \in S_n$ se dá napsat jako součin nezávislých cyklů. Je-li $\sigma = (i_1 \ldots i_k)$ délky k z S_n a je-li ρ permutace z S_n, která zobrazuje $\rho(i_e) = j_e$, $e = 1, \ldots, k$ a $\rho(i) = i$ jinak, pak platí, že

$$\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} = (j_1 \dots j_k)$$



$j \notin \{j_1, \dots, j_k\}$

Vidíme, že dva cykly z S_n jsou konjugované právě tehdy, když mají stejnou délku. Jsou-li $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ a jsou-li

$$\pi_1 = \sigma_1 \cdots \sigma_{l_1}$$
$$\pi_2 = \sigma_1' \cdots \sigma_{l_2}'$$

rozklady π_1 a π_2 na nezávislé cykly, kde předpokládáme, že délka σ_i je větší nebo rovna než délka σ_j kdykoliv $i \leq j$ a to samé platí pro σ_i', $i = 1, \dots, l_2$. Pak z předchozího jednoduše plyne, že π_1 a π_2 jsou konjugované právě tehdy, když $l_1 = l_2$ a délka σ_i se rovná délce σ_i' pro každé $i = 1, \dots, l_1$.

$$S_3 = \{\underset{[\mathrm{Id}]}{\mathrm{Id}}, \underbrace{(12), (13), (23)}_{[(12)]}, \underbrace{(123), (321)}_{[(123)]}\}$$

Uvažujme působení S_3 na $\mathbb{C}^3$

$$r : S_3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$
$$(\sigma, (z_1, z_2, z_3)) \longmapsto (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)})$$

je reprezentace grupy S_3.

$$[r(12)]_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi^r(12) = 1$$

$$[r(123)]_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi^r(123) = 0$$

$$[r(Id)]_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi^r(Id) = 3$$

$$\begin{aligned}(\chi^r, \chi^r) &= \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi^r(g)\chi^r(g) \\ &= \frac{1}{6}\big(\chi^r(Id)\chi^r(Id) \\ &\quad + \chi^r(12)\,\chi^r(12)\cdot 3 \\ &\quad + \chi^r(123)\,\chi^r(123)\cdot 2 \big) \\ &= \frac{1}{6}\left(3^2 + 1^2\cdot 3 + 0^2\cdot 2\right) \\ &= \frac{1}{6}(9+3) = 2\end{aligned}$$

Vidíme z předpisu, že podprostory

$$\{\underbrace{(x,x,x)}_{(V_1,r_1)},\ x\in\mathbb{C}\} \quad a \quad \{\underbrace{(z_1,z_2,z_3)}_{(V_2,r_2)} : \sum_{i=1}^{3} z_i = 0\}$$

jsou invariantní podprostory v reprezentaci r. Příslušné ireducibilní reprezentace si značíme jako (V_1,r_1) a (V_2,r_2).

	$[Id]$	$[(12)]$	$[(123)]$
χ^{r_1}	1	1	1
χ^{r_2}	2	0	-1
χ^{r_3}	1	-1	1

Reprezentace grupy symetrií na vektorovém prostoru všech řešení homogenního vektorového bandlu malých vychýlení z rovnovážného stavu

Nechť (E, M, π) je G-homogenní bandl. Máme akci r_M G na M, akci r_E G na E tak, že $\forall g \in G$ a $x \in M$ platí, že restrikce

$$r_E(g)\big|_{E_x} : E_x \longrightarrow E_{g(x)} = E_{r_M(g,x)}$$

je lineární isomorfismus. Dále $E = \dot{\bigcup\limits_{x \in M}} E_x$. Víme, že $\Gamma(E)$ je vektorový prostor a my chceme spočíst charakter této reprezentace grupy G.

Nechť $(e_{x,i} : i = 1, \dots, n)$ je báze E_x pro každé $x \in M$. Pak je jednoduché si rozmyslet, že posloupnost $(f_{x,i},\ i = 1, \dots, n,\ x \in M)$, kde

$$f_{x,i} \in \Gamma(E), \quad f_{x,i} : M \longrightarrow E, \quad f_{x,i}(y) \in E_y,\ y \in M$$

$$f_{x,i}(y) = \begin{cases} e_{x,i}, & x = y, \\ 0, & x \neq y, \end{cases}$$

je báze $\Gamma(E)$. Jednoduše plyne Wignerova formule

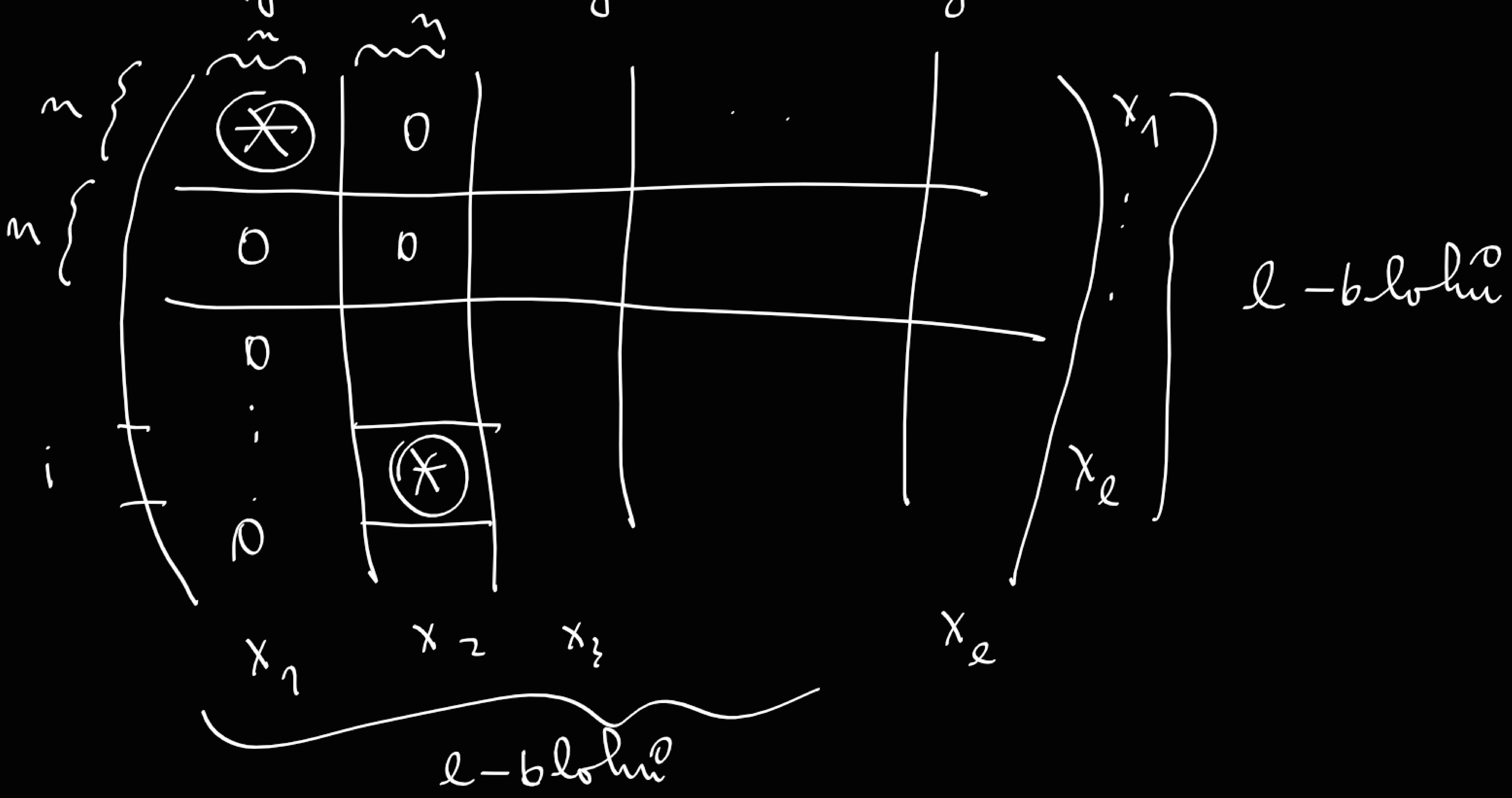
$$\boxed{\chi^{\Gamma(E)}(g) = \sum_{\substack{gx = x \\ x \in M}} \mathrm{Tr}(g : E_x \to E_x)}$$

kde g působí na E_x restrikcí akce na E

$$E_x \longrightarrow E_x, \quad v \longmapsto r_E(g, v).$$

Víme, že toto zobrazení je lineární isomorfismus.

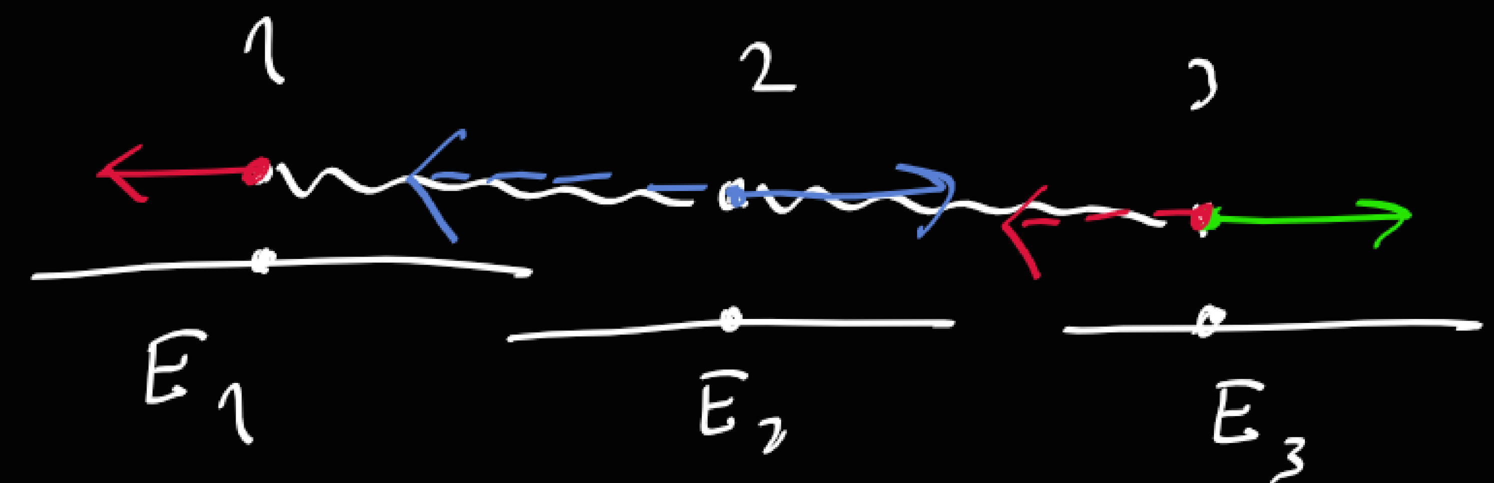
Zvolme pevně $g \in G$ a $x \in M$. Prvky M očíslujme jako $x_1, \dots, x_l$. Vzhledem k bázi $(f_{x_i, j},\ i = 1, \dots, l,\ j = 1, \dots, m)$ má $r^{\Gamma(E)}(g)$ následující blokový tvar



Buď $g x_1 = x_1$ nebo $g x_2 \neq x_2$,

$g x_2 = x_i \quad i \neq 2$

Př.



$E_1 \simeq E_2 \simeq E_3 \cong \mathbb{R}\ (= \mathbb{C}) \qquad \Gamma(E) \cong \mathbb{R}^3 = (\mathbb{C}^3)$

grupa symetrií molekuly je isomorfní $S_2 \cong \mathbb{Z}_2 = \{Id, S\}$

$Id(i) = i, \quad i = 1, 2, 3$

$S(1) = 3$

$S(2) = 2$

$S(3) = 1$

$Id: E_i \longrightarrow E_i,\ x \longmapsto x \qquad S: E_1 \longrightarrow E_3,\ x \longmapsto -x$

$S: E_2 \longrightarrow E_2,\ x \longmapsto -x \qquad S: E_3 \longrightarrow E_1,\ x \longmapsto -x$

x chápeme jako reálné čísla

$$\chi^{\Gamma(E)}(Id) = \sum_{\substack{Id\, i = i \\ i=1,2,3}} \chi^{E_i}(Id) = \sum_{i=1,2,3} 1 = 3$$

$$\chi^{\Gamma(E)}(S) = \sum_{\substack{Si=i \\ i=1,2,3}} \chi^{E_i}(S) = \sum_{i=2} \chi^{E_2}(S) = -1$$

$$r^{\Gamma(E)} = \lambda_1 r_1 + r_2 \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\left(\chi^{\Gamma(E)}, \chi^{r_1}\right) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{g \in \mathbb{Z}_2} \chi^{\Gamma(E)}(g)\, \chi^{r_1}(g)\Big)$$

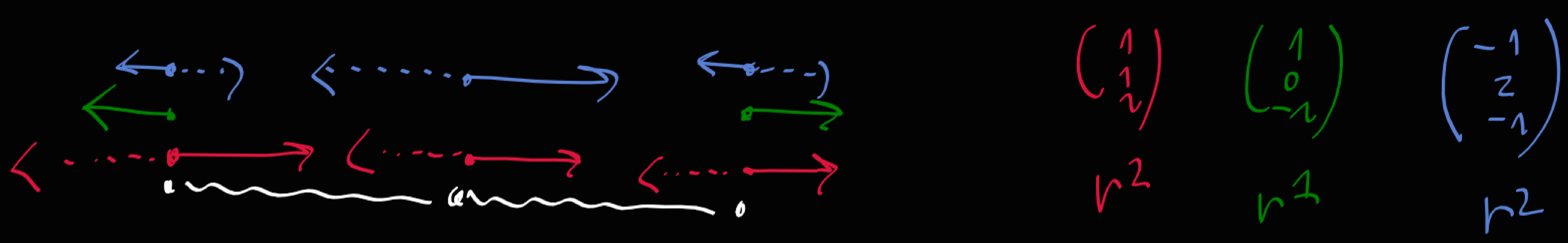
$$= \frac{1}{2}\left(\chi^{\Gamma(E)}(Id)\, \chi^{r_1}(Id) + \chi^{\Gamma(E)}(S)\, \chi^{r_1}(S)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\left(\chi^{\Gamma(E)}, \chi^{r_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\chi^{\Gamma(E)}(Id)\, \chi^{r_2}(Id) + \chi^{\Gamma(E)}(S)\, \chi^{r_2}(S)\right)$$

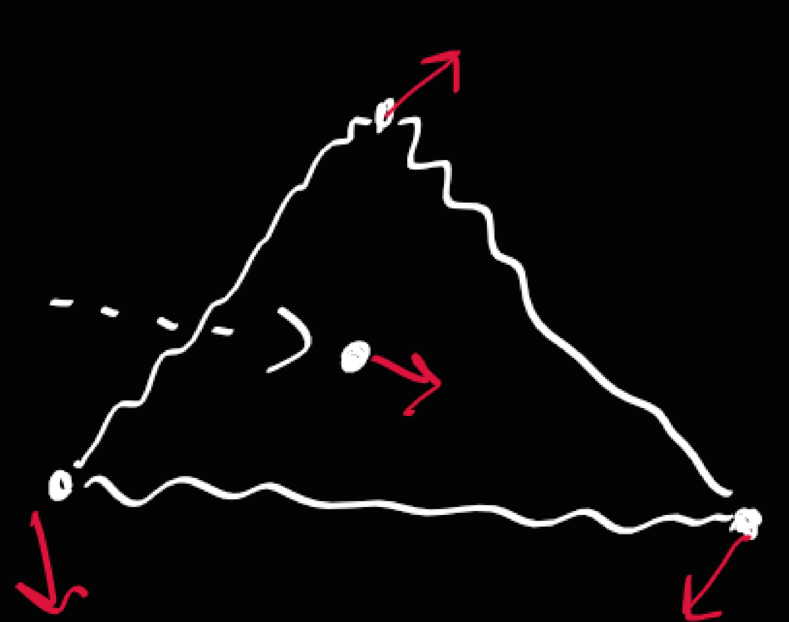
$$= \frac{1}{2}\left(3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)\right) = \frac{1}{2}(4) = 2$$

$$\chi^{\Gamma(E)} = \chi^{r_1} + 2\chi^{r_2}$$



DÚ. Najděte charakter reprezentace grupy symetrií (4 body) rovnostranného trojúhelníku na vektorovém prostoru všech řešení vekt. bandlu malých vychýlení molekuly a charakter této reprezentace napište jako součet charakterů ireducibilních reprezentací!

střed trojúhelníku $= 0 \in \mathbb{R}^2$



Nápověda: využijte znalosti charakterů S_3.